

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ
СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ»

На правах рукописи

УДК 51-74:510.22:519.6: 539.3

Сторожев Сергей Валериевич

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ФАКТОРОВ
НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ
ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ (технические науки)»

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора технических наук

Научный консультант

Павлыш Владимир Николаевич,

доктор технических наук, профессор

Макеевка – 2021



*Целостность всех экземпляров диссертации подтверждаю,
ученый секретарь диссертационного совета к. т. н., доцент*

Заведующий

[Signature]

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	6
РАЗДЕЛ 1. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ, ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМАМ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ.....	25
1.1. ХАРАКТЕРИСТИКА ПОДХОДОВ К УЧЕТУ ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ТЕХНИЧЕСКИМ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ.....	25
1.2. ОБЗОР ОПУБЛИКОВАННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО РАССМАТРИВАЕМОЙ ПРОБЛЕМЕ..	29
1.3. КОНЦЕПЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОГО ПОДХОДА ДЛЯ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ	33
1.4. МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ АППАРАТА ТОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ РАССМАТРИВАЕМОГО ТИПА	36
1.5. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 1	53
РАЗДЕЛ 2. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	56
2.1. НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ.....	56
2.2. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ	62
2.3. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ СКОРОСТЕЙ ВОЛН КРУЧЕНИЯ В ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЯХ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННЫХ ТЕОРИЙ	73
2.4. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСОВ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ТОНКИХ ИЗОТРОПНЫХ ПЛИТ	85
2.5. МЕТОД УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛЯХ ТЕРМОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИН С КОНТУРАМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОЧЕРТАНИЯ	100
2.6. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН	108
2.7. ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСА ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В ПРИКЛАДНЫХ МОДЕЛЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ РАВНОМЕРНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ	113

2.8. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ И РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЗАМКНУТЫХ СФЕРИЧЕСКИХ, ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ И ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК	129
2.9. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 2	139

РАЗДЕЛ 3. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ЗОН ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОКОЛО ПОЛОСТЕЙ И ОТВЕРСТИЙ..... 141

3.1. НЕЧЕТКО МНОЖЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСА ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНАХ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ. 141	141
3.2. ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ НЕЧЕТКОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ В МОДЕЛИ ОБОБЩЕННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ..... 145	145
3.3. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ МЕТОД УЧЕТА РАЗБРОСОВ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ О ДВУХСТОРОННЕМ РАСТЯЖЕНИИ ПЛАСТИНЫ С ВПАЯННОЙ ЖЕСТКОЙ КРУГОВОЙ ШАЙБОЙ	156
3.4. АНАЛИЗ НЕЧЕТКОЙ МОДЕЛИ КОНЦЕНТРАЦИИ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ С МНОГОУГОЛЬНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ УГЛОВОЙ КРИВИЗНЫ	159
3.5. ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОСЛАБЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЯМИ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ ПЛАСТИН С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ	165
3.6. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОХВАТЫВАЮЩИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ВОКРУГ ПОЛОСТЕЙ И ОТВЕРСТИЙ КРУГОВОГО И СФЕРИЧЕСКОГО ОЧЕРТАНИЯ ...	172
3.7. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 3	186

РАЗДЕЛ 4. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ, ДИСПЕРСИИ И ТРАНСФОРМАЦИИ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛН..... 188

4.1. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ В МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В ИЗОТРОПНЫХ, АНИЗОТРОПНЫХ И ПЬЕЗОАКТИВНЫХ СРЕДАХ	188
4.2. НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СКОРОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЕЛЕЕВСКОГО И СДВИГОВОГО ТИПА В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ	211
4.3. НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССОВ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ	217
4.4. НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛИНЕЙНЫХ ВТОРЫХ ГАРМОНИК ОБЪЕМНЫХ ВОЛН СДВИГА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ.....	230

4.5. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в однослойных и двухслойных волноводах.	233
4.6. Нечеткие оценки для фазовых скоростей нормальных упругих волн в прямоугольных волноводах с мембранными покрытиями и проскальзывающими закреплениями граней.	241
4.7. Нечетко-множественный анализ факторов неопределенности в моделях функционирования пористых и перфорированных гидроакустических экранов.	253
4.8. Нечеткие модели трансформационного взаимодействия гидроакустических волн с плоскими гидроакустическими экранами.	261
4.9. Выводы по разделу 4.	278

РАЗДЕЛ 5. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН, ПАНЕЛЕЙ И ЦИЛИНДРОВ 281

5.1. Алгоритм учета факторов неопределенности экзогенных параметров в модели колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин.	281
5.2. Нечетко-множественный анализ факторов неопределенности при исследовании модели собственных колебаний цилиндрических трехслойных композитных панелей.	286
5.3. Нечетко-множественный метод учета неопределенности экзогенных параметров в модели собственных колебаний предварительно напряженных прямоугольных пластин.	292
5.4. Нечеткая идентификация механических характеристик тонких изотропных плит на основе резонансно-волновой методики.	295
5.5. Модель нечеткой идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики.	301
5.6. Выводы по разделу 5.	307

РАЗДЕЛ 6. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛЯХ РАССЕЯНИЯ ОХЛАЖДАЮЩИХ ЖИДКОСТЕЙ, ГАЗОЖИДКОСТНОЙ ТЕРМОСТАБИЛИЗАЦИИ И ТЕПЛОВОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ 309

6.1. Оценивание характеристик функционирования центробежных и центробежно-струйных форсунок с применением нечетко-множественного анализа.	310
--	-----

6.2. УЧЕТ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЭКЗОГЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ РАСПАДА СТРУИ ЖИДКОСТИ В ПНЕВМАТИЧЕСКИХ И ДИСКОВИДНЫХ РАСПЫЛИТЕЛЯХ	332
6.3. НЕЧЕТКИЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТОВ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ТЕЧЕНИИ ДВУХФАЗНЫХ ПОТОКОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ КАНАЛАХ И ПРОДОЛЬНОМ ОБТЕКАНИИ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....	352
6.4. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕПЛООБМЕНА ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ПОТОКА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ СТЕНКОЙ ПРИ УЧЕТЕ ВДУВАНИЯ ГАЗА-ОХЛАДИТЕЛЯ.....	357
6.5. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ПОДХОДЫ К УЧЕТУ ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В РАСЧЕТАХ ТЕПЛОВЫХ ЭКРАНОВ С ТЕПЛООТРАЖАЮЩИМИ И ТЕПЛОИЗОЛИРУЮЩИМИ СЛОЯМИ	369
6.6. ВЫВОДЫ ПО РАЗДЕЛУ 6	377
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	380
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	385
ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	425
ПРИЛОЖЕНИЕ В.....	432

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Математические модели деформационных и термических процессов относятся к числу едва ли не самых распространенных классов математических моделей, рассматриваемых в технических и естественных науках. Их разработка и численно-аналитическое теоретическое исследование имеют глобальное значение для технологической сферы развития производительных сил и подчинены самому широкому кругу проблем, связанных, в первую очередь, с определением характеристик прочности, надежности, долговечности и эксплуатационной технологичности агрегатов и конструктивных элементов машин, приборов, строительных сооружений, подземных объектов горнодобывающих отраслей, а также с обеспечением режимов термостабилизации во множестве технологических и эксплуатационных процессов. Модели данного типа во все более расширяющейся мере востребованы проектно-конструкторскими и технологическими разработками в таких новейших высокотехнологичных научно-промышленных отраслях, как создание аэрокосмической техники, термоядерная энергетика, акустоэлектроника, гео- и гидроакустика, ультразвуковая дефектоскопия, аддитивные технологии создания промышленных материалов и конструкций.

Соответственно, направлениями развития исследований в области синтеза и анализа инновационных математических моделей указанного типа, является более эффективный учет комплекса моделируемых факторов, совершенствование математических методов и алгоритмов изучения моделей, а также создание программных приложений для компьютерной реализации создаваемых алгоритмов. При этом, одним из ключевых заданий в совершенствовании приемов формализации и методов исследования моделей деформационных и термических процессов является учет влияния в рассматриваемых моделях факторов неопределенности различной природы, неизбежно сопутствующих математическому описанию реальности, в частности, учет разбросов в экспериментальных данных о замерах величин экзогенных физико-механических

и геометрических параметров моделей, имеющих разбросов для значений исходных расчетных параметров в пределах технологических допусков, учет погрешности при интерпретации и усреднении результатов экспериментов по идентификации экзогенных параметров.

Преимущественно используемым в этом случае подходом к настоящему времени является применение методов вероятностного стохастического анализа. Достаточно обширный круг детерминированных математических моделей деформационных и термических процессов имеют вероятностно-стохастические обобщения, однако для доминирующего числа классов соответствующих задач подобные обобщения на данном этапе развития указанных методов не построены. Наряду со сложностью разработки, практическое применение и алгоритмическая реализация вероятностно-стохастических версий рассматриваемых моделей также сопряжены с потребностью в оперировании исходной информацией, отвечающей требованиям корректной статистической природы, прежде всего получению ее на основе обработки однородных экспериментальных частотных выборок достаточной мощности. При моделировании неопределенных параметров вероятностные методы предполагают также априорное задание законов распределения результатов, что является условным допущением и влияет на точность получаемых оценок, а, следовательно, на степень соответствия используемых моделей реальным объектам. Как следствие, состояние разработок в области применения вероятностного статистического подхода для анализа факторов неопределенности в моделях рассматриваемого типа существенно отстает от реальных прикладных запросов соответствующих научно-технических отраслей.

В этой связи, представляет независимый интерес развитие иных концептуальных подходов к учету факторов неопределенности в математических моделях деформационных и термических процессов с дополнительными возможностями и расширенными перспективами применения этих подходов к различным новым классам рассматриваемых моделей, а также с менее строгими требованиями к характеру исходной информации, включая возможности

использования данных, полученных на основе субъективных экспертных заключений. Такие возможности для учета факторов неопределенности значений исходных параметров в математических моделях деформационных и термических процессов могут быть связаны с применением методов теории нечетких множеств, как на этапе формализации неконтрастных исходных данных, так и в процессе оперирования с соответствующей неопределенной информацией вплоть до получения оценок для разбросов эндогенных параметров исследуемых моделей. Правомерность подобной оценки относительно перспектив применения нечетко-множественных подходов в рассматриваемых типах математических моделях подтверждается опытом их использования при анализе различных аспектов функционирования технических систем.

Таким образом, разработка методов применения аппарата теории нечетких множеств для исследования факторов неопределенности при анализе широкого круга математических моделей деформационных и тепловых процессов представляет собой современную актуальную научно-техническую проблему, решение которой позволит увеличить достоверность прогнозов прочности и надежности, получить более корректные оценки требуемых запасов прочности, надежности, показателей технологического ресурса и материалоемкости для самого широкого круга конструкций машин приборов и сооружений, увеличить достоверность прогнозного определения параметров технологических режимов термостабилизации для множества технических систем. Решение комплекса указанных заданий имеет важное социально-экономическое и хозяйственное значение и призвано внести значительный вклад в научно-техническое развитие государства.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Представленные в работе исследования связаны с тематикой конкурсных исследовательских проектов: «Волны деформаций в анизотропных телах с локализованными участками неоднородности геометрических и физико-механических свойств» (МОНУ, МОН ДНР, номер государственной регистрации 0113U001529, 2013-2016 гг.); «Математическое моделирование прочностных и

волноводных свойств деформируемых элементов конструкций и геоструктур с усложненными физико-механическими свойствами» (МОН ДНР, номер государственной регистрации 0117D000071, 2017-2019 гг.); «Методы исследования линейных и нелинейных моделей статического и динамического деформирования анизотропных функционально-градиентных упругих тел» (МОН ДНР, номер государственной регистрации 0120D000014, 2020-2022 гг.). Ведущие результаты диссертационной работы включены в отчеты по указанным НИР.

Степень разработанности темы исследования. В контексте общей проблемы учета факторов неопределенности в расчетных математических моделях технических систем, реализация концепции применения методов вероятностного стохастического анализа применительно к моделям деформационных и термических процессов представлена в цикле исследований, выполненных в период с пятидесятих годов минувшего столетия до сегодняшнего дня. Их основные результаты при исследовании моделей деформирования упругих тел, вопросов деформационной прочности и надежности элементов конструкций машин и строительных сооружений отражены в работах А.Н. Бадаева, Б.С. Берковского, В.В. Болотина, С.Д. Волкова, А. Исимару, А.А. Каминского, И.А. Кунина, Б.В. Ларина, В.А. Ломакина, В.Ф. Муцанова, В.А. Пальмова, Н.Н. Попова, Л.П. Хорошуна, Т.Д. Шермергора, М. Ostoja-Starzewski, S.Torquato, P. Wriggers, I.I. Zohdi, а также ряда других исследователей. Полученные в этом направлении результаты прежде всего касаются вопросов учета в рассматриваемых моделях режимов случайных внешних воздействий, включая вопросы надежности и расчета на прочность деформируемых упругих тел при действии случайных сил; учета стохастической неоднородности свойств конструкционных материалов; деформирования упругих тел со случайными неровностями поверхности; интерпретации физико-механических свойств структурированных микронеоднородных деформируемых сред; деформирования упругих тел со случайными неоднородностями; деформирования упругих тел с быстро осциллирующими упругими свойствами. Однако тематический спектр реализованных при этом разработок в силу

указанных выше причин на данный момент в недостаточной мере охватывает как актуальные запросы практики предпроектного конструкторского моделирования, так и ведущие направления перспективных фундаментальных исследований.

Применение методов теории нечетких множеств, нечетких вычислений, нечеткой логики в технических науках и инженерных исследованиях моделей деформационных и термических процессов, как самостоятельное научное направление в исследовании влияния факторов неопределенности в моделируемых процессах, получило свое развитие преимущественно в течение двух последних десятилетий.

Ключевые моменты применения аппарата теории нечеткой математики в исследованиях моделей технических систем отражены в работах А.Е. Алтунина, М.В Семухина; А.Е. Алтунина, М.В Семухина, О.Н. Кузякова; Д. Дюбуа, А. Прада; Н.В. Дилигенского, Л.Г. Дымовой, П.В. Севастьянова; G.A. Anastassiou; A.I. Van, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski; B. Bede; U. Gabbert, H. S. Tzou; P. Grzegorzewski, E. Mr'owka; M. Hanss; J. Harris; W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral; A. Kaufmann, M. Gupta; G. Klir; M. Mizumoto, K. Tanaka; B. Möller, M. Beer; A.H. Sonbol, M.S. Fadali; L.V. Vanegas, A.W. Labib; Z. Zabokrtsky. К числу исследований, в которых, так или иначе, затрагиваются вопросы применения теории нечетких множеств к математическим моделям механики деформируемых сред, моделям прочности и надежности материалов, элементов конструкций машин и строительных и сооружений относятся работы Y. Bao, C. Chen, L.W. Kong, Z. Liu A. Skrzat, S. Sture, Q.Q. Wang, M. Wójcik, C. Zhang, в которых представлены разработка общей модели нечеткой пластичности, численное моделирование циклической подвижности на основе концепции нечетко-множественной теории пластичности, использование нечеткой математики при определении параметров упрочнения материала модели Хейера, вопросы идентификации параметров комбинированной изотропно-кинематической модели упрочнения Шабоса – Леметра с помощью нечеткой логики, анализ упругопластической модели циклического поведения рыхлого песка; работы S. Akkurt, M.F.M. Amin, D.J. Armaghani, A.A. Asrari, M. Ataеepour,

C.D. Atiş, H. Basarir, B.Y. Bejarbaneh, H. Bejari, H. Bin, S. Can, F. Demir, M. Elchalakani, A. Fahimifar, A. Fourie, S. Jeon, J.K. Hamidi, O. Karahan, A. Karrech, J. Kim, H. Lee, M.Z.A. Majid, F. Özcan, B. Rezai, K. Shahriar, A. Skrzat, H. Tanyildizi, G. Tayfur, E. Uncuoğlu, M. Wójcik, посвященные вопросам нечетко-множественного прогнозирования деформационных и прочностных параметров строительных материалов, прежде всего бетонов, а также и горных пород. В публикациях Н.Л. Галаевой изложены отдельные вопросы нечетко-множественного прогнозирования деформационных и прочностных параметров металлических конструкций. Применение нечетко-множественного моделирования и методов нечеткой логики в деформационных моделях функционирования пьезоэлектрических компонентов и устройств представлено в работах S. Adhikari, S.F. Ali, D.A. Barton, G.A. Drosopoulos, V.R. Franco, M.I. Friswell, G.A. Foutsitzi, P. Koutsianitis, Y. Li, G. Litak, B.P. Mann, B.A. Owens, G.E. Stavroulakis, G.K. Tairidis, P.S. Varoto, S. Zhou. Синтез и анализ нечетких моделей термического деформирования и надежности железобетонных и композитных плит изложен в работах N. Arsian, M. Bilgehan, M. Huseyinoglu, A.E. Kurtoğlu, T. Ozben. Методика нечетко-множественного конечно-элементного моделирования охарактеризована в исследованиях I. Caylak, A. Dridger, R.A. Mahnken. Отдельные вопросы исследования факторов теплопроводности нечеткими численными методами в условиях неопределенности применительно к технологическим моделям термической подготовки дисперсного фосфатного сырья представлены в работе В.И. Бобкова, В.В.Борисова, М.И. Дли.

Таким образом, методы теории нечетких множеств, как инструмент учета факторов неопределенности в прикладном математическом моделировании, имеют расширяющийся круг эффективных применений в технологических моделях деформационных и термических процессов. Однако, вместе с тем, реализованные на данный момент исследования не охватывают актуальные аспекты проблемы учета факторов разброса исходных параметров в моделях расчета характеристик резонансных колебаний, параметров скоростей волн деформаций и критических усилий в задачах динамического деформирования и

устойчивости стержневых конструкций, тонких пластин и оболочек; в моделях формирования полей концентрации напряжений и зон пластических деформаций около полостей, отверстий и включений в пластинах и геомассивах; в моделях распространения, дисперсии и трансформации объемных, поверхностных и нормальных упругих волн; в моделях резонансно-волновой идентификации физико-механических и геометрических параметров упругих пластин, панелей и цилиндров; в моделях и расчета параметров гидроакустических экранов; в моделях формирования газо-жидкостных аэрозольных потоков для технических систем охлаждения с применением форсуночных устройств, пневматических и ротационных распылителей; в моделях теплообмена мелкодисперсных двухкомпонентных газопаровых смесей в охлаждающих потоках при обтекании разогретых плоских и цилиндрических поверхностей; в моделях экранирования тепловых излучений многослойными конструкциями из пакетов теплоотражающих и теплоизолирующих слоев и ряде других моделей из рассматриваемой предметной области. Задачу развития методов нечетко-множественного моделирования и реализации перспективных исследований в области разработки алгоритмов учета факторов неопределенности в моделях прочностных и термических предпроектных расчетов для широкого круга технических систем решают исследования, осуществляемые в настоящей диссертационной работе.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является развитие теоретических основ нечетко-множественных численно-аналитических методов и разработка алгоритмов исследования математических моделей деформационных и тепловых процессов с учетом факторов неопределенности экзогенных параметров как инструмента повышения эффективности проектных конструкторских расчетов для ряда промышленных отраслей и современных высокотехнологичных производств.

Для достижения цели поставлены и решены следующие основные задачи:

– разработана концепция теоретического анализа моделей деформационных и термических процессов с неконтрастными, обладающими разбросами значений физико-механическим и геометрическими параметрами на основе развития методов расширения областей определения расчетных соотношений детерминистических версий соответствующих моделей на аргументы различных нечетко-множественных типов с фрагментированным поэтапным применением аппарата нечетких вычислений и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения;

– осуществлена разработка и алгоритмическая реализация нечетко-множественных методов исследования моделей устойчивости, динамического и статического деформирования в рамках классических и уточненных теорий для тонкостенных конструкций стержневого, пластинчатого и оболочечного типов с неопределенными экзогенными параметрами;

– созданы нечетко-множественные модификации и алгоритмы компьютерной реализации методов учета неопределенности исходных параметров в задачах формирования полей концентрации напряжений и зон пластических деформаций около полостей, отверстий и включений в геомассивах и конструкционных элементах в виде тонких плит и пластин;

– даны развитие и программная компьютерная реализация методов теории нечетких множеств применительно к исследованию прямых и обратных задач моделирования резонансных упругих колебаний упругих пластин, панелей и цилиндров с неконтрастными экзогенными характеристиками;

– осуществлена разработка и алгоритмическая реализация специализированных нечетко-множественных методов учета факторов неопределенности в моделях теории распространения и рассеяния объемных, поверхностных и нормальных волн деформаций в конструкциях из упругих, электроупругих и магнитоупругих материалов;

– предложены и алгоритмически реализованы нечетко-множественные модификации методов расчета и резонансно-волновой идентификации неконтрастных физико-механических свойств анизотропных композиционных и кристаллических конструкционных материалов, многокомпонентных деформируемых сред;

– разработаны и реализованы в программных приложениях нечетко-множественные методы расчета параметров гидроакустических экранов из компонентов с неконтрастными физико-механическими и геометрическими свойствами;

– выполнено сопоставление методик и результатов применения к частным моделям рассматриваемого типа математического аппарата нечетко-множественного и вероятностно-стохастического анализа эффектов разбросов в значениях экзогенных расчетных параметров;

– осуществлены систематизация и обобщение результатов нечетко-множественного исследования рассматриваемых классов математических моделей.

Объектом исследования являются деформационные и термические процессы в конструкциях проектируемых и эксплуатируемых технических систем

Предметом исследования являются эффекты влияния неопределенности, связанной с наличием разбросов в значениях физико-механических и геометрических экзогенных параметров расчетных математических моделей деформационных и тепловых процессов в конструкциях и устройствах технических систем, на эндогенные характеристики указанных моделей

На защиту выносятся следующие научные положения и результаты диссертационной работы:

1 Получение уточненных оценок для ресурсов прочности, надежности и долговечности конструкционных элементов технических систем с учетом факторов потери устойчивости, резонансных колебаний и волнового деформирования на основе предпроектного математического моделирования в ситуациях описания разбросов исходных физико-механических характеристик

маломощными частотными выборками экспериментальных данных и субъективными экспертными оценками эффективно реализуется алгоритмизированными методами теории нечетких множеств путем фаззификации неопределенных исходных параметров и расширения областей определения расчетных соотношений детерминистических версий соответствующих моделей на аргументы нечетко-множественного типа с фрагментированным поэтапным применением аппарата нечеткой арифметики и модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа обобщения.

2. В предпроектных расчетах с использованием аналитических математических моделей описания полей концентрации механических напряжений и формирования зон пластических деформаций около отверстий и включений в пластинах и плитах, около туннельных полостей в геомассивах, повышение адекватности оценок для запасов прочности и показателей надежности при учете разбросов в значениях экзогенных физико-механических и геометрических параметров моделей может достигаться на основе методики, включающей этапы фаззификации неопределенной исходной информации, применения эвристического принципа обобщения и алгоритмов его численной реализации с получением эндогенных параметров в нечетко-множественной форме, отражающей диапазоны показателей уверенности в достижении этими параметрами значений из интервалов носителей определяемых множеств.

3. Реализованное в диссертации применение методов теории нечетких множеств для анализа обратных задач динамического деформирования тонкостенных конструктивных элементов технических устройств и подземных горно-шахтных сооружений, является эффективным инструментом решения проблемы резонансно-волновой идентификации их физико-механических и геометрических параметров по обладающим разбросами данным ультразвуковой диагностики, и позволяет на основе фаззификации экспериментальных диагностических данных и использования алгоритмически реализованной модифицированной альфа-уровневой формы эвристического

принципа обобщения получать для идентифицируемых параметров описания в виде нечетких величин с устанавливаемыми функциями принадлежности.

4. В математических моделях теплового экранирования и функционирования устройств распыления охлаждающих жидкостей в технических системах термостабилизации для конструктивных параметров данных устройств с технологическими и эксплуатационными допусками, обладающих разбросами опытных и экспертных данных о характеристиках конструкционных материалов, жидкостей и газов, при введении описаний их неопределенных свойств трапецеидальными нечетким интервалами и треугольными нечеткими числами, проектные оценки неконтрастных эндогенных параметров конструкций экранов и характеристик факелов, скоростей и показателей дисперсности аэрозольных потоков эффективно описываются нечетко-множественными величинами в форме суперпозиций альфа-срезов.

Научная новизна работы в контексте представленных целей заключается в следующем:

1. Впервые разработаны специализированные методы нечетко-множественного исследования моделей резонансных колебаний, распространения волн деформаций и потери устойчивости для тонкостенных стержневых, пластинчатых и оболочечных конструкций с неопределенными параметрами и созданы вычислительные алгоритмы получения оценок для разбросов их эндогенных характеристик, что позволяет повысить достоверность предпроектных конструкторских расчетов по определению ресурсов прочности, надежности и функциональности конструкционных элементов данного типа в машинах, приборах и строительных сооружениях.

2. Впервые на основе разработки специализированных нечетко-множественных методов и алгоритмов их компьютерной реализации осуществлен анализ моделей концентрации напряжений и возникновения зон пластических деформаций около полостей, отверстий и включений в пластинчатых конструкциях и геомассивах с учетом факторов разброса исходных физико-механических и геометрических параметров, что позволяет дополнить

методологии конструирования многосвязных строительных деталей, корпусов и несущих конструкций машин и агрегатов, приборных панелей и многослойных печатных плат электронных устройств, объектов аэрокосмической техники, а также методологии проектирования горных сооружений с выработками и транспортными туннелями, более адекватными усовершенствованными инструментами и обоснованными рекомендациями по выбору рабочих параметров, обеспечивающих требования к надежности и механической прочности указанных конструкций и сооружений

3. Впервые предложены и реализованы специализированные методы нечетко-множественного исследования моделей распространения, дисперсии и трансформации объемных, поверхностных и нормальных волн упругих, электроупругих и магнитоупругих деформаций при учете разбросов значений экзогенных параметров моделирования, что решает задачу повышения уровня корректности и практической ценности оценок сейсמודинамических и геоакустических прогнозов и измерений, является средством повышения точности конструкторских расчетов для акустоэлектронных радиокомпонентов в виде линий задержки и фильтров на поверхностных акустических волнах, адекватности оценок вибрационной прочности балочных конструкций в машинах, строительных и горно-шахтных сооружениях.

4. Впервые осуществлены разработка, теоретический анализ и алгоритмическая реализация моделей нечетко-множественной резонансно-волновой идентификации неконтрастных механических характеристик тонких изотропных плит и нечетко-множественной идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин-резонаторов с использованием данных ультразвуковой диагностики, что в качестве элемента методики обработки экспериментальных данных ультразвуковой диагностики комплекса параметров материалов и элементов конструкций технических систем обеспечивает повышение степени соответствия результатов ультразвуковой волновой идентификации их геометрических и физико-механических характеристик реальным свойствам объектов исследования.

5. Впервые предложены адаптированные нечетко-множественные методы анализа моделей функционирования и алгоритмы расчета параметров систем гидроакустического экранирования при учете неопределенности исходных данных о физико-механических и геометрических параметрах их компонентов, что позволяет при конструировании плоских однослойных и многослойных гидроакустических экранов и выборе материалов для их изготовления добиваться необходимой степени стабильности для определяющих рабочие параметры экранов показателей интенсивности отраженных и генерируемых в заэкранном пространстве волновых сигналов.

6. Впервые реализована разработка нечетко-множественных методов анализа моделей формирования охлаждающих аэрозольных потоков форсуночными устройствами, пневматическими и ротационными распылителями при учете неопределенности в значениях конструктивных характеристик устройств распыления и параметров рассеиваемой жидкости, благодаря чему обеспечивается совершенствование технологических режимов термостабилизации с применением двухкомпонентных газожидкостных смесей в технических системах широкого спектра назначения, включая оптимизацию расхода реагентов и определение допустимой меры обуславливаемых износом изменений в конструктивных параметрах форсунок, пневматических и дисковых распылителей.

7. Впервые предложены нечетко-множественные методы исследования факторов неопределенности в моделях теплообмена при течении газожидкостных двухфазных потоков в высокотемпературных цилиндрических каналах и при обтекании высокотемпературных поверхностей двухфазными газожидкостными потоками а также нечетко-множественные методы исследования моделей теплообмена обтекающего пульсирующего потока с вибрирующей высокотемпературной пористой стенкой с учетом вдувания охлаждающего газа, применение которых позволяет формировать более адекватные инженерной практике рекомендации по выбору режимов охлаждения аэрозольными и

газовыми потоками, требуемым параметрам дисперсности жидкостной фракции, скоростям обтекания.

8. Впервые разработаны методы и алгоритмы нечетко-множественного анализа расчетных моделей многослойных тепловых экранов с неопределенными конструктивными характеристиками отражающих элементов, применение которых позволяет получить более адекватные реальным эксплуатационным условиям параметры термического экранирования тепловых излучений в технических системах с применением пакетов тонких мембранных отражателей, применение которых позволяет получить адекватные реальным эксплуатационным условиям параметры термического экранирования тепловых излучений в технических системах широкого спектра назначения

Методы исследования. В реализуемых исследованиях применяются строгие апробированные методы теории нечетких множеств, включая методы фаззификации и нечетко-множественной интерпретации экзогенных параметров моделей с разбросами значений, приемы расширения областей определения функциональных соотношений детерминистических версий прикладных моделей деформационных и термических процессов на аргументы нечетко-множественных типов в рамках применений модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения; апробированные математические методы алгебры, теории дифференциальных уравнений и уравнений математической физики; методы разработки прикладных программных приложений в среде Mathematica Wolfram Research.

Достоверность полученных в диссертации результатов, сформулированных положений и выводов подтверждается: анализом опубликованных исследований в предметной области работы; использованием в исследованиях результатов анализа апробированных детерминистических версий моделей деформационных и термических процессов; корректным использованием в качестве методологической базы исследования строгих обоснованных математических методов, включая апробированные методы теории нечетких множеств; согласованностью отдельных получаемых результатов с представленными в

научной литературе частными результатами других исследований, осуществленных на базе детерминистических и вероятностных моделей, а также с опытными экспериментальными данными; верификацией разрабатываемых теоретических нечетко-множественных алгоритмов и создаваемых для их компьютерной реализации программных приложений; соответствием между полученными научными результатами и отраженными в документах по внедрению данными об их практическом использовании.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в создании эффективных версий специализированных численно-аналитических нечетко-множественных методов для решения новых классов задач моделирования деформационных и термических процессов с учетом факторов неопределенности экзогенных параметров, что отвечает логике внутринаучного развития фундаментальных исследований в области теории математического моделирования.

Практическое значение результатов работы заключается в применимости разработанных методов, алгоритмов и программных приложений, полученных выводов и установленных закономерностей, для повышения достоверности данных предпроектных конструкторских расчетов по определению ресурсов прочности, надежности и функциональности конструктивных элементов машин, приборов и строительных сооружений, а также достижения большей адекватности расчетов технологических режимов и конструктивных параметров устройств термостабилизации в условиях недостатка статистической информации при ограниченности выборок опытных данных. Полученные результаты могут быть использованы в конструкторских расчетах деталей строительных сооружений, корпусов и несущих конструкций машин и агрегатов, приборных панелей и многослойных печатных плат электронных устройств, объектов аэрокосмической техники, а также при проектировании горных сооружений с выработками и транспортными туннелями. Они позволяют решить задачу повышения уровня корректности и практической ценности оценок сейсמודинамических и геоакустических прогнозов и измерений, являются средством повышения

8точности конструкторских расчетов для акустоэлектронных радиокомпонентов в виде линий задержки и фильтров на поверхностных акустических волнах, обеспечивают повышение степени соответствия результатов ультразвуковой волновой диагностики комплекса геометрических и физико-механических характеристик материалов и элементов конструкций реальным свойствам объектов исследования. Результаты работы, в частности нечетко-множественные оценки в моделях теории ультразвуковых волн деформаций в пьезоактивных средах; нечетко-множественные оценки для скоростей электроупругих поверхностных волн сдвигового типа; нечетко-множественные оценки для характеристик нормальных ультразвуковых волн в однослойных и двухслойных волноводах; методики анализа моделей нечеткой идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных резонаторов и пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики; нечетко-множественные подходы к учету факторов неопределенности в расчетах тепловых экранов с теплоотражающими и теплоизолирующими слоями получили практическое применение в поисковых и проектных разработках Ордена Трудового Красного Знамени АО «Научно-исследовательский институт вычислительных комплексов им. М.А. Карцева», г. Москва (справка о внедрении № 404–01 от 23.11.2021 г., подписана генеральным директором АО» НИИВК им. М.А. Карцева» А.В. Горшковым); получили практическое применение в проектных разработках Государственного учреждения «Республиканский академический научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ)» МОН ДНР (г. Донецк) в качестве инструментов повышения достоверности данных о строении и свойствах геомассивов, горных пород и подземных горно-шахтных сооружений на основе технологий анализа результатов сейсмоакустических исследований и шахтной пластовой сейсמודиагностики (справка о внедрении № 04.02–07/381 от 19.12.2021 г., подписана директором ГУ РАНИМИ д.т.н., проф. А.В. Анциферовым). Результаты диссертационного исследования внедрены в учебный процесс по

направлению подготовки 27.03.03 «Системный анализ и управление» в ГОУ ВПО ДонНУ (справка о внедрении № 6877/01-27/01.1 от 15.11.2021 г., подписана проректором по научно-методической и учебной работе ГОУ ВПО ДонНУ проф. Е.И. Скафой). Копии документов, подтверждающих практическое использование полученных в работе результатов, представлены в Приложении А к диссертации.

Апробация результатов работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались на ряде научных и научно-технических конференций, семинаров и совещаний, в том числе на: III, IV, VI, VII, IX Международных научно-практических интернет-конференциях «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты» (Донецк, ДонНУЭТ: 20 мая 2014 г., 25 мая 2015 г., 26 мая 2017 г., 25 мая 2018 г., 29 мая 2020 г.); X, XI, XII, XIII, XIV Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (пос. Дивноморское, ЮФУ: 25–30 мая 2015 г., 23–27 мая 2016 г., 29 мая–3 июня 2017 г., 28 мая–1 июня 2018 г., 27–31 мая 2019 г.); International scientific school «Paradigma» (Summer-2015, Varna, Bulgaria); 6 и 7 Научно-методических конференциях «Обучение математике в техническом университете» (Донецк, ДонНТУ: 4-5 июня 2015 г., 1-2 июня 2017г.); XVIII Международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, ЮФУ, 7–10 ноября 2016 г.); 5-th International Conference «Nonlinear Dynamics–2016» (Kharkov, National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al., September 27-30, 2016); Международной научно-методической конференции «История и методология науки», посвященной 100-летию со дня рождения А.И. Бородина (Донецк, ДонНУ, 2016); Международной научной конференции студентов и молодых ученых, «Донецкие чтения 2017» (Донецк, ДонНУ, 17-20 октября 2017 г.); I, III, IV, V, VI Международных научных конференциях «Донецкие чтения: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (Донецк, ДонНУ, 16-18 мая 2016 г., 25 октября 2018 г.; 31 октября 2019 г., 18 ноября 2020 г., 26-27 октября 2021 г.); International Scientific Workshop «Advanced technologies in material science, mechanical and automation engineering». MIP: Engineering – 2019

within the framework of XXIV International Scientific and Research Open Conference «Modern Informatization Problems» (Yelm, WA, USA, 2019); II International Conference «MIP: Engineering-2020: modernization, innovations, progress: advanced technologies in material science, mechanical and automation engineering» (Krasnoyarsk, Russian Federation, April 16–18, 2020); II & III International Scientific Conference on Applied Physics, Information Technologies and Engineering, (Krasnoyarsk, Russian Federation, 25 September – 4 October 2020, 24 September – 3 October 2021); IX Международном научном симпозиуме «Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела» (Тверь, 15-17 декабря 2020 г.), а также на научно-технических семинарах в ГОУ ВПО ДонНАСА, (г. Макеевка, 2017-2021 гг.); ГОУ ВПО ДонНТУ (г.Донецк, 2021 г.); ГОУ ВПО ДонНУ (г. Донецк, 2021 г.); ГУ РАНМИ (г.Донецк, 2021 г.).

Публикации. Основные результаты работы представлены в 44 научных публикациях, в числе которых 13 статей в научно-технических журналах, включенных в перечни ВАК ДНР и ВАК РФ [30, 31, 35, 37, 38, 40, 41, 47, 187, 223, 224, 226, 246]; 14 статей в изданиях, представленных в НБД Web of Science, Scopus, MathSciNet [32, 39, 67, 162, 229, 293, 340–346, 351]; 1 монография [174], а также 16 статей в других периодических изданиях [48, 73, 176, 183–186, 191, 235, 244, 247–250, 338, 339]. Исследования по теме диссертации отражены также в работах автора [26, 29, 33–34, 36, 42–46, 49–50, 74, 93, 163, 168, 177–178, 188–190, 197–200, 225, 227–228, 230–234, 236–243, 245, 292, 352].

Соответствие темы и содержания диссертации паспорту научной специальности. Полученные результаты, положения и выводы диссертации отвечают позициям Паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки), в том числе областям исследований п.1 «Разработка новых математических моделей и методов компьютерного моделирования явлений, объектов, систем и процессов», п.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-

ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов», п.5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современных технологий математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 6 разделов, заключения, списка литературы из 356 наименований и двух приложений. Работа содержит 12 таблиц, 268 рисунков. Общий объем диссертационной работы составляет 444 страницы.

РАЗДЕЛ 1. АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ, ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ЗАДАНИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ПРОБЛЕМАМ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ДЕФОРМАЦИОННЫХ И ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Характеристика подходов к учету факторов неопределенности в исследованиях по техническим и естественным наукам

Крайне актуальной современной задачей в прикладном математическом моделировании является корректный и последовательный учет неопределенностей различной природы в информационной среде моделирования, неизбежно сопутствующих математическому описанию реальности. Учет факторов неопределенности в математических моделях процессов реального мира является одним из ключевых концептуальных критериев при оценивании эффективности самих подходов теории математического моделирования. Одному из виднейших ученых нового времени Альберту Эйнштейну принадлежит высказывание «Пока законы математики относятся к реальности, они неопределенны, и в той мере, в которой они обладают определенностью, они не относятся к реальности...». Поэтому проблема учета факторов неопределенности является сегодня, и будет, в обозримой перспективе, оставаться актуальной составляющей в глобальном развитии методов синтеза и анализа прикладных математических моделей [1–3, 6, 24, 54, 57, 87, 103, 124–130, 141, 150, 182, 195 203, 207–209, 287, 311, 313–318, 320, 328].

Неопределенность интерпретируется как неполнота и неточность информации об условиях и результатах моделируемого процесса; она предполагает наличие факторов, при которых результаты моделирования не являются детерминированными, а степень возможного влияния этих факторов на результаты неизвестна. К основным источникам неопределенности для рассматриваемых предметных областей математического моделирования относят отсутствие информации, избыток информации, конфликтующие утверждения, неоднозначность, погрешности измерения, недоверие. Инструменты

моделирования должны обеспечивать возможности представления, обработки и интерпретации различных видов неопределенностей.

Можно выделить три основных этапа, необходимых для анализа неопределенностей в моделях рассматриваемых классов: введение формализованных описаний неопределенностей, оперирование неопределенными данными в расчетах, интерпретация полученных результатов.

Среди методов, позволяющих давать описание и выполнять оперирование неопределенностями в математических моделях из рассматриваемых научно-технических отраслей, в качестве ведущих можно выделить методы, основанные на применении аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики [52, 53, 66, 94, 115, 118, 143, 148, 149, 153, 158, 169, 172, 196, 201–203, 267, 333, 335], а также методы, базирующиеся на использовании аппарата теории нечетких множеств [3–6, 57, 69, 103, 117, 137, 170, 171, 181, 207–209, 262, 265, 284, 287, 311, 312], в силу чего, важную принципиальную роль играют методологические вопросы взаимосвязи и разграничения атрибутов нечеткости, возможности и вероятности [109, 203].

Трактовка неопределенности в терминах аддитивных вероятностей получила широкое распространение благодаря ее эффективному использованию в физике. В работах [103, 109, 203, 356] охарактеризована эволюция терминологии, используемой для описания неопределенностей в терминах теории вероятностей и случайных процессов. Вероятностные аналоги и стохастические обобщения со специфическими условиями применения и особенностями интерпретации получаемых результатов имеет на данный момент весьма обширный ряд детерминированных прикладных моделей технологических процессов.

Прежде всего, возможности эффективного применения вероятностных подходов связаны с оперированием большими по объему частотными выборками статистической информации, формируемой однородными случайными явлениями [52, 103, 149, 153, 169, 201–203, 267]. На этапе формализации и представления неопределенностей, применение методов вероятностно-стохастического анализа предусматривает некоторые достаточно строгие требования к характеру исходной

количественной информации относительно ее корректной статистической природы, – в частности, требование получения ее на основе обработки однородных частотных выборок достаточно большой мощности с отнесением форм подлежащих учету частотных распределений к одной из классифицируемых в теории вероятностей стандартных форм. Также, в большинстве случаев исследуются модели с экзогенными случайными параметрами, имеющими симметричное нормальное гауссово распределение. Оперирование неопределенностями вероятностно-статистического типа в расчетах реализуется не на основе прямого использования частотных распределений, а на основе процедур их предварительного усреднения с переходом к характеристикам в виде математического ожидания, дисперсии, медианы, моды, моментов различных порядков, что влечет определенные потери и искажения исходной статистической информации. Отсутствие описаний арифметических операций для параметров, непосредственно заданных частотными распределениями, затрудняет построение практически полезной арифметики для прямого оперирования с такого рода неопределенными данными. Кроме того, играет роль и то обстоятельство, что для несимметричных распределений вероятностей математическое ожидание случайной величины не является ее наиболее вероятным значением. В силу этого математическое ожидание для таких случаев не является семантически корректным термином, что относится также и вопросам интерпретации среднеквадратических отклонений [103].

Элементом применения вероятностных методов является, помимо прочего, и заведомый выбор типа распределения для результирующих параметров, что является весьма условной гипотезой и соответствующим образом влияет на адекватность получаемых результатов, меру соответствия между используемой моделью и реальным объектом [103, 109, 203].

При всех перечисленных особенностях, применение методов вероятностно-стохастического анализа для анализа широкого круга математических моделей естественнонаучной и технической природы приводит к в достаточной степени верифицированным результатам, и на данный момент может рассматриваться как

основной практикуемый подход к изучению моделей данного типа с учетом факторов неопределенности [52, 53, 66, 94, 115, 118, 143, 148, 149, 153, 158, 169, 172, 196, 201–203, 267, 333, 335].

Вместе с тем, представляет интерес развитие иных концептуальных подходов к учету факторов неопределенности в исследованиях по техническим и естественным наукам с дополнительными возможностями в охвате особенностей моделируемых процессов и расширением практики применения для анализа различных новых классов рассматриваемых моделей. К числу таких подходов, прежде всего, относится использование методов теории нечетких множеств (нечеткой математики, нечеткой логики) [3–6, 57, 69, 103, 117, 137, 170, 171, 181, 207–209, 262, 265, 284, 287, 311, 312]. Особенности применения данного подхода на этапе представления неопределенностей, формализации (фаззификации) неконтрастных исходных данных являются, помимо прочего, возможности использования данных, получаемых на основе обработки маломощных неоднородных частотных выборок, данных субъективных экспертных заключений о диапазонах значений исходных параметров, а также вариативность в выборе профилей функций принадлежности. Методы, основанные на теории нечетких множеств, не требуют допущений о статистической вероятностной природе и специальных свойствах информационной среды моделирования.

На этапе оперирования неопределенностями в расчетах применение нечетко-множественного подхода базируется на приемах непосредственного оперирования плотностями распределения возможностей (функциями принадлежности для нечетких множеств) без операций их усреднения [3–5, 69, 103, 117, 137, 170, 171, 181, 265, 284, 287, 303, 309, 311, 312, 324]. Реализации данного подхода в нечетких расчетных моделях технических и естественных наук основывается на поэтапном фрагментированном применении аппарата нечеткой арифметики и использовании α – уровневой версии эвристического принципа обобщения в теории нечетких множеств [103, 170, 171, 284, 287, 302, 311] для осуществления перехода к нечетко-множественным аргументам в

функциональных соотношениях и алгоритмах, описывающих получение эндогенных параметров детерминистических версий соответствующих моделей.

Этап интерпретации полученных результатов в случае применения нечетко-множественного подхода не связан с введением априорных предположений относительно формы функции принадлежности для нечетких эндогенных характеристик. Устанавливаемый в процессе исследования вид этой функции позволяет, в конечном счете, описывать показатели степени уверенности в том, что эндогенные параметры модели будут принимать определенные значения из области носителя нечетко-множественного описания данного анализируемого параметра.

Позитивная оценка перспектив применения нечетко-множественных подходов в рассматриваемых типах математических моделей подтверждается накопленным обширным верифицированным опытом их использования при анализе различных аспектов в процессе исследования моделей функционирования технических систем [4–6, 24, 103, 195, 207–208, 301, 311, 322, 328].

Следует также отметить, что в прикладном математическом моделировании реальных технических систем для многих случаев целесообразным является одновременное применение трех основных, на сегодняшний день, способов формализации неопределенностей, к числу которых относятся вероятностный, интервальный [123, 181, 271, 277] и нечетко-множественный методы. В этих ситуациях возникает задача приведения к единой форме представления параметров различных методов описаний неопределенностей. Однако, если механизмы приведения к нечетко-множественной форме неопределенной информации статистической природы существуют, то трансформация в частотные распределения данных нечетко-множественного описания неопределенности, ввиду отсутствия необходимой количественной информации, невозможна [103].

1.2 Обзор опубликованных исследований по рассматриваемой проблеме

В контексте общей проблемы учета факторов неопределенности в расчетных математических моделях технических систем, реализация концепции применения

методов вероятностного стохастического анализа применительно к моделям деформационных и термических процессов представлена в цикле исследований, выполненных в период с пятидесятых годов минувшего столетия до сегодняшнего дня. Их основные результаты при исследовании моделей деформирования упругих тел, вопросов деформационной прочности и надежности элементов конструкций машин и строительных сооружений отражены в работах А.Н. Бадаева, Б.С. Берковского, В.В. Болотина, С.Д. Волкова, А. Исимару, А.А. Каминского, И.А. Кунина, Б.В. Ларина, В.А. Ломакина, В.Ф. Мущанова, В.А. Пальмова, Н.Н. Попова, Л.П. Хорошуна, Т.Д. Шермергора, М. Ostoja-Starzewski, S.Torquato, P. Wriggers, I.I. Zohdi, а также ряда других исследователей. Полученные в этом направлении результаты прежде всего касаются вопросов учета в рассматриваемых моделях режимов случайных внешних воздействий, включая вопросы надежности и расчета на прочность деформируемых упругих тел при действии случайных сил; учета стохастической неоднородности свойств конструкционных материалов; деформирования упругих тел со случайными неровностями поверхности; интерпретации физико-механических свойств структурированных микронеоднородных деформируемых сред; деформирования упругих тел со случайными неоднородностями; деформирования упругих тел с быстро осциллирующими упругими свойствами. Ряд основных результатов по данному исследовательскому направлению изложен в публикациях [51–53, 66, 94, 118, 143, 148, 149, 153, 158, 169, 172, 196, 333, 335]. Однако тематический спектр реализованных при этом разработок в силу указанных выше причин на данный момент в недостаточной мере охватывает как актуальные запросы практики предпроектного конструкторского моделирования, так и ведущие направления перспективных фундаментальных исследований.

Применение методов теории нечетких множеств, нечетких вычислений, нечеткой логики в технических науках и инженерных исследованиях моделей деформационных и термических процессов, как самостоятельное научное направление в исследовании влияния факторов неопределенности в

моделируемых процессах, получило свое развитие преимущественно в течение двух последних десятилетий.

Ключевые моменты применения аппарата теории нечеткой математики в исследованиях моделей технических систем отражены в работах А.Е. Алтунина [3–5]; А.Е. Алтунина, М.В Семухина [6]; Н.В. Дилигенского, Л.Г. Дымовой, П.В. Севастьянова [103]; Д. Дюбуа, А. Прада [109]; G.A Anastassiou [284]; A.I. Van, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski [286]; B. Bede [287]; U. Gabbert, H. S. Tzou [201]; P. Grzegorzewski, E. Mr'owka [310]; M. Hanss [311]; W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Panthenral [312]; N.N. Karabutov [315, 316]; A. Kaufmann, M. Gupta [318]; G. Klir [320]; M. Mizumoto, K. Tanaka [324]. К числу исследований, в которых, так или иначе, затрагиваются вопросы применения теории нечетких множеств к математическим моделям механики деформируемых сред, моделям прочности и надежности материалов, элементов конструкций машин и строительных и сооружений относятся работы Y. Bao, C. Chen, L.W. Kong, Z. Liu A. Skrzat, S. Sture, Q.Q. Wang, M. Wójcik, C. Zhang, в которых представлены разработка общей модели нечеткой пластичности, численное моделирование циклической подвижности на основе концепции нечетко-множественной теории пластичности, использование нечеткой математики при определении параметров упрочнения материала модели Хейера, вопросы идентификации параметров комбинированной изотропно-кинематической модели упрочнения Шабоша – Леметра с помощью нечеткой логики, анализ упругопластической модели циклического поведения рыхлого песка; работы S. Akkurt, M.F.M. Amin, D.J. Armaghani, A.A. Asrari, M. Ataepour, C.D. Atiş, H. Basarir, B.Y. Bejarbaneh, H. Bejari, H. Bin, S. Can, F. Demir, M. Elchalakani, A. Fahimifar, A. Fourie, S. Jeon, J.K. Hamidi, O. Karahan, A. Karrech, J. Kim, H. Lee, M.Z.A. Majid, F. Özcan, B. Rezai, K. Shahriar, A. Skrzat, H. Tanyildizi, G. Tayfur, E. Uncuoğlu, M. Wójcik, посвященные вопросам нечетко-множественного прогнозирования деформационных и прочностных параметров строительных материалов, прежде всего бетонов, а также и горных пород.

Применение нечетко-множественного моделирования и методов нечеткой логики в деформационных моделях функционирования пьезоэлектрических компонентов и устройств представлено в работах S. Adhikari, S.F. Ali, D.A. Barton, G.A. Drosopoulos, V.R. Franco, M.I. Friswell, G.A. Foutsitzi, P. Koutsianitis, Y. Li, G. Litak, B.P. Mann, B.A. Owens, G.E. Stavroulakis, G.K. Tairidis, P.S. Varoto, S. Zhou. Синтез и анализ нечетких моделей термического деформирования и надежности железобетонных и композитных плит изложен в работах N. Arsian, M. Bilgehan, M. Huseyinoglu, A.E. Kurtoğlu, T. Ozben. Комбинированный метод учета вероятностных и возможностных параметров при расчете характеристик надежности металлических конструкций развит в работах Н.Л. Галаевой [75–85]. Методика нечетко-множественного конечно-элементного моделирования охарактеризована в исследованиях I. Caylak, A. Dridger, R.A. Mahnken. Отдельные вопросы исследования факторов теплопроводности нечеткими численными методами в условиях неопределенности применительно к технологическим моделям термической подготовки дисперсного фосфатного сырья представлены в работе В.И. Бобкова, В.В.Борисова, М.И. Дли [24].

Таким образом, методы теории нечетких множеств, как инструмент учета факторов неопределенности в прикладном математическом моделировании, имеют расширяющийся круг эффективных применений в технологических моделях деформационных и термических процессов. Однако, вместе с тем, реализованные на данный момент исследования не охватывают актуальные аспекты проблемы учета факторов разброса исходных параметров в моделях расчета характеристик резонансных колебаний, параметров скоростей волн деформаций и критических усилий в задачах динамического деформирования и устойчивости стержневых конструкций, тонких пластин и оболочек [7, 60, 64, 68, 95, 96, 102, 107, 108, 110, 112, 131–132, 161, 164, 210, 215, 256, 266, 269–270, 285, 295, 297– 298]; в моделях формирования полей концентрации напряжений и зон пластических деформаций около полостей, отверстий и включений в пластинах и геомассивах [14, 97, 152, 155–157, 173, 211, 222, 260, 319, 325–326, 334]; в моделях распространения, дисперсии и трансформации объемных, поверхностных

и нормальных упругих волн [16–18, 20, 22, 56, 65, 98, 106, 140, 160, 166, 180, 206, 282, 323]; в моделях резонансно-волновой диагностики и идентификации прочностных характеристик геоматериалов, физико-механических и геометрических параметров упругих пластин, панелей и цилиндров [2, 136, 175, 258, 278, 300, 353]; в моделях и расчета параметров гидроакустических экранов [26–29, 90–92, 291]; в моделях создания охлаждающих аэрозольных газожидкостных потоков для технических систем термостабилизации различного назначения с применением устройств форсуночного типа [55, 59, 62, 63, 89, 104, 154, 167, 192–193, 204, 216, 218, 264, 268], пневматических и ротационных распылителей [11–13, 19, 15, 86, 88, 105, 213–214, 220, 254, 274, 306, 330]; в моделях теплообмена двухфазных парогазовых потоков при обтекании нагретых плоских поверхностей и высокотемпературных поверхностей цилиндрических каналов [99, 100, 113, 114, 179, 280]; в моделях экранирования интенсивных тепловых излучений с использованием многослойных конструкций с пакетами тонких теплоотражающих и теплоизолирующих слоев [10, 25, 111, 252–253] и ряде других моделей из рассматриваемой предметной области. Задачу развития методов нечетко-множественного моделирования и реализации перспективных исследований в области разработки алгоритмов учета факторов неопределенности в моделях прочностных и термических предпроектных расчетов для широкого круга технических систем решают исследования, осуществляемые в настоящей диссертационной работе.

1.3 Концепция использования нечетко-множественного подхода для учета факторов неопределенности в математических моделях деформационных и тепловых процессов

Среди самого широкого спектра областей применения методов математического моделирования в технических и естественных науках, модели деформационных и тепловых процессов относятся к числу едва ли не самых распространенных классов. Создание и разработка методов теоретического численно-аналитического исследования моделей из этих научно-технических

отраслей имеют первостепенное значение для технологической сферы развития производительных сил ввиду ориентации на круг специализированных проблем, связанных, в первую очередь, с определением характеристик прочности, надежности, долговечности и эксплуатационной технологичности агрегатов и конструктивных элементов машин, приборов, строительных сооружений, подземных объектов горнодобывающих отраслей [14, 51, 68, 135, 155, 169, 172, 260], а также с обеспечением режимов термостабилизации во множестве технологических и эксплуатационных процессов [99, 174, 280]. Результаты исследования моделей данного типа во все более расширяющейся мере востребованы в проектно-конструкторских и технологических разработках для таких новейших высокотехнологичных научно-промышленных отраслей, как создание аэрокосмической и ракетной техники [99, 155, 280], термоядерная энергетика [19, 62, 88, 114], акустоэлектроника [56, 180, 206, 219, 337], гео- и гидроакустика [29, 36, 90–92, 149, 175, 221], ультразвуковая дефектоскопия [2, 65, 106, 278, 300, 353], аддитивные технологии создания промышленных материалов и конструкций [290, 347, 355]. Кроме того, развитие методов теоретического численно-аналитического исследования играет важную роль в качестве инструмента верификации результатов применения к математическим моделям рассматриваемых типов современных версий универсальных методов численного анализа.

Соответственно, направлениями развития исследований в области методов синтеза и анализа инновационных математических моделей указанного типа, является более эффективный и адекватный учет комплекса моделируемых факторов, совершенствование методов и алгоритмов изучения моделей, а также создание программных приложений для компьютерной реализации разрабатываемых алгоритмов. При этом одним из ключевых заданий в совершенствовании приемов формализации и методов исследования моделей деформационных и термических процессов является учет влияния факторов неопределенности, в том числе учет разбросов в экспериментальных данных об измерениях величин экзогенных физико-механических и геометрических

параметров моделей [1, 8, 9, 23, 61, 101, 116, 133, 134, 165, 194, 259, 289, 299, 305, 349, 350, 355], имеющих разбросов для значений исходных расчетных параметров в пределах технологических допусков, учет погрешностей при интерпретации и усреднении результатов экспериментов по идентификации экзогенных параметров.

Приведенные выше соображения говорят о том, что развиваемые эффективные методики учета факторов неопределенности значений экзогенных параметров в математических моделях деформационных и термических процессов могут базироваться на применении методов теории нечетких множеств, как на этапе формализации неконтрастной исходной информации, так и в процессе оперирования с соответствующей неопределенной информацией вплоть до получения оценок для разбросов эндогенных параметров исследуемых моделей.

Соответственно целям работы, заключающимся в разработке нечетко-множественных теоретических численно-аналитических методов и алгоритмов исследования математических моделей деформационных и тепловых процессов с учетом факторов неопределенности экзогенных параметров, концептуальная схема реализуемого исследования имеет структуру, представленную на рисунке 1.1.

К проблематике и результатам данной работы относится также реализованное и представленное в публикациях [223, 225] развитие подходов к нечетко-множественному исследованию моделей деформационных и тепловых процессов на основе прямого использования баз статистических опытных эксплуатационных данных и экспертных заключений о влиянии свойств физико-механических и геометрических параметров материалов и конструкционных элементов на эндогенные параметры прочности, надежности и характеристики функционирования машин, приборов и сооружений в рамках выработки оптимизированных стратегий [144–147, 275] применения соответствующих материалов и конструкций в условиях неопределенности [301, 322, 328].

1.4 Методологические основы применения аппарата теории нечетких множеств в математических моделях рассматриваемого типа

В соответствии с представленной концепцией исследования, ключевыми применяемыми в работе методами нечетко-множественного анализа являются методы построения функций принадлежности [3–6, 150, 170, 267, 284, 286, 310] для нормальных нечетких множеств $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$, описывающих неопределенную экзогенную информацию и получение представлений данных множеств в форме разложений $\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} A_{\alpha}(x)$ по множествам α -срезов [3–6, 103, 117, 137, 170–171, 207–208] $A_{\alpha} = \{x |_{x \in R}, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$; методы идемпотентной и ранжирования нечетких неидемпотентной арифметики нечетких чисел и нечетких интервалов [69, 70, 72, 159, 181, 261, 263, 272–273, 294, 303, 309, 311, 318, 320–321, 324]; методы ранжирования нечетких чисел и нечетких интервалов [71, 151, 281, 283, 296, 302, 304, 327, 331, 348, 354]; методы применения α -уровневой версии эвристического принципа расширения (эвристического принципа обобщения) для распространения областей определения явных и неявных функциональных отображений, рассматриваемых в процессе анализа моделей, на аргументы нечетко-множественного типа [3–6, 103, 206–207]; методы оценивания показателей неопределенности, неконтрастности, размытости нечетких множеств [103]; методы дефаззификации нечетких множеств [3–6, 69, 103, 117, 137, 171, 181, 207–208].

Этапы фаззификации неопределенной количественной информации об экзогенных параметрах исследуемых моделей базируются на гипотезах о возможности эффективной интерпретации исходных параметров с разбросами значений в виде нормальных треугольных нечетких чисел, нормальных нечетких чисел гауссовского типа, нормальных нечетких чисел квазигауссовского типа, нормальных нечетких чисел квадратичного типа, нормальных нечетких чисел экспоненциального типа, нормальных нечетких чисел квази-экспоненциального типа, нормальных нечетких трапецеидальных интервалов [311].

Функции принадлежности для нормальных треугольных нечетких чисел $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$ имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ (x-a)(b-a)^{-1}, & a < x \leq b; \\ (c-x)(c-b), & b \leq x < c; \\ 0, & x \geq c; \end{cases} \quad (1.1)$$

а введение нечетких величин данного типа осуществляется путем задания кортежа реперных точек $\tilde{A} = (a, b, c)$. Разложения по множествам α -срезам для нормальных треугольных нечетких чисел имеют вид

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad \underline{x}_\alpha = a(1-\alpha) + b\alpha, \quad \bar{x}_\alpha = c(1-\alpha) + b\alpha. \quad (1.2)$$

Функции принадлежности для нормальных нечетких чисел $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$ гауссовского типа имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \exp(-(x-m_*)^2 / (2\sigma_{*l}^2)), & x < m_*; \\ \exp(-(x-m_*)^2 / (2\sigma_{*r}^2)), & x \geq m_*; \end{cases} \quad (1.3)$$

их введение осуществляется путем задания кортежа из трех чисел $\tilde{A} = (m_*, \sigma_{*l}, \sigma_{*r})$, а разложения по множествам α -срезам имеют вид

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad \underline{x}_\alpha = m_* - \sigma_{*l}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{x}_\alpha = m_* + \sigma_{*r}(\ln \alpha^{-2})^{1/2}. \quad (1.4)$$

Функции принадлежности для нормальных нечетких чисел $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$ квазигауссовского типа имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m_* - 3\sigma_{*l}; \\ \exp(-(x-m_*)^2 / (2\sigma_{*l}^2)), & m_* - 3\sigma_{*l} < x < m_*; \\ \exp(-(x-m_*)^2 / (2\sigma_{*m}^2)), & m_* \leq x < m_* + 3\sigma_{*r}; \\ 0, & x \geq m_* + 3\sigma_{*r}; \end{cases} \quad (1.5)$$

их введение также осуществляется путем задания кортежа из трех чисел $\tilde{A} = (m_*, \sigma_{*l}, \sigma_{*r})$, а разложения по множествам α -срезам имеют вид



Рис 1.1. Концепция использования нечетко-множественного подхода в моделях рассматриваемого типа

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [\exp(-9/2), 1]} [x_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad x_\alpha = m_* - \sigma_{*l} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{x}_\alpha = m_* + \sigma_{*r} (\ln \alpha^{-2})^{1/2} \quad (1.6)$$

В представлении (1.6) может быть учтено $\exp(-9/2) \approx 0.11109$.

Функции принадлежности для нормальных нечетких чисел $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$ квадратичного типа имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ 1 - (x-b)^2(a-b)^{-2}, & a < x \leq b; \\ 1 - (x-b)^2(c-b)^{-2}, & b \leq x < c; \\ 0, & x \geq c; \end{cases} \quad (1.7)$$

введение нечетких величин данного типа осуществляется путем задания кортежа реперных точек $\tilde{A} = (a, b, c)$, а разложения по множествам α – срезов имеют вид

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [x_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad x_\alpha = a(1-\alpha) + b\alpha, \quad \bar{x}_\alpha = c(1-\alpha) + b\alpha. \quad (1.8)$$

Функции принадлежности для нормальных нечетких чисел $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$ экспоненциального типа имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \exp(-(x-m_*)/\sigma_{*l}), & x < m_*; \\ \exp(-(x-m_*)/\sigma_{*r}), & x \geq m_*; \end{cases} \quad (1.9)$$

их введение осуществляется путем задания кортежа из трех чисел $\tilde{A} = (m_*, \sigma_{*l}, \sigma_{*r})$, а разложения по множествам α – срезов имеют вид

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [x_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad x_\alpha = m_* - \sigma_{*l} \ln \alpha^{-1}, \quad \bar{x}_\alpha = m_* + \sigma_{*r} \ln \alpha^{-1}. \quad (1.10)$$

Функции принадлежности для нормальных нечетких чисел $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}, x \in R$ квазиэкспоненциального типа имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m_* - 4.5\sigma_{*l}; \\ \exp(-(x-m_*)/(\sigma_{*l})), & m_* - 4.5\sigma_{*l} < x < m_*; \\ \exp(-(x-m_*)/(\sigma_{*r})), & m_* \leq x < m_* + 4.5\sigma_{*r}; \\ 0, & x \geq m_* + 4/5\sigma_{*r}; \end{cases} \quad (1.11)$$

их введение также осуществляется путем задания кортежа из трех чисел $\tilde{A} = (m_*, \sigma_{*l}, \sigma_{*r})$, а разложения по множествам α – срезов имеют вид

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [\exp(-9/2), 1]} [\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad \underline{x}_\alpha = m_* - \sigma_{*l} \ln \alpha^{-1}, \quad \bar{x}_\alpha = m_* + \sigma_{*r} \ln \alpha^{-1}. \quad (1.12)$$

Для нормальных трапецеидальных нечетких интервалов $\tilde{A}(x) = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\}$, $x \in R$ функции принадлежности имеют аналитические представления вида

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, a); \\ (x-a)/(b-a), & x \in [a, b]; \\ 1, & x \in [b, c]; \\ (d-x)/(d-c), & x \in (c, d]; \\ 0, & x \in (d, -\infty). \end{cases} \quad (1.13)$$

Они вводятся посредством задания кортежа из четырех упорядоченных по возрастанию чисел – реперных точек (границ интервала носителя и модельного интервала) $\tilde{A} = (a, b, c, d)$, а их разложения по множествам α – срезов имеют вид

$$\tilde{A}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{x}_\alpha, \bar{x}_\alpha], \quad \underline{x}_\alpha = (1-\alpha)a + \alpha b, \quad \bar{x}_\alpha = \alpha c + (1-\alpha)d. \quad (1.14)$$

Следует отметить, что описывающие треугольные нечеткие числа представления (1.1), (1.2) являются частными случаями представлений (1.13), (1.14) при $b = c$.

Для определения кортежей опорных параметров, характеризующих нечеткие числа и нечеткие трапецеидальные интервалы описанных типов, используется следующий ряд подходов [3–6, 150, 170, 267, 284, 286, 310].

Прежде всего, это приемы преобразования данных экспериментальных выборок, совокупностей количественных экспертных оценок и статистических частотных распределений в трапецеидальные нечеткие интервалы и нечеткие числа вышеуказанных типов. При учете сопровождающего эти преобразования снижения информативности в описании неопределенностей, оно компенсируется существенным расширением конструктивных возможностей теории нечетких множеств. Для реализации указанных преобразования предложены усовершенствованные методики определения характеристик нормальных

нечетких чисел и нормальных трапецеидальных нечетких интервалов, аппроксимирующих дискретные экспериментальные и экспертные выборки, непрерывные и дискретные данные статистических частотных распределений с единичными модальными показателями по критериям равенства площадей над осью абсцисс, ограничиваемых сверху функцией плотности вероятностей для рассматриваемого частотного распределения и функцией принадлежности для выбираемого типа четкого множества, а также минимизация интеграла квадратичных отклонений для значений указанных функций при всех $x \in R$. В рамках этих критериев может быть применен алгоритм аппроксимации дискретной одномодовой выборки данных экспериментальных измерений либо экспертных количественных оценок $\{x_k, f(x_k)\}$ ($k=1, 2N+1$) нечетким трапецеидальным интервалом с функцией принадлежности вида (3.31). Для этого выполняется расчет квадратичной невязки вида

$$J(a, b, c, d) = \sum_{k=1}^{2N+1} (f(x_k) - \mu(x_k))^2, \quad (1.15)$$

и формулируются условия ее минимизации для определения искомой совокупности реперных точек (a, b, c, d)

$$\partial J / \partial a = 0, \quad \partial J / \partial b = 0, \quad \partial J / \partial c = 0, \quad \partial J / \partial d = 0, \quad (1.16)$$

из которых следует система нелинейных алгебраических уравнений относительно искомых величин. Алгоритм является полуаналитическим, и форма результата зависит от характера принадлежности точек $\{x_k\}$ различным участкам носителя конструируемого нечеткого множества. При этом учитываются все возможные гипотетические варианты взаимного расположения точек $\{x_k, f(x_k)\}$ и $\{x_k, \mu(x_k)\}$, а после определения реперных точек для каждого из указанных вариантов, рассчитываются соответствующие функции невязки $J(a, b, c, d)$, и в качестве искомой выбирается совокупность (a, b, c, d) , обеспечивающая минимум J на множестве рассматриваемых вариантов.

Предложен также модифицированный вариант вышеописанного алгоритма, в рамках которого реперные точки аппроксимирующего нечеткого интервала определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
 \Delta_a^2 \cdot a + \Delta_a \cdot \Delta_b \cdot b + \Delta_a \cdot \Delta_c \cdot c + \Delta_a \cdot \Delta_d \cdot d &= \Delta_a \cdot \Delta, \\
 \Delta_b \cdot \Delta_a \cdot a + \Delta_b^2 \cdot b + \Delta_b \Delta_c \cdot c + \Delta_b \cdot \Delta_d \cdot d &= \Delta_b \cdot \Delta, \\
 \Delta_c \cdot \Delta_a \cdot a + \Delta_c \cdot \Delta_b \cdot b + \Delta_c^2 \cdot c + \Delta_c \Delta_d \cdot d &= \Delta_c \cdot \Delta, \\
 \Delta_d \cdot \Delta_a \cdot a + \Delta_d \cdot \Delta_b \cdot b + \Delta_d \Delta_c \cdot c + \Delta_d^2 \cdot d &= \Delta_d \cdot \Delta,
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \sum_{i=1}^N (x_{i,\max} - x_{i,\min}), \quad \Delta_a = 1 + \sum_{i=1}^N \mu(x_{i,\min}), \quad \Delta_b = -\sum_{i=1}^N \mu(x_{i,\min}), \\
 \Delta_c &= \sum_{i=1}^N \mu(x_{i,\max}), \quad \Delta_d = 1 - \sum_{i=1}^N \mu(x_{i,\max}).
 \end{aligned}$$

Создан метод получения численно-аналитического решения задачи по определению кортежа реперных значений для нормированного симметричного трапецеидального нормального нечеткого интервала, рассматриваемого как аппроксимирующая величина для неопределенной характеристики вероятностного типа, описываемой гауссовым нормальным частотным распределением с задаваемыми параметрами дисперсии и математического ожидания, либо для неопределенной величины, описываемой гауссовым нечетким числом [224].

В качестве критериев точности двухпараметрической аппроксимации устанавливаются требования равенства площадей для областей, ограничиваемых сверху функцией плотности нормального частотного распределения и функцией принадлежности для нормального трапецеидального нечеткого интервала, а также минимальности интеграла от разности квадратов значений данных функций на всей числовой прямой. В описываемом алгоритме используется представление вида

$$f(x) = \exp(-(x - m)^2 / (2\sigma^2)) \tag{1.18}$$

для функции плотности нормального частотного распределения с параметрами дисперсии σ^2 и математического ожидания m . Представление (1.18) соответственно вышеуказанным критериям аппроксимируется функцией принадлежности вида (1.13) для нормального нечеткого множества симметричной трапецеидальной формы с кортежем реперных значений (a, b, c, d) , где $b - a = d - c$, $(a + d)/2 = (b + c)/2 = m$.

При учете симметрии представлений функций $f(x)$ и $\mu_A(x)$ относительно $x = m$, достаточным для решения задачи аппроксимации, сводящегося к определению значений параметров c и d через параметры σ и m , является рассмотрение области $x \in [m, \infty)$. Соответственно этому записываются два охарактеризованных выше условия

$$\int_m^{\infty} f(x) dx = \int_m^{\infty} \mu_A(x) dx. \quad (1.19)$$

$$\int_m^c (1 - f(x))^2 dx + \int_c^d (f(x) - (d - x)/(d - c))^2 dx + \int_d^{\infty} f^2(x) dx \rightarrow \min. \quad (1.20)$$

В процессе анализа соотношений (1.19), (1.20) используется выражение для интеграла Эйлера – Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad (1.21)$$

а также представления для специальной функции $erf(x)$

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (1.22)$$

$$erf(x) \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{x^2}{1!3} + \frac{x^4}{2!5} - \frac{x^6}{3!7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!(2n+1)} + \dots \right], \quad (1.23)$$

и ее производной

$$erf'(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right]. \quad (1.24)$$

С учетом введенных представлений выражение (1.19) принимает вид

$$\sigma \sqrt{\pi/2} = (c + d)/2 - m, \quad (1.25)$$

откуда следует $d = 2(m + \sigma\sqrt{\pi/2}) - c$. При этом минимизируемое соотношение (1.20) преобразуется к виду

$$J(c) = c - m + (\sigma\pi)/2 - 2J_1(m, c) + 2(d - c)^{-1}J_2(c, d) + 2d(c - d)^{-1}J_1(c, d) + J_3(c, d, (d - c)^{-1}, d(c - d)^{-1}). \quad (1.26)$$

В (1.26)

$$J_1(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\beta - m}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha - m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right],$$

$$J_2(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{m\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\beta - m}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\alpha - m}{\sqrt{2}\sigma}\right) \right] + \sigma^2 \left[\exp\left(-\frac{\alpha - m^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{\beta - m^2}{2\sigma^2}\right) \right],$$

$$J_3(\alpha, \beta, p, q) = \int_{\alpha}^{\beta} (px + q)^2 dx = p^2(\beta^3 - \alpha^3)/3 + 2pq(\beta^2 - \alpha^2) + q^2(\beta - \alpha).$$

Условие экстремума $dJ(c)/dc = 0$ для представления (1.26) дает описание трансцендентного уравнения относительно искомого значения c , левая часть которого может быть записана в замкнутой аналитической форме, а его численное решение может построено с применением метода бисекции.

К числу наиболее востребованных при построении функций принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для нечетких множеств, описывающих частные критерии в моделях технологических и социально-экономических процессов, относится и частотный способ [3–6, 150, 170, 267, 284, 286, 310]. При его применении значения $\mu_{\tilde{A}}(x)$ характеризуются отношениями количества экспертов, давших положительное заключение о принадлежности элемента некоторого универсального множества к рассматриваемому нечеткому множеству и общего количества привлеченных экспертов. В методе агрегирования мнений группы экспертов возможной альтернативой является формирование нечетких интервалов с реперными точками, в свою очередь описываемыми нечеткими множествами с трапецеидальной функцией принадлежности – гипернечетких интервалов.

В качестве методического приема получения функций принадлежности для нечетко-множественных экзогенных параметров в рассматриваемых в работе моделях на основе представленных малочисленными выборками опытных экспериментальных данных либо количественных экспертных оценок, в случае применения предлагаемых в данной работе подходов эффективным является использование методики трансформации частотных выборок в интервальные статистические ряды с выпуклыми гистограммами [51–53, 149] для последующего выбора варианта формы непрерывной функции принадлежности либо для непосредственного описания границ интервалов в соответствующих α -уровневых разложениях нечетко-множественных параметров. В частности, при описании значений неопределенного экзогенного параметра \tilde{x} вариационным рядом $\{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ элементов выборки x_j с абсолютными частотами ν_j ($j = \overline{1, n}$) и построении для соответствующего интервального статистического ряда гистограммы из прямоугольных элементов $\Omega_k = \{\Delta_k \times \eta_k\}$ ($k = \overline{1, m}$) с основаниями Δ_k и высотами η_k , где $\Delta_k = [x_1 + (k-1)h, x_1 + kh]$, $\eta_k = (\sum_{j: x_j \in \Delta_k} \nu_j) / (\max_{k \in [1, m]} \sum_{j: x_j \in \Delta_k} \nu_j)$, $h = (x_n - x_1) / m$,

$m = N(1 + 3.322 \ln(n))$, $N(z)$ – целая часть z , можно записать представления

$$\underline{x}_\alpha = x_1 + (k-1)h, \quad \overline{x}_\alpha = x_n - (k-1)h, \quad \eta_0 = \eta_{m+1} = 0.$$

$\eta_{k-1} < \alpha \leq \eta_k$ $\eta_{m-k+2} < \alpha \leq \eta_{m-k+1}$

В случае использования справочных табличных данных о значениях используемого параметра с задаваемыми разбросами в форме $x_0 + x_+$, $x_0 - x_-$, приемом его фаззификации может служить переход к описанию в виде треугольного нечеткого числа с реперными значениями (a, b, c) $a = x_0 - x_-$, $b = x_0$, $c = x_0 + x_+$, либо переход к описанию нечетким нормальным трапецеидальным интервалом с реперными значениями (a, b, c, d) , $a = x_0 - x_-$, $b = x_0 - \delta_-$, $c = x_0 + \delta_+$, $d = x_0 + x_+$, где δ_\pm – экспертные уровни разбросов на модальном интервале.

Разделами теории нечетких множеств, используемыми в исследованиях данной диссертационной работы, являются также методы арифметики нечетких чисел и нечетких трапецеидальных интервалов [69, 70, 72, 159, 181, 261, 263, 272–273, 294, 303, 309, 311, 318, 320–321, 324], а также методы расширения областей

определения функциональных отображений на аргументы нечетко-множественного типа [3–6, 57, 69, 103, 117, 137, 170, 171, 181, 207–209, 262, 265, 284, 287, 311, 312]. Разрабатываемые методики учета неопределенности при анализе моделей деформационных и тепловых процессов базируются на двух вариантах определения правил арифметики нечетких трапецеидальных интервалов и нечетких треугольных чисел.

Прежде всего, в разрабатываемых теоретических нечетко-множественных алгоритмах анализа моделей деформационных и тепловых процессов используется стандартный аппарат арифметики нечетких чисел (нечетких трапецеидальных интервалов), который основывается на эвристическом принципе расширения Л. Заде [3–6, 69, 103, 117, 137, 171, 181, 207–209, 284, 287, 311]. Так, в случае задания независимых нечетких чисел $\tilde{A}_1 = (x_1)$, $\tilde{A}_2 = (x_2)$, результатом выполняемой с этими величинами арифметической операции $* \in \{+, -, \cdot, / \}$ будет нечеткое число $\tilde{A}(y)$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\tilde{A}}(y) = \sup_{y=x_1 * x_2} \min \{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \}, \quad x_1, x_2 \in R. \quad (1.27)$$

Интерпретация каждого нового вхождения одной и той же переменной в расчетные соотношения как новой независимой, порождает при этом свойства неидемпотентности стандартных арифметических операций сложения и вычитания, умножения и деления. Следствием этого известного недостатка является соответствующее форсированное увеличение степени неопределенности результатов вычислений с нечеткими величинами и трактовка этих результатов в оценках неконтрастных эндогенных параметров моделей, как «осторожных», «сдержанных», «пессимистических». Правила стандартной арифметики для нормальных нечетких треугольных чисел, задаваемых кортежами реперных значений $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2), \\ \tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 &= (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2), \quad \tilde{A}_1 / \tilde{A}_2 = (a_1 / c_2, b_1 / b_2, c_1 / a_2), \end{aligned} \quad (1.28)$$

а для нормальных нечетких трапецеидальных интервалов $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$ принимает вид

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2 = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2), \quad (1.29)$$

$$\tilde{A}_1 \cdot \tilde{A}_2 = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2, d_1 \cdot d_2), \tilde{A}_1 / \tilde{A}_2 = (a_1 / d_2, b_1 / c_2, c_1 / b_2, d_1 / a_2).$$

Обозначенная в концепции развиваемого нечетко-множественного подхода стратегия аналитических преобразований в соотношениях детерминистических версий соответствующих моделей предусматривает предельно возможное сокращение числа повторных вхождений экзогенных параметров в расчетные соотношения для минимизации влияния свойств неидемпотентности арифметических операций на эндогенные характеристики.

Наряду со стандартным аппаратом арифметики нечетких величин в работе применяются отдельные модифицированные версии алгебры нормальных нечетких треугольных чисел с идемпотентными арифметическими операциями. В частности, используются предложенная в работах [70, 72, 159, 272–273] схема бинарных операций для двухкомпонентных треугольных чисел, определяемых как векторы $A_\varphi = (\varphi^{(L)}(x), \varphi^{(R)}(x))$ с проекциями $\varphi^{(L)}(x) = a_L + b_L x$, $\varphi^{(R)}(x) = a_R + b_R x$, $\varphi^{(L)}(1) = \varphi^{(R)}(1)$ и интерпретируемых как нечеткие треугольные числа. Для данного типа объектов вводятся арифметические операции, определяемые по схеме

$$\tilde{A} = A_\varphi * A_\gamma = (a_L(x), a_R(x)), \quad (1.30)$$

$$a_L(x) = \varphi^{(L)}(0) * \gamma^{(L)}(0) + (\varphi^{(L)}(1) * \gamma^{(L)}(1) - \varphi^{(L)}(0) * \gamma^{(L)}(0))x,$$

$$a_R(x) = \varphi^{(R)}(0) * \gamma^{(R)}(0) + (\varphi^{(R)}(1) * \gamma^{(R)}(1) - \varphi^{(R)}(0) * \gamma^{(R)}(0))x,$$

где $*$ – символ арифметической операции, $* \in \{+, -, \cdot, / \}$. Арифметические операции приведенного типа идемпотентны, а реализуемые с их использованием вычисления не сопровождаются излишним накоплением неопределенности и интерпретируются как «оптимистические».

Другим подходом к снижению уровня накапливания неопределенности при вычислениях со стандартными операциями арифметики нечетких чисел в случае неоднократного вхождения в расчетные соотношения одного и того же операнда

является введение модификаций в описания этих операций с учетом коррелированности нечетко-множественных величин в виде их взаимодействия по модальным значениям, как частного варианта совместного распределение возможностей [263]. Для двух нечетких чисел $\tilde{A}_1(x_1)$, $\tilde{A}_2(x_2)$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{A}_1}(x_1)$, $\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)$ совместное распределение возможностей [263] описывается вводимым на R^2 нечетким множеством \tilde{P} с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{P}}(x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in R$ при условии

$$\mu_{\tilde{A}_i}(x_i) = \max_{x_j \in R, j \neq i} ((\mu_{\tilde{P}}(x_1, x_2))), \forall x_i \in R; i, j = \overline{1, 2}. \quad (1.31)$$

При введении применительно к нечетким числам $\tilde{A}_1(x_1)$, $\tilde{A}_2(x_2)$ обозначений m_j для координат базового множества, соответствующих модальным значениям $\tilde{A}_j(x_j)$, взаимодействие этих нечетких чисел по модальным значениям описывается как совместное распределение возможностей с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{P}}(x_1, x_2) = \sup (\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \cdot \chi_1(x_2), \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \cdot \chi_2(x_1)), \quad (1.32)$$

где $\chi_1(x_2)$, $\chi_2(x_1)$ – характеристические функции вида

$$\chi_2(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 = m_1; \\ 0, & x_1 \neq m_1; \end{cases} \quad \chi_1(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 = m_2; \\ 0, & x_2 \neq m_2. \end{cases} \quad (1.33)$$

В случае, если для левых границ α -уровней нечетких чисел $\tilde{A}_j(x_j)$ вводятся представления $l_j(\alpha)$, а для правых границ – представления $r_j(\alpha)$, соответствующие α -уровни совместного распределения представляются в виде

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\alpha = & \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 = (1-t_1)l_1(\alpha) + t_1r_1(\alpha), t_1 \in [0,1], x_2 = m_2\} \cup \\ & \cup \{(x_1, x_2) \in R^2 \mid x_2 = (1-t_2)l_2(\alpha) + t_2r_2(\alpha), t_2 \in [0,1], x_1 = m_1\}; \end{aligned} \quad (1.34)$$

множества α -уровня для суммы $\tilde{A} = \tilde{A}_1(x_1) + \tilde{A}_2(x_2)$ и разности $\tilde{A} = \tilde{A}_1(x_1) - \tilde{A}_2(x_2)$ взаимодействующих по модальным значениям нечетких чисел имеют аналитические описания

$$\tilde{A}_\alpha = [\min (l_1(\alpha) + m_2, l_2(\alpha) + m_1), \max (r_1(\alpha) + m_2, r_2(\alpha) + m_1)], \quad (1.35)$$

$$\tilde{A}_\alpha = [\min (l_1(\alpha) - m_2, -l_2(\alpha) + m_1), \max (r_1(\alpha) - m_2, -r_2(\alpha) + m_1)].$$

Операция возведения нечетко-интервальной величины в произвольную рациональную либо в нечеткую степень реализуется в соответствии с принципом декомпозиции на множества α -уровня

$$\mu^\beta = \bigcup_\alpha \mu_\alpha^\beta, \quad \mu_\alpha = [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha], \quad \mu_\alpha^\beta = \left[\min \left\{ \underline{\mu}_\alpha^\beta, \overline{\mu}_\alpha^\beta \right\}, \max \left\{ \underline{\mu}_\alpha^\beta, \overline{\mu}_\alpha^\beta \right\} \right]. \quad (1.36)$$

Ключевым в рамках развиваемого в работе концептуального подхода является использование α -уровневой версии эвристического принципа обобщения для перехода к нечетко-множественным аргументам в описывающих эндогенные параметры явных либо неявных расчетных соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей. Полагается, что аргументы \tilde{x}_i ($i = \overline{1, n}$) нечетко-множественного типа получены описания разложениями по множествам α -срезов $\tilde{x} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha]$, в которых $\underline{x}_\alpha, \overline{x}_\alpha$ являются

минимальным и максимальным значениями \tilde{x} на множестве α -уровня [3–6, 103, 117, 137, 170–171, 207–208]. Множества α -уровня классифицируют также как α -сечения или α -срезы нечеткого множества; α -уровни для выпуклых нечетких множеств, по-существу, являются классическими четкими интервалами, соответствующими определенным значениям функции принадлежности, что, в частности, позволяет трактовать аппарат теории нечетких множеств как обобщение концепции интервальной математики [271, 277]. При задании функции n независимых переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и переходе в ее представлении к нечетким числовым аргументам \tilde{x}_i ($i = \overline{1, n}$), описываемым суперпозициями по α -срезам $\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_{i,\alpha}, \overline{x}_{i,\alpha}]$ ($i = \overline{1, n}$), значение $\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ представляет собой

нечеткую величину

$$\tilde{y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{y}_\alpha, \overline{y}_\alpha], \quad (1.37)$$

где

$$\underline{y}_\alpha = \inf_{\substack{x_{i,\alpha} \in [\underline{x}_{i,\alpha}, \bar{x}_{i,\alpha}] \\ i=1,\overline{n}}} f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha}), \quad \bar{y}_\alpha = \sup_{\substack{x_{i,\alpha} \in [\underline{x}_{i,\alpha}, \bar{x}_{i,\alpha}] \\ i=1,\overline{n}}} f(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}, \dots, x_{n,\alpha}). \quad (1.38)$$

По существу, применение α -уровневой версии эвристического принципа расширения предполагает на каждом из α -уровней решение задач поиска максимального и минимального значения функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Количество вводимых α -уровней в процессе реализации описываемого алгоритма определяется исходя из соображений достижения требуемой точности вычислений при построении функции принадлежности для нечеткого множества \tilde{y} .

Наиболее эффективным является модифицированный вариант алгоритма реализации α -уровневой формы принципа обобщения, включающий этапы [207–209] определения границ областей изменения аргументов на множествах α -срезов $x_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ ($i = \overline{1, n}$) и формирования представлений нечетко-множественных экзогенных параметров в форме разложений $\tilde{x}_i = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_{i,\alpha}, \bar{x}_{i,\alpha}]$ ($i = \overline{1, n}$); этап анализа возможностей получения аналитических представлений для частных производных $\partial y / \partial x_i$, возможностей получения оценок их знакоопределенности в области совокупного изменения аргументов и выделения на множестве X совокупного изменения аргументов x_i ($i = \overline{1, n}$) с учетом свойств устанавливаемых свойств знакоопределенности трех непересекающихся подмножеств X_j ($j = \overline{1, 3}$), включающих множество аргументов $X_1 = \{x_r : \partial y / \partial x_r \geq 0\}$, для которых $\partial y / \partial x_r \geq 0$ во всей области определения, множество аргументов $X_2 = \{x_s : \partial y / \partial x_s \leq 0\}$, для которых $\partial y / \partial x_s \leq 0$ во всей области определения, а также множество аргументов $X_3 = \{x_q : \text{sign}(\partial y / \partial x_q) = \text{sign}(g_q(x_r, x_s))\}$ ($q \neq r, q \neq s$), для которых частные производные $\partial y / \partial x_q$ являются знакопеременными функциями, но при этом их знак зависит только от значений аргументов x_r, x_s и определяется вспомогательной не зависящей от x_q функцией $g_q(x_r, x_s)$ (в частности, это отвечает случаю линейного вхождения x_q только в одно из слагаемых представления $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$). При

этом, на базе реализации перечисленных этапов представления (1.37), (1.38) записываются в виде

$$\tilde{y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \{y_{\alpha}, \bar{y}_{\alpha}\}, \quad (1.39)$$

где

$$\begin{aligned} \underline{y}_{\alpha} &= \inf_{x_{m,\alpha} \in [\underline{x}_{m,\alpha}, \bar{x}_{m,\alpha}]} f(\underline{x}_{r,\alpha}, \bar{x}_{s,\alpha}, x_{q,\alpha}^I, x_{m,\alpha}), \quad \bar{y}_{\alpha} = \sup_{x_{m,\alpha} \in [\underline{x}_{m,\alpha}, \bar{x}_{m,\alpha}]} f(\bar{x}_{r,\alpha}, \underline{x}_{s,\alpha}, x_{q,\alpha}^{II}, x_{m,\alpha}); \\ x_{q,\alpha}^I &= \begin{cases} \underline{x}_{q,\alpha} & \text{при } g_q(\underline{x}_r, \bar{x}_s) \geq 0, \\ \bar{x}_{q,\alpha} & \text{при } g_q(\underline{x}_r, \bar{x}_s) < 0; \end{cases} \quad x_{q,\alpha}^{II} = \begin{cases} \bar{x}_{q,\alpha} & \text{при } g_q(\bar{x}_r, \underline{x}_s) \geq 0, \\ \underline{x}_{q,\alpha} & \text{при } g_q(\bar{x}_r, \underline{x}_s) < 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (1.40)$$

x_m – переменные из множества X , не вошедшие в подмножества X_j .

Элементами используемого аппарата нечетко-множественного исчисления являются приемы определения показателей неопределенности, неконтрастности, размытости нечетких множеств. Для нечетких чисел оценивание таких показателей базируется на характеристиках отклонения функций принадлежности от модального значения, в качестве которых используется взвешенная ширина нечеткого числа

$$D(\tilde{A}_j) = \int_0^1 (l_j(\alpha) - r_j(\alpha)) \cdot q(\alpha) d\alpha, \quad (1.41)$$

либо взвешенная дисперсия нечеткого числа

$$\sigma(\tilde{A}_j) = \int_0^1 ((l_j(\alpha) - r_j(\alpha))/2)^2 \cdot q(\alpha) d\alpha, \quad (1.42)$$

где $q(\alpha)$, $\int_0^1 q(\alpha) d\alpha = 1$ – некоторая нормализованная весовая функция.

Элементом методологической базы использования аппарата теории нечетких чисел и нечетких трапецеидальных интервалов являются операции сравнения нечетких множеств A_{ij} и A_{kl} данных типов, которые альтернативно реализуются на основе наиболее современных, описываемых в [71, 151, 281, 283, 296, 302, 304, 327, 331, 348, 354] подходов. Согласно [348]: $A_{ij} > A_{kl}$ при $R_1(A_{ij}) > R_1(A_{kl})$; $A_{ij} < A_{kl}$

при $R_1(A_{ij}) < R_1(A_{kl})$; $A_{ij} = A_{kl}$ при $R_1(A_{ij}) = R_1(A_{kl})$. Здесь для интервала $A(a_{A_y}, b_{A_y}, c_{A_y}, d_{A_y})$ представление $R_1(A)$ имеет вид:

$$R_1(A) = (\alpha_A^2 + \beta_A^2)^{1/2}, \quad \beta_A = (1 + (c_{A_y} - b_{A_y}) / (c_{A_y} + d_{A_y} - a_{A_y} - b_{A_y})) / 3, \quad (1.43)$$

$$\alpha_A = a_{A_y} + b_{A_y} + c_{A_y} + d_{A_y} - (c_{A_y} d_{A_y} - a_{A_y} b_{A_y}) / (c_{A_y} + d_{A_y} - a_{A_y} - b_{A_y}).$$

Согласно [354], $A_{ij} > A_{kl}$ при $R_2(A_{ij}) > R_2(A_{kl})$; $A_{ij} < A_{kl}$ при $R_2(A_{ij}) < R_2(A_{kl})$. Здесь

$$R_2(A_{ij}) = (\Delta_{1A_y} (a_{ij} + 2b_{ij}) / 3 + \Delta_{2A_y} (b_{ij} + c_{ij}) / 2 + \Delta_{3A_y} (2c_{ij} + d_{ij}) / 3) \cdot \quad (1.44)$$

$$\cdot (\Delta_{1A_y} / 3 + \Delta_{2A_y} / 2 + \Delta_{3A_y} / 3) / (\Delta_{1A_y} + \Delta_{2A_y} + \Delta_{3A_y})^2,$$

$$\Delta_{1A_y} = ((c_{ij} - 3b_{ij} + 2d_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 6, \quad \Delta_{2A_y} = ((2c_{ij} + d_{ij} - a_{ij} - 2b_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 3,$$

$$\Delta_{3A_y} = ((3c_{ij} - 2a_{ij} - b_{ij})^2 + 1)^{1/2} / 6.$$

Элементом применяемого при исследованиях аппарата нечеткой математики является также процедура дефаззификации – преобразования нечеткого множества \tilde{A} в четкое число \hat{a} [3–6, 69, 103, 117, 137, 171, 181, 207–208]. Для теории нечетких множеств процедура дефаззификации аналогична нахождению характеристик математического ожидания, моды, медианы случайных величин в теории вероятности. Простейшим способом выполнения процедуры дефаззификации нечетких чисел \tilde{A} является выбор четкой величины на носителе, $\text{supp}(A)$ соответствующей максимуму функции принадлежности (модального значения). Соотношение дефаззификации нечеткого множества $A = \{x, \mu_A(x)\}$ по методу центра тяжести имеет вид

$$\hat{a} = \left(\int_{\text{supp}A} x \cdot \mu_A(x) \cdot dx \right) / \left(\int_{\text{supp}A} \mu_A(x) \cdot dx \right). \quad (1.45)$$

Для нечеткого нормального трапецидального интервала $\tilde{A} = (a, b, c, d)$

$$\hat{a} = (d^2 + c^2 + dc - a^2 - b^2 - ab) / (3(d - a + c - b)). \quad (1.46)$$

Дефаззификация нечеткого множества $A = \{x, \mu_A(x)\}$ с носителем $x \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$

по методу медианы состоит в нахождении величины \hat{a} из соотношения

$$\int_{\underline{x}_0}^{\hat{a}} \mu_A(x) dx = \int_{\hat{a}}^{\bar{x}_0} \mu_A(x) dx. \quad (1.47)$$

Для нечеткого нормального трапецеидального интервала $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ в этом случае

$$\hat{a} = (a + b + c + d) / 4. \quad (1.48)$$

Дефаззификация нечеткого множества $A = \{x, \mu_A(x)\}$ по методу центра максимумов осуществляется на основании формулы

$$\hat{a} = \left(\int_G x \cdot \mu_A(x) \cdot dx \right) / \left(\int_G \mu_A(x) \cdot dx \right), \quad (1.49)$$

где G – множество всех элементов из интервала $\text{supp}(A)$, имеющих максимальную степень принадлежности нечеткому множеству A .

Для нечеткого нормального трапецеидального интервала $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ в этом случае

$$\hat{a} = (b + c) / 2 \quad (1.50)$$

Для треугольных нечетких чисел справедлив частный случай вышеприведенных формул при $b = c$.

1.5 Выводы по разделу 1

1. Дана характеристика подходов к учету факторов неопределенности в математических моделях технических и естественных наук, позволяющая сформулировать заключение об особенностях возможного применения в целях реализуемого исследования методов вероятностно-стохастического анализа и методов теории нечетких множеств, и вытекающей из проведенного анализа актуальности развития нечетко-множественного подхода к учету факторов неопределенности в исследованиях по техническим и естественным наукам с дополнительными возможностями в охвате особенностей моделируемых процессов и расширением практики применения для анализа различных новых классов рассматриваемых моделей. Указано, что особенностями применения данного подхода на этапе представления неопределенностей, формализации неконтрастных исходных данных являются возможности использования данных, получаемых на основе обработки маломощных неоднородных частотных

выборки, данных субъективных экспертных заключений о диапазонах значений исходных параметров, вариативность в выборе профилей функций принадлежности, а на этапе оперирования неопределенностями в расчетах – непосредственное оперирование плотностями распределения возможностей (функциями принадлежности для нечетких множеств) без операций их усреднения. Интерпретации полученных результатов в случае применения нечетко-множественного подхода не связана с введением априорных предположений относительно формы функции принадлежности для нечетких эндогенных характеристик и устанавливаемый в процессе исследования вид этой функции позволяет описывать показатели степени уверенности в том, что эндогенные параметры модели будут принимать определенные значения из области носителя нечетко-множественного описания данного параметра.

2. На основе подготовленного обзора опубликованных исследований по рассматриваемой проблеме показано, что позитивная оценка перспектив применения нечетко-множественных подходов в рассматриваемых типах математических моделей подтверждается накопленным обширным верифицированным опытом их использования при анализе различных аспектов в процессе исследования моделей функционирования технических систем. Анализ публикаций по рассматриваемой проблематике позволяет заключить, что методы теории нечетких множеств, как инструмент учета факторов неопределенности в прикладном математическом моделировании, имеют расширяющийся круг эффективных применений в технологических моделях деформационных и термических процессов, но на данный момент не охватывают актуальные аспекты проблемы учета факторов разброса исходных параметров при исследованиях самого широкого круга важных в инженерных приложениях моделей прочностных и термических предпроектных расчетов для технических систем.

3. Представлено описание сформированной исходя из целей и заданий работы концепции использования нечетко-множественного подхода для учета факторов неопределенности в расчетных математических моделях деформационных и тепловых процессов, в основу которой положены

фазификация обладающей разбросами неконтрастной исходной информации о числовых значениях исходных параметров, а также поэтапное фрагментированное применение аппарата нечеткой арифметики и использование α - уровневой версии эвристического принципа обобщения в теории нечетких множеств для осуществления перехода к нечетко-множественным аргументам в функциональных соотношениях и алгоритмах, описывающих получение эндогенных параметров детерминистических версий соответствующих моделей.

4. Дана содержательная характеристика ключевых элементов применяемого в работе аппарата теории нечетких множеств, включая методы построения функций принадлежности для описывающих неопределенную экзогенную информацию нормальных нечетких множеств и получение их представлений форме разложений по множествам α -срезов; методы идемпотентной и неидемпотентной арифметики нечетких чисел и нечетких интервалов; методы ранжирования нечетких чисел и нечетких интервалов; методы применения модифицированной α -уровневой версии эвристического принципа расширения (эвристического принципа обобщения) для распространения областей определения явных и неявных функциональных отображений, рассматриваемых в процессе анализа моделей, на аргументы нечетко-множественного типа; методы оценивания показателей неопределенности, неконтрастности, размытости нечетких множеств; методы дефазификации нечетких множеств.

РАЗДЕЛ 2. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

2.1. Нечеткие оценки для собственных частот поперечных колебаний однородных стержней.

Задачи определения собственных частот поперечных колебаний однородных по длине прямых стержней относятся к числу классических задач теории колебаний тонкостенных конструкций, имеющих самый широкий круг практических приложений в строительной механике, механике машин и механизмов, в аэрокосмических и биомедицинских исследованиях. Вместе с тем, давно полученные и широко используемые методики расчетов этих частот [205] основываются на детерминистических теоретических подходах, не учитывающих возможное влияние на исследуемые характеристики реально существующих разбросов в значениях физико-механических и геометрических параметров конструктивных элементов данного типа.

В этой связи, в качестве эффективного способа учета неопределенностей в математических моделях для рассматриваемой предметной области, предлагается использование нечетко-множественного подхода, который не требует допущений о статистической вероятностной природе и специальных свойствах информационной среды моделирования, и является, в том числе, эффективным приемом использования субъективной экспертной информации.

Основой для разработки нечетко-множественной методики оценивания степени влияния факторов разброса эндогенных характеристик в моделях определения частот собственных изгибных колебаний однородных прямых стержней при различных вариантах задания краевых условий на их концах являются результаты исследований рассматриваемых моделей в детерминистической четкой постановке.

Согласно [205], для прямых однородных по длине стержней из материала с модулем Юнга E и плотностью ρ , площадью и моментом инерции поперечного

сечения A и J , удельной массой $m = A\rho$, длиной l , уравнения для определения спектров собственных частот ω_n изгибных колебаний имеют вид: для стержня с обоими шарнирно опертыми концами

$$\sin \zeta_n = 0, \quad \zeta_n = l(m\omega_n^2 / (EJ))^{1/4}; \quad (2.1)$$

для стержня с обоими свободными либо жестко закрепленными концами

$$\cos \zeta_n \operatorname{ch} \zeta_n = 1; \quad (2.2)$$

для консольного стержня с одним закрепленным и противоположным свободным концом

$$\cos \zeta_n \operatorname{ch} \zeta_n = -1; \quad (2.3)$$

для стержней с одним шарнирно опертым и противоположным закрепленным либо свободным концом

$$\operatorname{tg} \zeta_n - \operatorname{th} \zeta_n = 0. \quad (2.4)$$

В приведенных случаях задания граничных условий собственные частоты описываются явными аналитическими представлениями вида

$$\omega_n = F(E, J, m, l, \zeta_n) = (EJ / m)^{1/2} (\zeta_n / l)^2, \quad (2.5)$$

в которых, в частности, величины ζ_n ($n = \overline{1,3}$) имеют известные, получаемые при численном решении уравнений (2.1) – (2.4) значения [205]:

– для стержня с обоими свободными либо жестко закрепленными концами $\zeta_1 = 4.730$, $\zeta_2 = 7.853$, $\zeta_3 = 10.996$;

– для консольного стержня с одним закрепленным и противоположным свободным концом $\zeta_1 = 1.875$, $\zeta_2 = 4.694$, $\zeta_3 = 7.855$;

– для стержней с одним шарнирно опертым и противоположным закрепленным либо свободным концом $\zeta_1 = 3.927$, $\zeta_2 = 7.069$, $\zeta_3 = 10.210$;

– для стержня с обоими закрепленными либо обоими свободными концами $\zeta_n = n\pi$ ($n = \overline{1, \infty}$).

При этом, в частном случае стержня кругового сечения с радиусом r , представления для J и A имеют вид $J = \pi r^4 / 4$, $A = \pi r^2$, а для стержня

прямоугольного сечения с высотой a и шириной b соответственно $J = ba^3/12$, $A = ab$.

В рамках реализуемого исследования, согласно предположению о существовании разбросов значений фигурирующих в представлениях для ω_n экзогенных физико-механических и геометрических параметров стержня, вводятся их нечетко-множественные описания $\tilde{E}, \tilde{\rho}, \tilde{r}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{l}$. На основе статических данных либо экспертных заключений вносится гипотеза о формах функций принадлежности $\mu_{\tilde{E}}(E), \mu_{\tilde{\rho}}(\rho), \mu_{\tilde{r}}(r), \mu_{\tilde{a}}(a), \mu_{\tilde{b}}(b), \mu_{\tilde{l}}(l)$ для введенных нормальных нечетких множеств и количественных характеристиках функций принадлежности соответствующих профилей. Каждая их введенных нечетко-множественных величин записывается в форме суперпозиции по интервалам α -уровня, имеющей в общей форме для выпуклого нечеткого множества $\tilde{D}(d)$ вид

$$\tilde{D}(d) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{d}_\alpha, \bar{d}_\alpha] \quad (2.6)$$

При этом, в частности, если для $\mu_{\tilde{D}}(d)$ выбирается представление, соответствующее нормальному статистическому распределению, то

$$\mu_{\tilde{D}}(d) = \exp(-(d - m_*)^2 / (2\sigma_*^2)), \quad (2.7)$$

$$\underline{d}_\alpha = m_* + 2\sigma_*^2 \ln \alpha, \quad \bar{d}_\alpha = m_* - 2\sigma_*^2 \ln \alpha; \quad (2.8)$$

если выбран вариант аппроксимации нечетких экзогенных параметров нормальными нечеткими трапецидальными интервалами с кортежем реперных значений $\tilde{D}: (d_1, d_2, d_3, d_4)$, то соответственно

$$\underline{d}_\alpha = d_1(1 - \alpha) + d_2\alpha, \quad \bar{d}_\alpha = d_4(1 - \alpha) + d_3\alpha. \quad (2.9)$$

Непосредственно процедура получения нечетких оценок $\tilde{\omega}_n$ для значений резонансных частот заключается в применении модифицированной α -уровневой формы эвристического принципа расширения [13, 206–209] к полученным и описанным выше в рамках детерминистических версий соответствующих моделей представлений для ω_n , которые, частности, для стержней прямоугольного сечения имеют вид

$$\omega_n(E, \rho, a, b, l) = (a/2)(E/(3\rho))^{1/2}(\zeta_n^2/l^2), \quad (2.10)$$

а для стержней кругового сечения – вид

$$\omega_n(E, \rho, r, l) = (r/2)(E/\rho)^{1/2}(\zeta_n^2/l^2). \quad (2.11)$$

Для применения модифицированного принципа расширения используются следующие оценки, справедливые для всей области изменения экзогенных параметров: для стержней прямоугольного сечения

$$\partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial E \geq 0, \quad \partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial\rho \leq 0, \quad \partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial a \geq 0, \quad (2.12)$$

$$\partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial b \geq 0, \quad \partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial l \leq 0;$$

для стержней кругового сечения

$$\partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial E \geq 0, \quad \partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial\rho \leq 0, \quad \partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial r \geq 0, \quad (2.13)$$

$$\partial\omega_n(E, \rho, a, b, l)/\partial l \leq 0.$$

В результате для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\omega}_n$ записываются представления

$$\tilde{\omega}_n = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{n\alpha}, \overline{\omega}_{n\alpha}], \quad (2.14)$$

в которых:

– для случая стержней прямоугольного сечения с нечетко-интервальными экзогенными параметрами $\tilde{E}, \tilde{\rho}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{l}$:

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{n\alpha} = & ((d_{1a}(1-\alpha) + d_{2a}\alpha)/2)((d_{1E}(1-\alpha) + d_{2E}\alpha)/(3(d_{4\rho}(1-\alpha) + d_{3\rho}\alpha)))^{1/2} \times \\ & \times (\zeta_n^2/(d_{4l}(1-\alpha) + d_{3l}\alpha)^2), \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{n\alpha} = & ((d_{4a}(1-\alpha) + d_{3a}\alpha)/2)((d_{4E}(1-\alpha) + d_{3E}\alpha)/(3(d_{1\rho}(1-\alpha) + d_{2\rho}\alpha)))^{1/2} \times \\ & \times (\zeta_n^2/(d_{1l}(1-\alpha) + d_{2l}\alpha)^2); \end{aligned}$$

– для случая стержней кругового сечения с нечетко-интервальными экзогенными параметрами $\tilde{E}, \tilde{\rho}, \tilde{r}, \tilde{l}$:

$$\begin{aligned} \underline{\omega}_{n\alpha} = & ((d_{1r}(1-\alpha) + d_{2r}\alpha)/2)((d_{1E}(1-\alpha) + d_{2E}\alpha)/(d_{4\rho}(1-\alpha) + d_{3\rho}\alpha))^{1/2} \times \\ & \times (\zeta_n^2/(d_{4l}(1-\alpha) + d_{3l}\alpha)^2), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{n\alpha} = & ((d_{4r}(1-\alpha) + d_{3r}\alpha)/2)((d_{4E}(1-\alpha) + d_{3E}\alpha)/(d_{1\rho}(1-\alpha) + d_{2\rho}\alpha))^{1/2} \times \\ & \times (\zeta_n^2/(d_{1l}(1-\alpha) + d_{2l}\alpha)^2); \end{aligned}$$

– для случая стержней прямоугольного сечения, характеризуемых нечеткими экзогенными параметрами $\tilde{E}, \tilde{\rho}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{I}$ с соответствующими нормальным распределениям функциями принадлежности

$$\begin{aligned}\underline{\omega}_{n\alpha} &= ((m_a + 2\sigma_a^2 \ln \alpha) / 2)((m_E + 2\sigma_E^2 \ln \alpha) / (3(m_\rho - 2\sigma_\rho^2 \ln \alpha)))^{1/2} \times \\ &\quad \times (\zeta_n^2 / (m_l - 2\sigma_l^2 \ln \alpha)^2), \\ \overline{\omega}_{n\alpha} &= ((m_a - 2\sigma_a^2 \ln \alpha) / 2)((m_E - 2\sigma_E^2 \ln \alpha) / (3(m_\rho + 2\sigma_\rho^2 \ln \alpha)))^{1/2} \times \\ &\quad \times (\zeta_n^2 / (m_l + 2\sigma_l^2 \ln \alpha)^2); \end{aligned} \quad (2.17)$$

– для случая стержней кругового сечения, характеризуемых нечеткими экзогенными параметрами $\tilde{E}, \tilde{\rho}, \tilde{r}, \tilde{I}$ с соответствующими нормальным распределениям функциями принадлежности

$$\begin{aligned}\underline{\omega}_{n\alpha} &= ((m_r + 2\sigma_r^2 \ln \alpha) / 2)((m_E + 2\sigma_E^2 \ln \alpha) / (m_\rho - 2\sigma_\rho^2 \ln \alpha))^{1/2} \times \\ &\quad \times (\zeta_n^2 / (m_l - 2\sigma_l^2 \ln \alpha)^2), \\ \overline{\omega}_{n\alpha} &= ((m_r - 2\sigma_r^2 \ln \alpha) / 2)((m_E - 2\sigma_E^2 \ln \alpha) / (m_\rho + 2\sigma_\rho^2 \ln \alpha))^{1/2} \times \\ &\quad \times (\zeta_n^2 / (m_l + 2\sigma_l^2 \ln \alpha)^2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

В качестве примера расчетов по представленной методике рассмотрены стержни из алюминия [349], для которых нечетко-интервальные представления неконтрастных экзогенных параметров представлены в таблице 2.1, а в случае их задания нечеткими гауссовыми числами

$$m_E = 7.1 \cdot d_*, \sigma_E^2 = 100; m_\rho = 2.70 \cdot 10^3, \sigma_\rho^2 = 25; m_a = 1.0 \cdot 10^{-2}, \sigma_a^2 = 10^{-6}; \quad (2.19)$$

$$m_b = 1.0 \cdot 10^{-2}, \sigma_b^2 = 10^{-6}; m_r = 1.0 \cdot 10^{-2}, \sigma_r^2 = 10^{-6}; m_l = 1, \sigma_l^2 = 4 \cdot 10^{-4}; d_* = 10^{10}.$$

Величины перечисленных характеристик даются в системе СИ.

В частном случае применения описанной методики для нечеткого оценивания значений низших собственных частот изгибных колебаний алюминиевых консольных стержней прямоугольного и кругового сечения с описанными нечетко-интервальными экзогенными параметрами, вид функции принадлежности для нечетко-множественной величины $\tilde{\omega}_1$, определяемый соотношениями (2.15), (2.16), соответственно представлен на рис. 2.1 и 2.2.

Описания нечетко-интервальных
экзогенных параметров рассматриваемой модели

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры					
	\tilde{E} [10^{10} Па]	$\tilde{\rho}$ [10^3 кг/м ³]	\tilde{a} [10^{-2} м]	\tilde{b} [10^{-2} м]	\tilde{l} [м]	\tilde{r} [10^{-2} м]
γ_1	6.9	2.67	.99	.99	0.98	.99
γ_2	7.05	2.69	1.0	1.0	0.99	1.0
γ_3	7.15	2.71	1.1	1.1	1.01	1.1
γ_4	7.25	2.72	1.2	1.2	1.03	1.2

В случае использования нечетко-множественных экзогенных характеристик стержня кругового сечения с нормальными распределениями и задаваемыми в (2.18) параметрами, определяемая соотношениями (16) функция принадлежности для $\tilde{\omega}_1$ имеет вид, представленный на рис. 2.3.

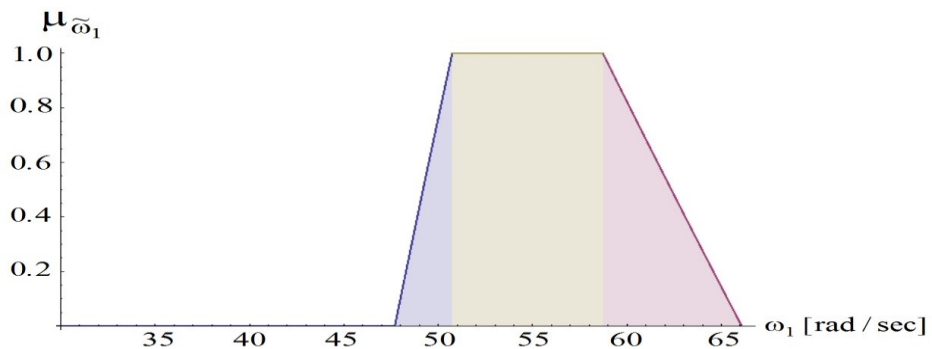


Рис. 2.1. Вид функции принадлежности для $\tilde{\omega}_1$ в случае стержня прямоугольного сечения с нечетко-интервальным заданием экзогенных параметров.

Полученные оценки позволяют, в частности, сделать выводы о диапазонах наиболее достоверных значений собственных частот поперечных колебаний конструктивных элементов рассматриваемого типа, а также о границах

предельно возможных разбросов в их значениях при наличии погрешностей в задании исходных величин физико-механических параметров.

Возможности получения данных оценок позволяют повысить достоверность результатов предпроектного моделирования эксплуатационных характеристик стержневых конструкций.

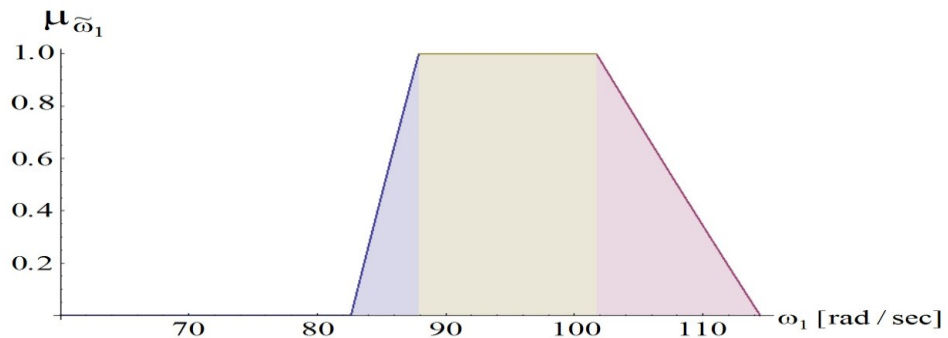


Рис. 2.2. Вид функции принадлежности для $\tilde{\omega}_1$ в случае стержня кругового сечения с нечетко-интервальным заданием экзогенных параметров

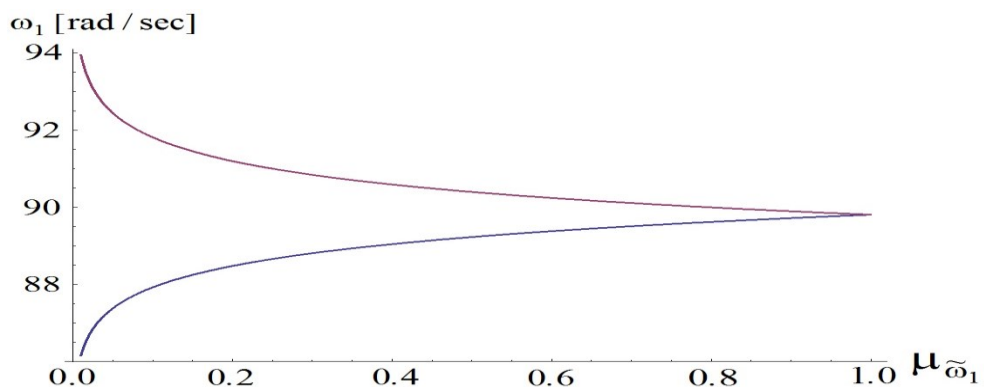


Рис.2.3. Вид функции принадлежности для $\tilde{\omega}_1$ в случае стержня кругового сечения с нечеткими экзогенными параметрами (случай функций принадлежности, соответствующих нормальным распределениям).

2.2. Нечетко-множественный анализ моделей устойчивости стержневых конструкций

Важным аспектом весьма широкого круга исследований по проблемам прочности и надежности тонкостенных конструкций является исследование их устойчивости деформируемых стержневых конструкций при эффективном

корректном учете факторов разброса значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров в используемых расчетных моделях. В этой связи, в данном подразделе работы для анализа задач устойчивости прямых однородных центрально-нагруженных стержней с учетом факторов неопределенности в виде отклонений в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров разрабатывается методика использования аппарата нечетко-множественного анализа. Исследуемые задачи формулируются в рамках модели Эйлера, описывающей эффекты потери устойчивости прямых тонких сжимаемых изотропных стержней в соответствии с гипотезой линейного докритического напряженно-деформированного состояния. Разрабатываемый подход базируется на применении расчетных аналитических соотношений детерминистических версий рассматриваемых вариантов модели для эндогенных параметров критических сжимающих усилий и внутренних напряжений процедуре перехода в этих соотношениях к нечетко-множественным аргументам на базе применения альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения.

Результаты аналитического исследования детерминистических версий прикладных математических моделей устойчивости однородных по длине сжатых в осевом направлении тонких прямых стержней при различных вариантах задания краевых условий описаны, в частности, в работах [7, 68, 285, 295]. Они базируются на гипотезах деформирования стержней в пределах линейной модели упругого напряженного состояния и предполагают задание в расчетах точных значений исходных геометрических и физико-механических параметров рассматриваемых конструкций. Применительно к однородным по длине стержням с различными видами граничных условий на концах получены аналитические представления для критических значений сжимающих усилий P_* и критических уровней внутренних продольных напряжений σ_* , описываемые обобщенными выражениями

$$P_* = EI_{\min} \pi^2 (\eta l^2)^{-1}, \quad \sigma_* = P_* F^{-1}, \quad (2.20)$$

в которых F – площадь поперечного сечения рассматриваемого стержня; l – длина стержня; I_{\min} – минимальный изгибный (осевой) момент инерции его поперечного сечения; η – параметр, который принимает значение $\eta=1$ в случае шарнирного закрепления обоих концов стержня; $\eta=4$ в случае закрепления одного из концов и свободного противоположного конца; $\eta=0.25$ для стержня, один конец которого закреплен и неподвижен, а противоположный защемлен в подвижной опоре; $\eta=(\pi/\vartheta)^2 \approx 0.4888$, где $\vartheta \approx 4.4934$ и является наименьшим корнем трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \vartheta = \vartheta, \quad (2.21)$$

в случае, когда один конец стержня жестко закреплен, а противоположный имеет шарнирную опору. В соотношения расчетных алгоритмов критических усилий включаются формулы вычисления моментов инерции и площадей для рассматриваемых геометрических типов сечений. В частности, при отнесении сечений отдельных типов рассматриваемых однородных по длине прямых стержней к вводимым в сечениях Ω прямоугольным Ox_1x_2 и полярным $Or\theta$ центральным координатам, описания Ω , а также величины F и I_{\min} имеют следующий вид:

– для кольцевых сечений

$$\Omega = \{r \in [R_1, R_2]; \theta \in [0, 2\pi]\}, \quad F = \pi(R_2^2 - R_1^2), \quad I_{\min} = \pi(R_2^4 - R_1^4)/4; \quad (2.22)$$

– для прямоугольных сечений

$$\Omega = \{x_1 \in [-b/2, b/2]; x_2 \in [-h/2, h/2]\} \quad (h > b), \quad F = bh, \quad I_{\min} = bh^3/12; \quad (2.23)$$

– для равнобедренных треугольных сечений с основанием b_1 и высотой h_1

$$\Omega = \{x_1 \in [-b_1/2, b_1/2]; x_2 \in [-h_1(1-2x_1/b_1), h_1(1-2x_1/b_1)]\}, \quad F = b_1h_1/2, \quad I_{\min} = b_1h_1^3/36. \quad (2.24)$$

Соответственно, представления для интенсивностей критических сжимающих усилий и критических уровней внутренних напряжений применительно к стержням с указанными формами сечений имеют вид:

– для стержней концентрического кольцевого сечения

$$P_{*,r} = \Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta) = \pi^3 E (R_2^4 - R_1^4) (4\eta l^2)^{-1}, \quad \sigma_{*,r} = Y_r(E, l, R_1, R_2, \eta) = \pi^2 E (R_2^2 + R_1^2) (4\eta l^2)^{-1}; \quad (2.25)$$

– для стержней прямоугольного сечения

$$P_{*s} = \Phi_s(E, l, b, h, \eta) = \pi^2 E b h^3 (12\eta l^2)^{-1}, \quad \sigma_{*s} = Y_s(E, l, b, h, \eta) = \pi^2 E h^2 (12\eta l^2)^{-1}; \quad (2.26)$$

– для стержней равнобедренного треугольного сечения

$$P_{*t} = \Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta) = \pi^2 E b_1 h_1^3 (36\eta l^2)^{-1}, \quad \sigma_{*t} = Y_t(E, l, b_1, h_1, \eta) = \pi^2 E h_1^2 (18\eta l^2)^{-1}. \quad (2.27)$$

При этом, в частности, для обеспечения совпадения величин параметров F , I_{\min} кольцевого и треугольного сечений с параметрами F , I_{\min} прямоугольного сечения при $b=h$, у кольцевого и треугольного сечений соответствующие геометрические параметры должны иметь вид:

$$R_2 = b((3^{-1} + \pi^{-1})/2)^{1/2}, \quad R_1 = b((3^{-1} - \pi^{-1})/2)^{1/2}; \quad b_1 = (8/3)^{1/2} b, \quad h_1 = (3/2)^{1/2} b. \quad (2.28)$$

Функции $\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)$, $\Phi_s(E, l, b, h, \eta)$, $\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)$, вводимые представлениями (2.25) – (2.27), в соответствующих областях определения обладают следующими свойствами, используемыми далее при переходе в данных функциональных отображениях к аргументам нечетко-множественного типа:

$$\begin{aligned} \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial E > 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial l < 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_1 < 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_2 > 0; \\ \partial\Phi_s(E, l, b, h, \eta)/\partial E > 0, \quad \partial\Phi_s(E, l, b, h, \eta)/\partial l < 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, b, h, \eta)/\partial b > 0, \quad \partial\Phi_r(E, l, b, h, \eta)/\partial h > 0; \quad (2.29) \\ \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial E > 0, \quad \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial l < 0, \quad \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial b_1 > 0, \quad \partial\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial h_1 > 0; \\ \partial Y_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial E > 0, \quad \partial Y_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial l < 0, \quad \partial Y_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_1 > 0, \quad \partial Y_r(E, l, R_1, R_2, \eta)/\partial R_2 > 0; \\ \partial Y_s(E, l, b, h, \eta)/\partial E > 0, \quad \partial Y_s(E, l, b, h, \eta)/\partial l < 0, \quad \partial Y_s(E, l, b, h, \eta)/\partial b > 0, \quad \partial Y_s(E, l, b, h, \eta)/\partial h > 0; \\ \partial Y_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial E > 0, \quad \partial Y_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial l < 0, \quad \partial Y_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial b_1 > 0, \quad \partial Y_t(E, l, b_1, h_1, \eta)/\partial h_1 > 0. \end{aligned}$$

Получение нечетко-множественных описаний для величин критических уровней сжимающих усилий и внутренних осевых напряжений осуществляется на основе предварительной фаззификации исходных физико-механических параметров стержней с оговоренными технологическими допусками и разбросами экспериментальных значений, и последующей реализации перехода к нечетко-множественным аргументам в аналитических соотношениях детерминистических версий рассматриваемых моделей с применения альфа-уровневой модифицированной формы эвристического принципа обобщения. Получаемые оценки для стержней со сходными интегральными параметрами площадей и минимальных моментов инерции поперечных сечений в существенной мере зависят от их конкретной геометрической формы сечений.

В процессе расширения области определения функциональных соотношений (2.25) – (2.27) реализуется замена аргументов $E, l, R_1, R_2, b, h, b_1, h_1$ на нечетко-множественные величины $\tilde{E}, \tilde{l}, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2, \tilde{b}, \tilde{h}, \tilde{b}_1, \tilde{h}_1$, и при этом принимается гипотеза описания неопределенных исходных физико-механических и геометрических параметров стержней трапецеидальными нормальными нечеткими интервалами с заданием соответствующих кортежей из граничных значений интервалов носителей и граничных значений модальных интервалов и разложений по α – срезам:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4; \\ \tilde{l} &= (l_1, l_2, l_3, l_4), \quad \tilde{l} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha], \quad \underline{l}_\alpha = (1-\alpha)l_1 + \alpha l_2, \quad \bar{l}_\alpha = \alpha l_3 + (1-\alpha)l_4; \quad (2.30) \\ \tilde{R}_1 &= (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}), \quad \tilde{R}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}], \quad \underline{R}_{1\alpha} = (1-\alpha)R_{11} + \alpha R_{12}, \quad \bar{R}_{1\alpha} = \alpha R_{13} + (1-\alpha)R_{14}; \\ \tilde{R}_2 &= (R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{24}), \quad \tilde{R}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{2\alpha}, \bar{R}_{2\alpha}], \quad \underline{R}_{2\alpha} = (1-\alpha)R_{21} + \alpha R_{22}, \quad \bar{R}_{2\alpha} = \alpha R_{23} + (1-\alpha)R_{24}; \\ \tilde{b} &= (b_1, b_2, b_3, b_4), \quad \tilde{b} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \quad \underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \bar{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4; \\ \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4; \\ \tilde{b}_1 &= (b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}), \quad \tilde{b}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_{1\alpha}, \bar{b}_{1\alpha}], \quad \underline{b}_{1\alpha} = (1-\alpha)b_{11} + \alpha b_{12}, \quad \bar{b}_{1\alpha} = \alpha b_{13} + (1-\alpha)b_{14}; \\ \tilde{h}_1 &= (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}), \quad \tilde{h}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}], \quad \underline{h}_{1\alpha} = (1-\alpha)h_{11} + \alpha h_{12}, \quad \bar{h}_{1\alpha} = \alpha h_{13} + (1-\alpha)h_{14}. \end{aligned}$$

Получаемые в рамках использования α –уровневой формы эвристического принципа обобщения представления для нечетко-множественных эндогенных параметров рассматриваемых расчетных моделей соответственно записываются в виде:

$$\tilde{P}_{*j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{*j\alpha}, \bar{P}_{*j\alpha}], \quad \tilde{\sigma}_{*j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{*j\alpha}, \bar{\sigma}_{*j\alpha}] \quad (j = r, s, t). \quad (2.31)$$

При этом с учетом справедливых во всех областях определения функций $\Phi_r(E, l, R_1, R_2, \eta)$, $\Phi_s(E, l, b, h, \eta)$, $\Phi_t(E, l, b_1, h_1, \eta)$ оценок (2.29) выражения для величин $\underline{P}_{*j\alpha}$, $\bar{P}_{*j\alpha}$, $\underline{\sigma}_{*j\alpha}$, $\bar{\sigma}_{*j\alpha}$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
\underline{P}_{*r\alpha} &= \Phi_r(\underline{E}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \bar{R}_{1\alpha}, \underline{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^3 \underline{E}_\alpha (\underline{R}_{2\alpha}^4 - \bar{R}_{1\alpha}^4) (4\eta \bar{l}_\alpha^2)^{-1}, \quad \bar{P}_{*r\alpha} = \Phi_r(\bar{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^3 \bar{E}_\alpha (\bar{R}_{2\alpha}^4 - \underline{R}_{1\alpha}^4) (4\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
\underline{P}_{*s\alpha} &= \Phi_s(\underline{E}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \underline{b}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{b}_\alpha \underline{h}_\alpha^3 (12\eta \bar{l}_\alpha^2)^{-1}, \quad \bar{P}_{*s\alpha} = \Phi_s(\bar{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \bar{b}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \bar{E}_\alpha \bar{b}_\alpha \bar{h}_\alpha^3 (12\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \quad (2.32) \\
\underline{P}_{*t\alpha} &= \Phi_t(\underline{E}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \underline{b}_{1\alpha}, \underline{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{b}_{1\alpha} \underline{h}_{1\alpha}^3 (36\eta \bar{l}_\alpha^2)^{-1}, \quad \bar{P}_{*t\alpha} = \Phi_t(\bar{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \bar{b}_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \bar{E}_\alpha \bar{b}_{1\alpha} \bar{h}_{1\alpha}^3 (36\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
\underline{\sigma}_{*r\alpha} &= Y_r(\underline{E}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \underline{R}_{1\alpha}, \underline{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha (\underline{R}_{2\alpha}^2 + \bar{R}_{1\alpha}^2) (4\eta \bar{l}_\alpha^2)^{-1}, \quad \bar{\sigma}_{*r\alpha} = Y_r(\bar{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \bar{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{2\alpha}, \eta) = \pi^2 \bar{E}_\alpha (\bar{R}_{2\alpha}^2 + \underline{R}_{1\alpha}^2) (4\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \\
\underline{\sigma}_{*s\alpha} &= Y_s(\underline{E}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 (12\eta \bar{l}_\alpha^2)^{-1}, \quad \bar{\sigma}_{*s\alpha} = Y_s(\bar{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \eta) = \pi^2 \bar{E}_\alpha \bar{h}_\alpha^2 (12\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}; \quad (2.33) \\
\underline{\sigma}_{*t\alpha} &= Y_t(\underline{E}_\alpha, \bar{l}_\alpha, \underline{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \underline{E}_\alpha \underline{h}_{1\alpha}^2 (18\eta \bar{l}_\alpha^2)^{-1}, \quad \bar{\sigma}_{*t\alpha} = Y_t(\bar{E}_\alpha, \underline{l}_\alpha, \bar{h}_{1\alpha}, \eta) = \pi^2 \bar{E}_\alpha \bar{h}_{1\alpha}^2 (18\eta \underline{l}_\alpha^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Соотношения (2.32) и (2.33) являются базовыми для получения численных нечетко-множественных оценок факторов неопределенности в рассматриваемых моделях. Описываемая методика, в качестве примера, реализована в задачах оценки показателей интенсивности критических сжимающих усилий и внутренних напряжений в стальных стержнях с нечетко-интервальными физико-механическими и геометрическими исходными параметрами, описываемыми таблицами 2.2 и 2.3. Представленный вариант выбора нечетко-интервальных исходных параметров отвечает условию совпадения интегральных характеристик площадей и моментов инерции поперечных сечений для стержней с тремя рассматриваемыми типами геометрии сечений. Результаты расчетов функций принадлежности для нечетко-множественных величин \tilde{P}_{*j} , $\tilde{\sigma}_{*j}$ ($j = r, s, t$) с использованием представлений (2.32) в случае шарнирного закрепления обоих концов стержня ($\eta = 1$) представлены на рисунках 2.4 – 2.5 для стержня кольцевого сечения, на рисунках 2.6 – 2.7 – для стержня квадратного сечения, на рисунках 2.8 – 2.9 – для стержня с равнобедренным треугольным сечением.

Анализ профилей функций принадлежности позволяет сделать заключения относительно степени уверенности в возможности достижения эндогенными параметрами соответствующих значений из интервалов носителей описываемых нечетких множеств для рассматриваемого варианта неконтрастных исходных параметров расчетной модели.

Таблица 2.2.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры			
	\tilde{E} [10^{10} Па]	\tilde{l} [м]	\tilde{R}_1 [10^{-4} м]	\tilde{R}_2 [10^{-3} м]
γ_1	19.7	1.95	4.30	2.83
γ_2	19.9	1.99	4.33	2.85
γ_3	20.0	2.02	4.35	2.87
γ_4	20.2	2.06	4.38	2.91

Таблица 2.3.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры			
	$E \cdot 10^{10}$ [Па]	\tilde{h} [10^{-3} м]	\tilde{b}_1 [10^{-3} м]	\tilde{h}_1 [10^{-3} м]
γ_1	4.9	4.9	8.15	6.11
γ_2	5.0	5.0	8.16	6.12
γ_3	5.05	5.05	8.18	6.13
γ_4	5.15	5.15	8.195	6.15

При задании исходных нечетко-интервальных параметров в виде (2.33) их максимальные разбросы относительно медианных значений на носителях составляют не более 0.9% для исходного параметра R_1 ; не более 1.4% – для исходного параметра R_2 ; не более 2.5% – для исходных параметров b и h ; не более 0.3% – для исходных параметров b_1 и h_1 ; не более 1.3% – для исходного параметра E ; не более 2.7% – для исходного параметра l . В аналогичной последовательности на рисунках 2.10 – 2.15 приведены результаты расчетов профилей функций принадлежности для нечетко-множественных эндогенных

характеристик \tilde{P}_{*j} , $\tilde{\sigma}_{*j}$ применительно к случаю закрепления одного из концов стержня и его свободного противоположного конца ($\eta=4$). Рисунки 2.16 – 2.21 описывают результаты расчетов для стержня, один конец которого закреплен и неподвижен, а противоположный зашкелен в подвижной опоре ($\eta=0.25$). Наконец, рисунки 2.22 – 2.27 отвечают случаю стержня, один конец которого жестко закреплен, а противоположный имеет шарнирную опору ($\eta=0.48$).

В результате расчетов получены данные об оцениваемых максимальных (предельно возможных) разбросах для эндогенных параметров рассматриваемых моделей относительно соответствующих средних значений на носителях и данные о максимальных разбросах для анализируемых характеристик относительно соответствующих средних значений на модальных интервалах (в диапазонах наиболее достоверных значений). Найденные оценки не зависят от значений параметра краевых условий η . Так, параметр критического сжимающего усилия \tilde{P}_r для стержня кольцевого сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 12.3%, а на модальном интервале – порядка 3.1%;

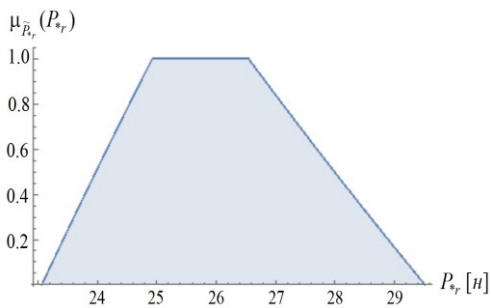


Рис. 2.4. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_r}(P_{*r})$ для $\eta=1$.

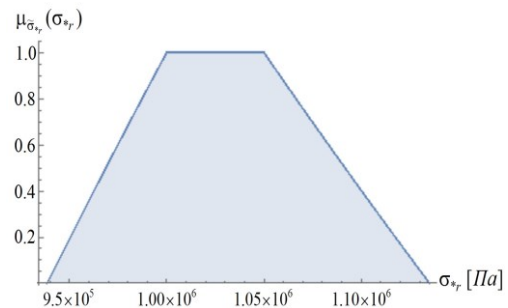


Рис. 2.5. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_r}(\sigma_{*r})$ для $\eta=1$.

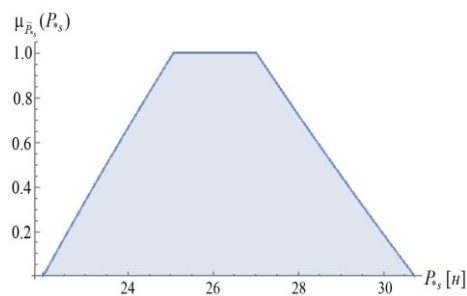


Рис. 2.6. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_s}(P_{*s})$ для $\eta=1$.

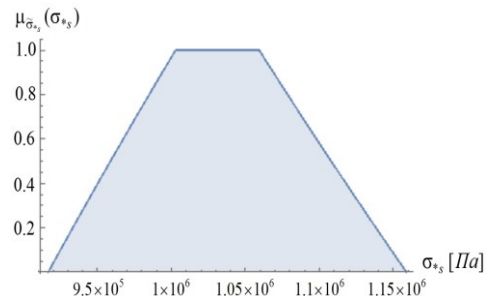


Рис. 2.7. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_s}(\sigma_{*s})$ для $\eta=1$.

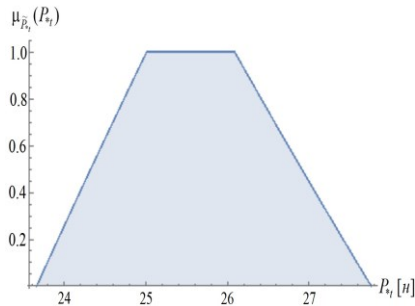


Рис. 2.8. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_t}(P_t)$ для $\eta = 1$.

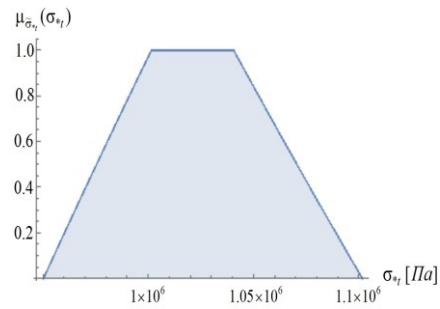


Рис. 2.9. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ для $\eta = 1$.

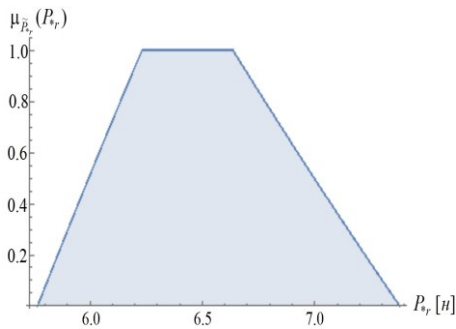


Рис. 2.10. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 4$.

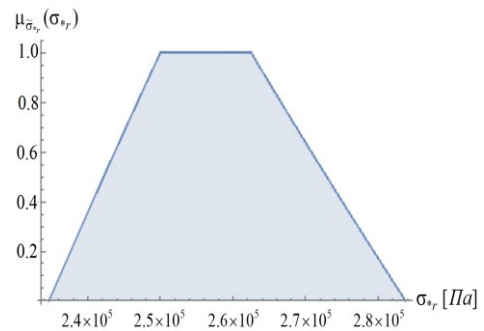


Рис. 2.11. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ для $\eta = 4$.



Рис. 2.12. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 4$.

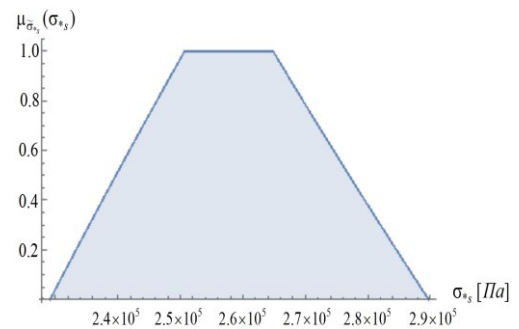


Рис. 2.13. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ для $\eta = 4$.

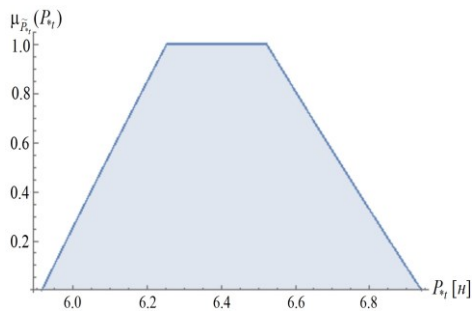


Рис. 2.14. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*t}}(P_{*t})$ для $\eta = 4$.

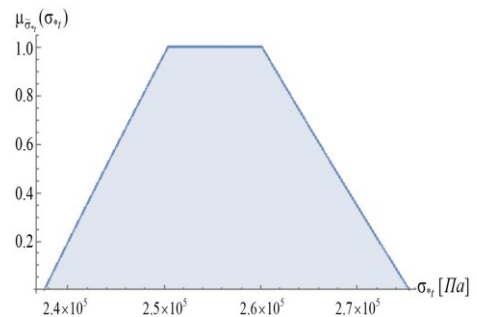


Рис. 2.15. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ для $\eta = 4$.

параметр \tilde{P}_{*s} для стержня квадратного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 16.5%, а на модальном интервале – порядка 3.7%; параметр \tilde{P}_{*r} для стержня треугольного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 7.9%, а на модальном интервале порядка 1.1%. Для эндогенных параметров критических значений внутренних напряжений определяемые разбросы таковы: параметр $\tilde{\sigma}_{*r}$ для стержня кольцевого сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 9.5%, а на модальном интервале – порядка 2.4%; параметр $\tilde{\sigma}_{*s}$ для стержня квадратного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 11.7%, а на модальном интервале порядка 2.7%; параметр $\tilde{\sigma}_{*t}$ для стержня треугольного сечения имеет максимальный разброс на интервале носителя порядка 7.4%, а на модальном интервале – порядка 1.9%. Можно сделать заключение о максимальных разбросах анализируемых характеристик для стержня квадратного сечения и минимальных – для стержня равнобедренного треугольного сечения.

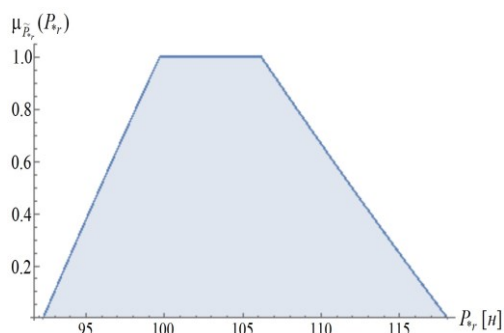


Рис. 2.16. Профиль функции

принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 0.25$.

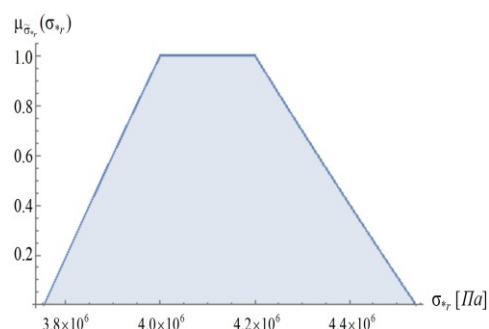


Рис. 2.17. Профиль функции

принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ для $\eta = 0.25$.

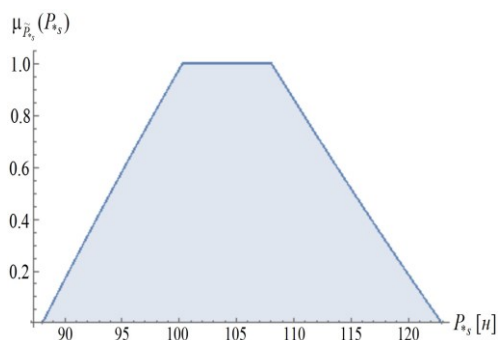


Рис. 2.18. Профиль функции

принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 0.25$.

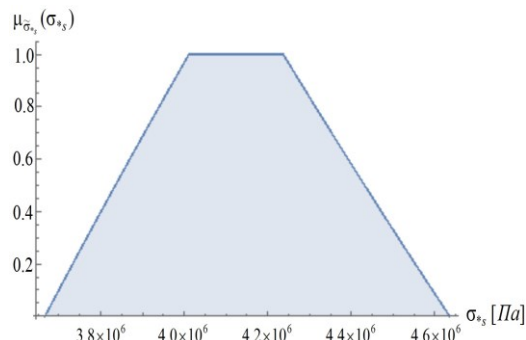


Рис. 2.19. Профиль функции

принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ для $\eta = 0.25$.

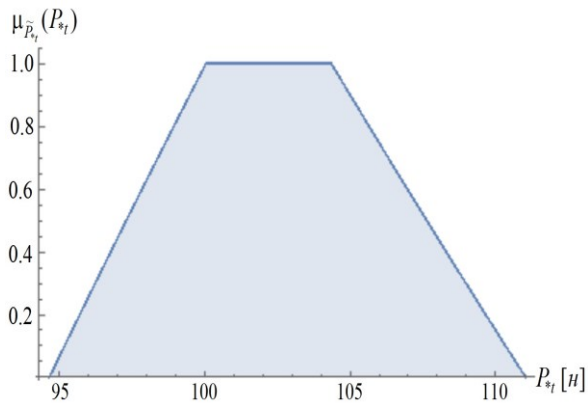


Рис. 2.20. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 0.25$.

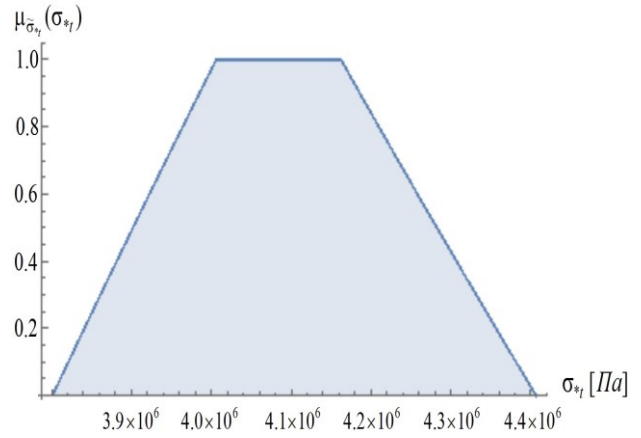


Рис. 2.21. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ для $\eta = 0.25$.

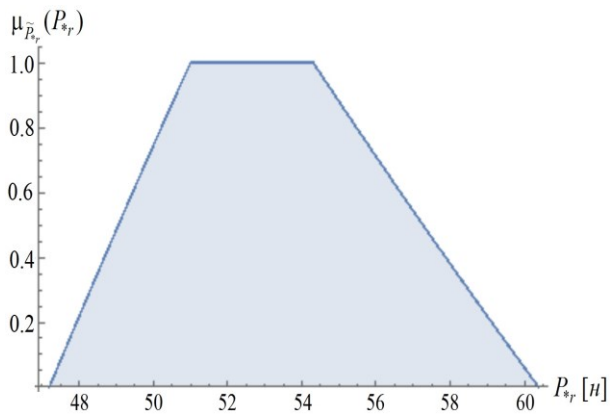


Рис. 2.22. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*r}}(P_{*r})$ для $\eta = 0.48$.

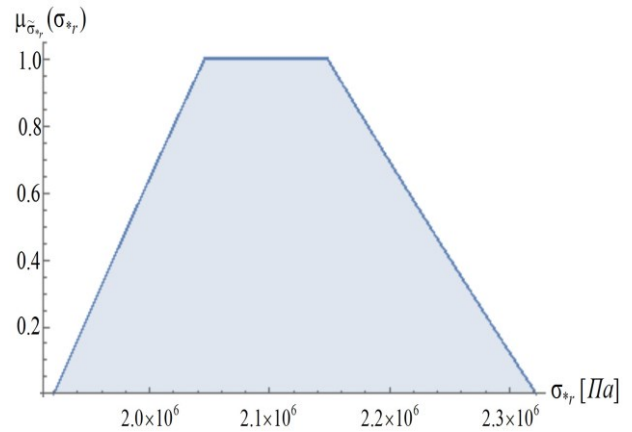


Рис. 2.23. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*r}}(\sigma_{*r})$ для $\eta = 0.48$.

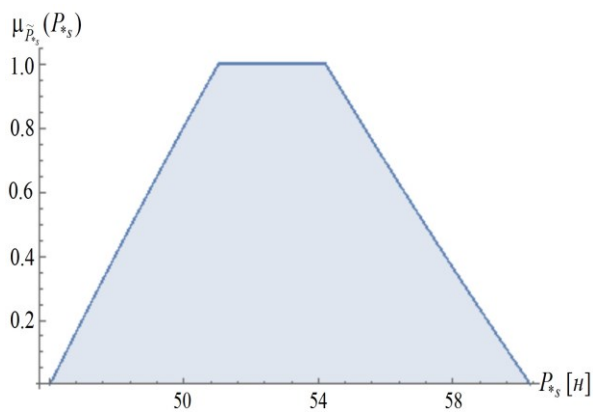


Рис. 2.24. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*s}}(P_{*s})$ для $\eta = 0.48$.

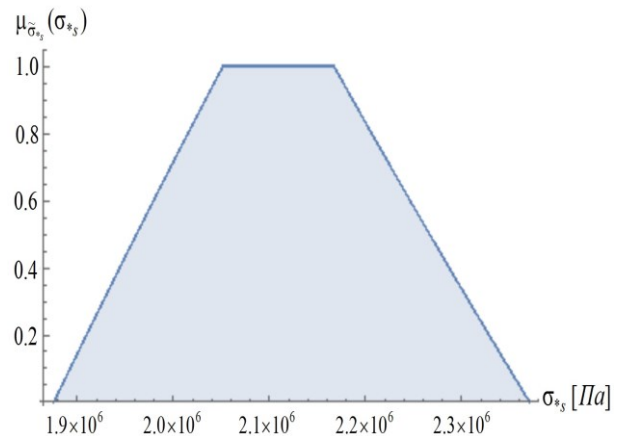


Рис. 2.25. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*s}}(\sigma_{*s})$ для $\eta = 0.48$.

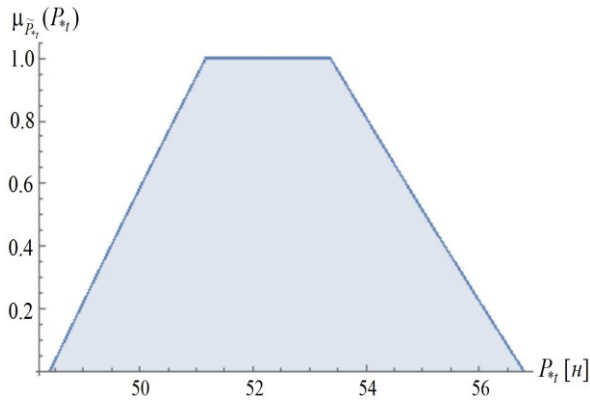


Рис. 2.26. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_{*t}}(P_{*t})$ для $\eta = 0.48$.

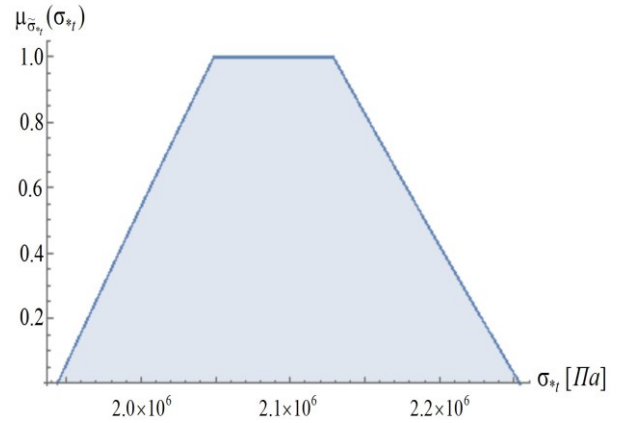


Рис. 2.27. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_{*t}}(\sigma_{*t})$ для $\eta = 0.48$.

2.3. Нечетко-множественные оценки скоростей волн кручения в тонкостенных стержнях на основе уточненных теорий

Исследования, представленные в данном подразделе, посвящены распространению численно-аналитической нечетко-множественной методики получения оценок для значений скоростей волн деформаций в тонкостенных конструкциях на случай анализа волн крутильного типа в прямых стержнях с неопределенными параметрами на базе использования трех последовательно рассматриваемых вариантов уточненных теорий [64, 102, 107–108, 112]. Разрабатываемый подход позволяет учитывать разбросы величин экзогенных физико-механических и геометрических параметров в рассматриваемых моделях и основывается на использовании модифицированных версий эвристического принципа обобщения в процессе перехода в соотношения классических моделей расчета фазовых скоростей к нечетко-множественным аргументам с различными видами функций принадлежности.

В рамках уточненной модели С.П. Тимошенко, описывающей распространение крутильных волн в однородном изотропном стержне с полярным моментом инерции I_r , крутильным моментом инерции I_x , секториальным моментом инерции I_ω , из материала с параметром плотности ρ , модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и соответствующим модулем сдвига

$G = E(2(1+\nu))^{-1}$, дисперсионное уравнение для волны кручения с круговой частотой ω и волновым числом k , а также представление для фазовых скоростей V_f исследуемых волн имеют вид

$$\omega = \omega(k) = (GI_x / \rho I_r)^{1/2} k (1 + (EI_\omega / GI_x)k^2)^{1/2}, \quad (2.34)$$

$$V_f = F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) = (GI_x / \rho I_r)^{1/2} (1 + (EI_\omega / GI_x)k^2)^{1/2}. \quad (2.35)$$

В рамках предположения о существовании разбросов в значениях экзогенных физико-механических и геометрических параметров стержня $\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega$, содержащихся в представлении (2.35) для эндогенной характеристики V_f , осуществляется переход к описанию указанных исходных параметров нормальными нечеткими множествами $\tilde{\rho}, \tilde{\nu}, \tilde{E}, \tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$, дополняемый гипотезами о формах функций принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}(\rho), \mu_{\tilde{\nu}}(\nu), \mu_{\tilde{E}}(E)$, а также о формах функций принадлежности для определяющих вид $\tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$ нечетко-множественных геометрических параметров стержней с рассматриваемыми конкретными формами поперечных сечений. Количественные характеристики функций принадлежности соответствующих профилей определяются на основе имеющихся статических данных либо экспертных заключений.

Реализация описываемого подхода применительно ко всем вариантам рассматриваемых в данном подразделе работы моделей осуществляется для частного случая однородного изотропного стержня двутаврового сечения [107]. В рассматриваемом варианте представленная на рисунке 2.28 форма сечения определяется тремя параметрами B, h, t , через которые три геометрические характеристики I_r, I_x, I_ω выражаются формулами [107]

$$I_r = (B(h+t)^3 + 2tB^3 + (h-t)t^3 - (b-t)(h-t)^3)/12, \quad I_x = (2B+h)t^3/3, \quad I_\omega = B^3h^2t/24. \quad (2.36)$$

Соотношения (2.36) могут интерпретироваться как преобразования независимых переменных. В дальнейшем для параметров B, h, t также вводятся их обобщенные учитывающие разбросы представления в виде нормальных нечетких множеств $\tilde{B}, \tilde{h}, \tilde{t}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(B), \mu_{\tilde{h}}(h), \mu_{\tilde{t}}(t)$.

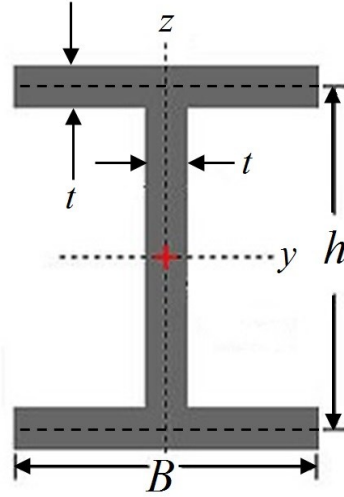


Рис. 2.28. Геометрические параметры двутаврового сечения.

В рассматриваемом варианте методики оценивания разбросов для значений фазовых скоростей волн кручения в стержневой конструкции вводится предположение об описании нечетко-множественных физико-механических $\tilde{\rho}, \tilde{\nu}, \tilde{E}$ и геометрических $\tilde{B}, \tilde{h}, \tilde{t}$ параметров нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами с кортежами реперных точек и разложениями по множествам α – уровня

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \bar{\rho}_\alpha = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4; \quad (2.37)$$

$$\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \quad \underline{\nu}_\alpha = (1-\alpha)\nu_1 + \alpha\nu_2, \quad \bar{\nu}_\alpha = \alpha\nu_3 + (1-\alpha)\nu_4;$$

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4;$$

$$\tilde{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4), \quad \tilde{B} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha], \quad \underline{B}_\alpha = (1-\alpha)B_1 + \alpha B_2, \quad \bar{B}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4;$$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4;$$

$$\tilde{t} = (t_1, t_2, t_3, t_4), \quad \tilde{t} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{t}_\alpha, \bar{t}_\alpha], \quad \underline{t}_\alpha = (1-\alpha)t_1 + \alpha t_2, \quad \bar{t}_\alpha = \alpha t_3 + (1-\alpha)t_4.$$

Получаемые на основе перехода к нечетко-интервальным аргументам в соотношениях (2.36) и использования правил арифметики нечетких интервалов нечетко-множественные геометрические характеристики $\tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$, также являются нечетко-интервальными величинами с кортежами реперных точек

$$\tilde{I}_r = (I_{r1}, I_{r2}, I_{r3}, I_{r4}), \quad \tilde{I}_x = (I_{x1}, I_{x2}, I_{x3}, I_{x4}), \quad \tilde{I}_\omega = (I_{\omega1}, I_{\omega2}, I_{\omega3}, I_{\omega4}), \quad (2.38)$$

$$I_{r1} = (B_1(h_1 + t_1)^3 + 2t_1B_1^3 + (h_1 - t_4)t_1^3 - (B_4 - t_1)(h_4 - t_1)^3)/12,$$

$$I_{r2} = (B_2(h_2 + t_2)^3 + 2t_2B_2^3 + (h_2 - t_3)t_2^3 - (B_3 - t_2)(h_3 - t_2)^3)/12,$$

$$I_{r3} = (B_3(h_3 + t_3)^3 + 2t_3B_3^3 + (h_3 - t_2)t_3^3 - (B_2 - t_3)(h_2 - t_3)^3)/12,$$

$$I_{r4} = (B_4(h_4 + t_4)^3 + 2t_4B_4^3 + (h_4 - t_1)t_4^3 - (B_1 - t_4)(h_1 - t_4)^3)/12;$$

$$I_{x1} = (2B_1 + h_1)t_1^3/3, \quad I_{x2} = (2B_2 + h_2)t_2^3/3, \quad I_{x3} = (2B_3 + h_3)t_3^3/3, \quad I_{x4} = (2B_4 + h_4)t_4^3/3;$$

$$I_{\omega1} = B_1^3h_1^2t_1/24, \quad I_{\omega2} = B_2^3h_2^2t_2/24, \quad I_{\omega3} = B_3^3h_3^2t_3/24, \quad I_{\omega4} = B_4^3h_4^2t_4/24,$$

и, в свою очередь, описываются суперпозициями множеств α – уровня

$$\tilde{I}_r = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [I_{r\alpha}, \bar{I}_{r\alpha}], \quad I_{r\alpha} = (1 - \alpha)I_{r1} + \alpha I_{r2}, \quad \bar{I}_{r\alpha} = \alpha I_{r3} + (1 - \alpha)I_{r4}, \quad (2.39)$$

$$\tilde{I}_x = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [I_{x\alpha}, \bar{I}_{x\alpha}], \quad I_{x\alpha} = (1 - \alpha)I_{x1} + \alpha I_{x2}, \quad \bar{I}_{x\alpha} = \alpha I_{x3} + (1 - \alpha)I_{x4},$$

$$\tilde{I}_\omega = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [I_{\omega\alpha}, \bar{I}_{\omega\alpha}], \quad I_{\omega\alpha} = (1 - \alpha)I_{\omega1} + \alpha I_{\omega2}, \quad \bar{I}_{\omega\alpha} = \alpha I_{\omega3} + (1 - \alpha)I_{\omega4}.$$

Процедура получения параметрических нечетких оценок $\tilde{V}_f(k)$ на основе применения модифицированной α –уровневой формы эвристического принципа расширения в представлениях (2.36) реализуется с оценок, справедливых во всей области определения аргументов функции $V_f = F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k)$:

$$\partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial \rho < 0; \quad \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial E > 0; \quad (2.40)$$

$$\partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial I_r < 0; \quad \partial F_V(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial I_\omega > 0.$$

В результате для эндогенной нечетко-множественной характеристики $\tilde{V}_f(k)$ записывается параметрическое представление вида

$$\tilde{V}_f(k) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{f\alpha}(k), \bar{V}_{f\alpha}(k)], \quad (2.41)$$

$$V_{f\alpha}(k) = \inf_{\substack{\nu \in [v_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ I_x \in [I_{x\alpha}, \bar{I}_{x\alpha}]}} \{F_V(\underline{\rho}_\alpha, \nu, \underline{E}_\alpha, \bar{I}_{r\alpha}, I_x, \underline{I}_{\omega\alpha}, k)\}, \quad \bar{V}_{f\alpha}(k) = \sup_{\substack{\nu \in [v_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ I_x \in [I_{x\alpha}, \bar{I}_{x\alpha}]}} \{F_V(\underline{\rho}_\alpha, \nu, \bar{E}_\alpha, \underline{I}_{r\alpha}, I_x, \bar{I}_{\omega\alpha}, k)\}.$$

Пример численной реализации описанной методики относится к задаче описания разбросов в получаемых количественных оценках при анализе

параметрической зависимости $\tilde{V}_f(k)$ для стержневого элемента двутаврового сечения со следующими нечетко-интервальными экзогенными параметрами:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (7.72\rho_*, 7.78\rho_*, 7.81\rho_*, 7.84\rho_*), \quad \tilde{\nu} = (0.29, 0.297, 0.301, 0.307), \quad \tilde{E} = (202E_*, 205E_*, 207E_*, 209E_*), \\ \tilde{B} &= (0.195l_*, 0.2l_*, 0.204l_*, 0.206l_*), \quad \tilde{h} = (0.374l_*, 0.377l_*, 0.378l_*, 0.38l_*), \quad (2.42) \\ \tilde{t} &= (0.02l_*, 0.022l_*, 0.0225l_*, 0.023l_*), \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3], \quad E_* = 1[\text{ГПа}], \quad l_* = 1[\text{м}]. \end{aligned}$$

Для данного набора нечетко-интервальных параметров с использованием соотношений (2.38) определяются величины нечетких геометрических характеристик $\tilde{I}_r, \tilde{I}_x, \tilde{I}_\omega$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r &= (2.957I_*, 4.040I_*, 4.653I_*, 5.376I_*), \quad \tilde{I}_x = (2.037I_{**}, 2.758I_{**}, 2.984I_{**}, 3.212I_{**}), \quad (2.43) \\ \tilde{I}_\omega &= (0.864I_{***}, 1.042I_{***}, 1.137I_{***}, 1.210I_{***}), \quad I_* = 10^{-4}[\text{м}^4], \quad I_{**} = 10^{-6}[\text{м}^4], \quad I_{***} = 10^{-6}[\text{м}^6]. \end{aligned}$$

Результаты расчетов для описываемой соотношениями (2.41) нечетко-множественной эндогенной характеристики $\tilde{V}_f(k)$ рассматриваемой модели при рассматриваемом варианте задания неопределенных исходных параметров приведены на рисунках 2.29 – 2.32. Так, на рисунке 2.29 представлены параметрические зависимости для границ $\mu=0$ носителей и границ $\mu=1$ модальных областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенных параметров $\tilde{V}_f(k)$ от параметра волнового числа k крутильной волны (связанного соотношением $\lambda = 2\pi/k$ с относительной длиной λ волны кручения), а на рисунках 2.30, 2.31 и 2.32 – соответственно формы функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_f(0.1)$, $\tilde{V}_f(1.8)$ и $\tilde{V}_f(3.6)$. Как следует из этих распределений, степень неопределенности эндогенной характеристики $\tilde{V}_f(k)$ при рассматриваемых значениях заданных с разбросами исходных параметров возрастает с увеличением k .

Вторым рассматриваемым вариантом анализируемой уточненной модели распространения крутильных волн в однородном изотропном стержне является модель В.З. Власова, особенностью которой является учет кинетической энергии деформации [64, 107]. В рамках этой модели дисперсионное соотношение и представление для фазовой скорости исследуемых волн [107] имеют вид

$$\omega = \omega(k) = k(((GI_x / \rho I_r) + (EI_\omega / \rho I_r)k^2)/(1 + I_\omega I_r^{-1}k^2))^{1/2}, \quad (2.44)$$

$$V_{f1} = F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) = (((GI_x / \rho I_r) + (EI_\omega / \rho I_r)k^2)/(1 + I_\omega I_r^{-1}k^2))^{1/2}. \quad (2.45)$$

В этом случае, в рамках всех принятых в процессе анализа предшествующей рассмотренной модели предположений, а также с учетом оценок

$$\partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial \rho < 0, \quad \partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial \nu < 0, \quad (2.46)$$

$$\partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial E > 0, \quad \partial F_{V1}(\rho, \nu, E, I_r, I_x, I_\omega, k) / \partial I_x > 0,$$

для эндогенной нечетко-множественной характеристики $\tilde{V}_{f1}(k)$ записывается параметрическое представление вида

$$\tilde{V}_{f1}(k) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{f1\alpha}(k), \bar{V}_{f1\alpha}(k)], \quad (2.47)$$

$$V_{f1\alpha}(k) = \inf_{\substack{I_r \in [L_{ra}, \bar{I}_{ra}] \\ I_\omega \in [L_{\omega\alpha}, \bar{I}_{\omega\alpha}]} \{F_V(\bar{\rho}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, \underline{E}_\alpha, I_r, \underline{I}_{x\alpha}, I_\omega, k)\}, \quad \bar{V}_{f1\alpha}(k) = \sup_{\substack{I_r \in [L_{ra}, \bar{I}_{ra}] \\ I_\omega \in [L_{\omega\alpha}, \bar{I}_{\omega\alpha}]} \{F_V(\underline{\rho}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \bar{E}_\alpha, I_r, \bar{I}_{x\alpha}, I_\omega, k)\}.$$

Численная реализация методики нечетко-множественного анализа данного варианта модели распространения волн кручения в стержневом элементе двутаврового сечения осуществляется для случая задания экзогенных параметров в виде (2.42). Соответствующие результаты расчетов для описываемой соотношением (2.45) нечетко-множественной эндогенной характеристики $\tilde{V}_{f1}(k)$ рассматриваемой модели приведены на рисунках 2.33 – 2.40. Диапазоны изменения и отдельные значения k в расчетах, иллюстрируемых на рисунках 2.33 – 2.36, идентичны выбранным ранее при расчетах с использованием модели С.П. Тимошенко. Так, на рисунке 3.33 для данного варианта уточненной модели представлены параметрические зависимости для $\tilde{V}_{f1}(k)$, отвечающих границам $\mu = 0$ носителей и границам $\mu = 1$ модальных областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенных параметров $\tilde{V}_{f1}(k)$ от параметра волнового числа k крутильной волны (параметра, связанного соотношением $\lambda = 2\pi/k$ с относительной длиной λ волны кручения). На рисунках 2.34, 2.35 и 2.36 даны отвечающие рассматриваемому варианту уточненной модели В.З. Власова формы функций принадлежности для нечетко-

множественных оценок $\tilde{V}_{f1}(0.1)$, $\tilde{V}_{f1}(1.8)$ и $\tilde{V}_{f1}(3.6)$. Сопоставление результатов, получаемых соответственно двум рассматриваемым моделям, указывает на крайне незначительное уменьшение значений k , соответствующих границам диапазонов получаемых нечетко-множественных оценок при использовании модели В.З. Власова. Как и в случае ранее рассмотренной модели С.П.Тимошенко, степень неопределенности эндогенной характеристики $\tilde{V}_{f1}(k)$ при рассматриваемых значениях заданных с разбросами исходных параметров в рассматриваемом диапазоне изменения волнового числа возрастает с увеличением k .

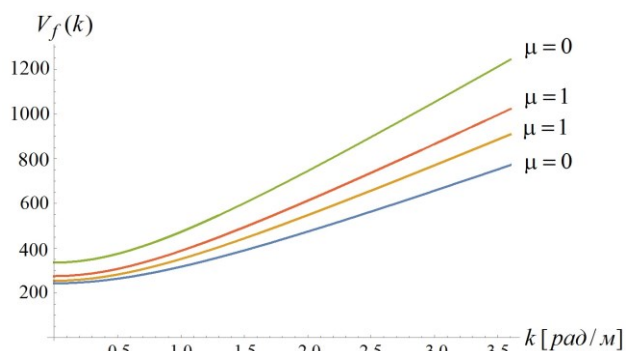


Рис. 2.29. Распределения $V_f(k)$ с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f1}(k)}(V_f(k))$

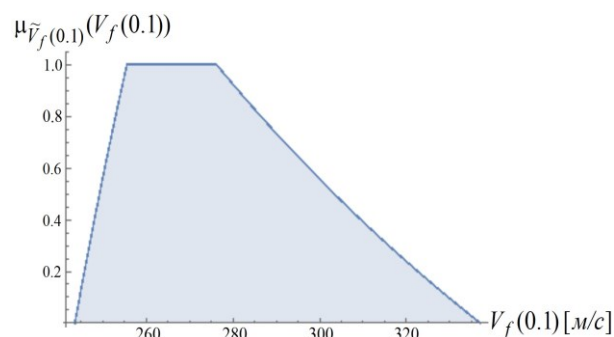


Рис. 2.30. Вид функции принадлежности для $\tilde{V}_{f1}(0.1)$

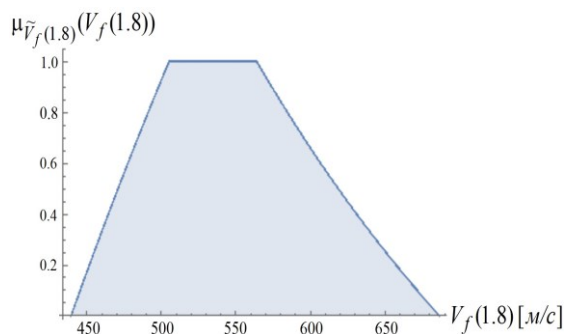


Рис. 2.31. Вид функции принадлежности для $\tilde{V}_{f1}(1.8)$

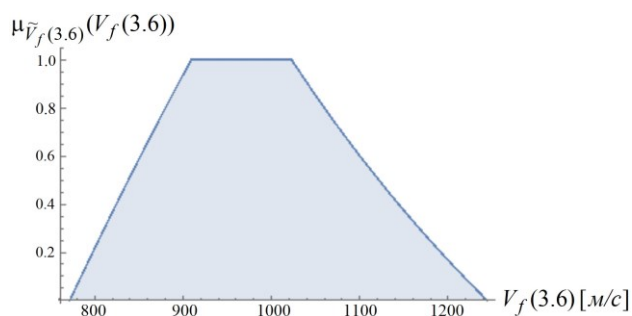


Рис. 2.32. Вид функции принадлежности для $\tilde{V}_{f1}(3.6)$

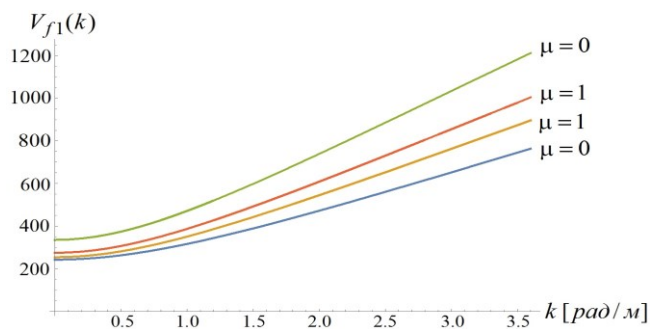
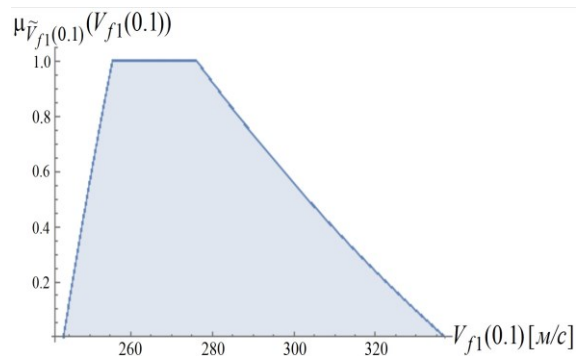
Рис. 2.33. Распределения $V_f(k)$ споказателями $\mu_{\tilde{V}_f(k)}(V_f(k))$ 

Рис. 2.34. Функция

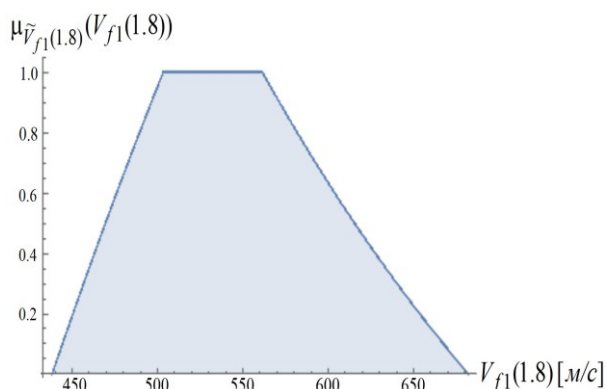
принадлежности для $\tilde{V}_{f1}(0.1)$ 

Рис. 2.35. Функция принадлежности

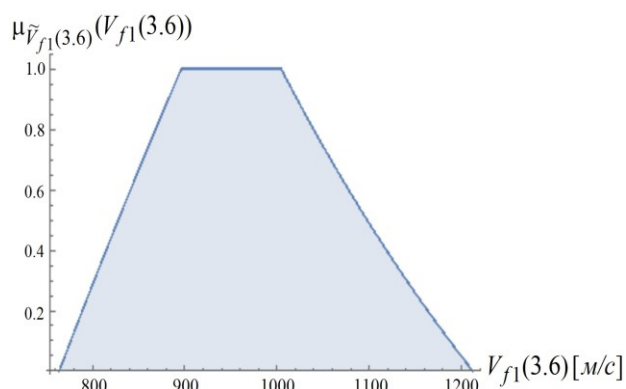
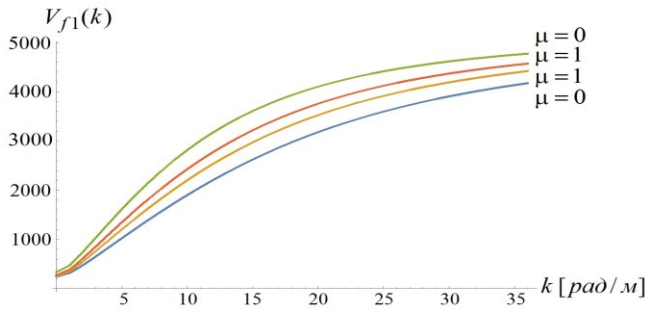
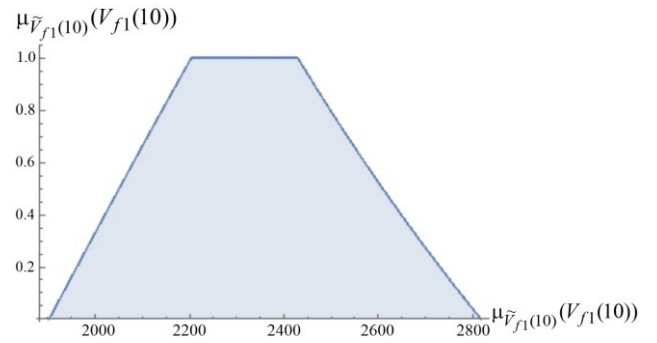
для $\tilde{V}_{f1}(1.8)$ 

Рис. 2.36. Функция принадлежности

для $\tilde{V}_{f1}(3.6)$

На рисунках 2.37 – 2.39 приведены аналогичные результаты расчетов в более широком диапазоне изменения волнового числа крутильной волны. При этом, на основании расчетов, отраженных на рисунке 2.37, можно заключить что изменение степени неопределенности для нечеткой оценки $\tilde{V}_{f1}(k)$ не является монотонным; мера неопределенности нарастает к середине диапазона изменения $k \in [0, 36]$, однако при дальнейшем росте k возникает тенденция к снижению степени разбросов эндогенного параметра фазовой скорости.

Рис. 2.37. Распределения $V_{f1}(k)$ Рис.2.38. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(10)$.

с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f1}(k)}(V_{f1}(k))$

Третьим рассматриваемым вариантом уточненной модели распространения волн кручения в стержневом элементе двутаврового сечения, для которого разрабатывается методика нечетко-множественного обобщения с целью учета влияния разбросов значений исходных физико-механических и геометрических параметров, является описываемая в работах [107–108, 215] модель И.В. Сливкера. Специфика уточнения в картине анализируемых деформационных процессов, вносимого данной моделью, заключается в частичном учете энергии деформаций сдвига при описании эффектов закручивания прямых тонких стержней с депланацией [107–108, 215].

В рамках данной модели, наряду с экзогенными физико-механическими характеристиками, введенными в вышерассмотренных уточненных моделях С.П. Тимошенко и В.З. Власова, учитывается [107–108, 215] специальный геометрический параметр ψ и вводится в рассмотрение геометрическая характеристика

$$I_g = 480I_\omega^2 \cdot (B^5 h^2 t)^{-1}, \quad I_g = (\psi - 1)^{-1} I_x = (\psi - 1)^{-1} (2B + h)t^3 / 3. \quad (2.48)$$

Дисперсионное уравнение для бегущих крутильных волн и представление для их фазовых скоростей согласно данной версии уточненной модели описывают две ветви [107] («акустическую» $j=1$ и «оптическую» $j=2$) с аналитическими описаниями

$$\omega = \omega_j(k) = [(-b + ck^2) + (-1)^j ((b + ck^2)^2 - 4a(dk^2 + fk^3)) / (2a)]^{1/2}, \quad (2.49)$$

$$V_{f2}^{(j)} = F_{V2}^{(j)}(\rho, \nu, E, B, h, t, \psi, k) = \quad (2.50)$$

$$= (k\rho)^{-1} [(-b + ck^2) + (-1)^j ((b + ck^2)^2 - 4a(dk^2 + fk^3))^{1/2}] / (2a)^{1/2},$$

$$a = I_r I_\omega, \quad b = -GI_r I_g, \quad c = -G\psi I_\omega I_g - EI_\omega I_r, \quad d = G^2 I_x I_g, \quad f = EG\psi I_\omega I_g. \quad (2.51)$$

При нечетко-множественном обобщении рассматриваемого варианта модели используются все гипотезы и предположения, принимавшиеся выше в отношении природы и способа представления нечетких исходных параметров рассматриваемой конструкции в процессе анализа скоростей волн кручения на базе уточненных моделей С.П. Тимошенко и В.З. Власова, и дополняемые введением нечетко-интервальных геометрических параметров

$$\tilde{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4), \quad \tilde{\psi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\psi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha], \quad \underline{\psi}_\alpha = (1-\alpha)\psi_1 + \alpha\psi_2, \quad \bar{\psi}_\alpha = \alpha\psi_3 + (1-\alpha)\psi_4; \quad (2.52)$$

$$\tilde{G} = (G_1, G_2, G_3, G_4), \quad G_1 = E_1(2(1+\nu_4))^{-1}, \quad G_2 = E_2(2(1+\nu_3))^{-1}, \quad G_3 = E_3(2(1+\nu_2))^{-1}, \quad G_4 = E_4(2(1+\nu_1))^{-1};$$

$$\tilde{I}_g = (I_{g1}, I_{g2}, I_{g3}, I_{g4}), \quad \underline{I}_{g\alpha} = (1-\alpha)I_{g1} + \alpha I_{g2}, \quad \bar{I}_{g\alpha} = \alpha I_{g3} + (1-\alpha)I_{g4};$$

$$I_{g1} = I_{x1} / (\psi_4 - 1), \quad I_{g2} = I_{x2} / (\psi_3 - 1), \quad I_{g3} = I_{x3} / (\psi_2 - 1), \quad I_{g4} = I_{x4} / (\psi_1 - 1).$$

С учетом оценки

$$\partial F_{V_2}^{(j)}(\rho, \nu, E, B, h, t, \psi, k) / \partial \rho < 0, \quad (2.53)$$

для эндогенной нечетко-множественной характеристики $\tilde{V}_{f_2}^{(j)}(k)$ записывается параметрическое представление вида

$$\tilde{V}_{f_2}^{(j)}(k) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k), \bar{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k)], \quad (2.54)$$

$$\underline{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k) = \inf \{F_{V_2}^{(j)}(\underline{\rho}_\alpha, \nu, E, B, h, t, \psi, k)\}, \quad \bar{V}_{f_2\alpha}^{(j)}(k) = \sup \{F_{V_2}^{(j)}(\bar{\rho}_\alpha, \nu, E, B, h, t, \psi, k)\}.$$

$$\begin{aligned} \nu &\in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ E &\in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ B &\in [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha] \\ h &\in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ t &\in [\underline{t}_\alpha, \bar{t}_\alpha] \\ \psi &\in [\underline{\psi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu &\in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ E &\in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ B &\in [\underline{B}_\alpha, \bar{B}_\alpha] \\ h &\in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ t &\in [\underline{t}_\alpha, \bar{t}_\alpha] \\ \psi &\in [\underline{\psi}_\alpha, \bar{\psi}_\alpha] \end{aligned}$$

Численная реализация методики нечетко-множественного анализа данного варианта модели распространения волн кручения в стержневом элементе двутаврового сечения осуществляется для случая задания экзогенных параметров в виде (2.42), а также соответствующего задания $\tilde{\psi}$ в на основе соотношения (2.48).

Некоторые результаты расчетов для описываемой соотношением (2.54) нечетко-множественной эндогенной характеристики $\tilde{V}_{f_2}(k)$ в рассматриваемой уточненной модели приведены на рисунках 2.40 – 2.46. Диапазон изменения $k \in [0, 36]$ и отдельные значения k из этого диапазона в представляемых расчетах идентичны выбранным при расчетах с использованием модели В.З. Власова. При этом распределения на рисунках 2.40 – 2.42 относятся к частному случаю, когда физико-механические параметры материала стержня являются нечеткими величинами с описаниями (2.42), а геометрические параметры двутаврового сечения рассматриваемого стержня полагаются четкими величинами со значениями

$$B = 0.2l_*, h = 0.378l_*, t = 0.022l_*. \quad (2.55)$$

Распределения на рисунках 2.43 – 2.46 соответствуют случаю, когда и физико-механические, и геометрические параметры стержня являются нечетко-интервальными характеристиками и имеют вид (2.42). В качестве отдельных выводов, следующих из анализа результатов расчетов, можно отметить существенно более низкий уровень неопределенности эндогенного параметра $\tilde{V}_{f_2}(k)$, определяемого на основании нечетко-множественного варианта модели И.В. Сливкера по сравнению с уровнем неопределенности параметра $\tilde{V}_{f_2}(k)$, определяемого в рамках модели В.З. Власова. Также установлено достаточно существенное уменьшение значений k , соответствующих границам диапазонов нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_{f_2}(k)$ при использовании модели И.В. Сливкера, в сравнении с результатами, получаемыми на основе модели В.З. Власова. Изменение степени неопределенности для нечеткой оценки $\tilde{V}_{f_1}(k)$ при использовании модели И.В. Сливкера является монотонным с нарастанием меры неопределенности при росте k в диапазоне $k \in [0, 36]$.

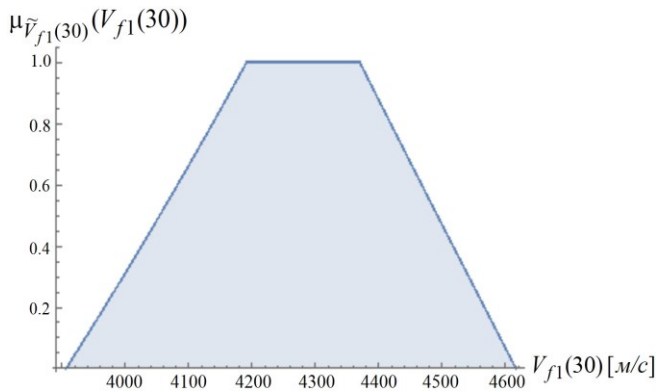


Рис. 2.39. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f1}(30)$

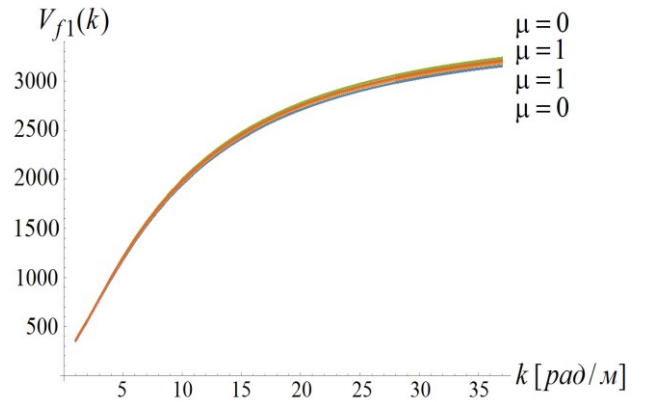


Рис. 2.40. Распределения $V_{f2}(k)$

с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f2}(k)}(V_{f2}(k))$

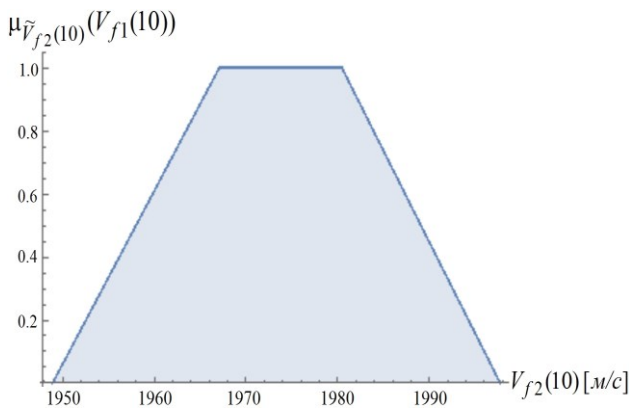


Рис. 2.41. Функция принадлежности

$\tilde{V}_{f2}(10)$

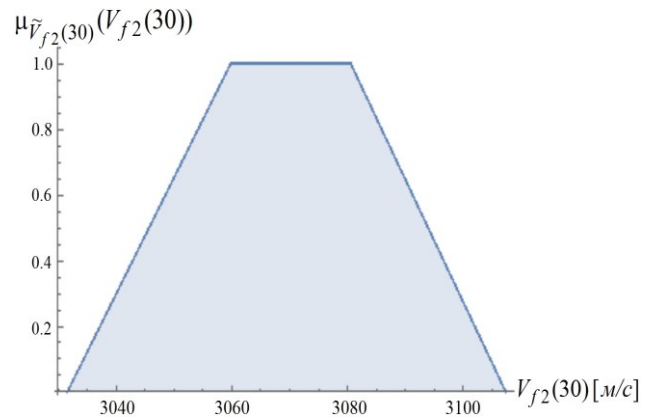


Рис. 2.42. Функция принадлежности

$\tilde{V}_{f2}(30)$

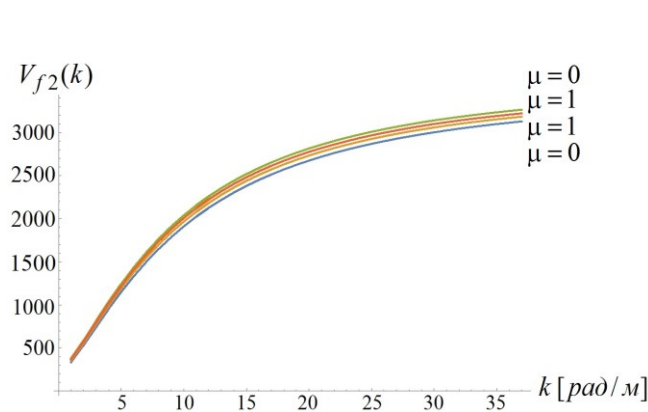


Рис. 2.43. Распределения $V_{f2}(k)$

с показателями $\mu_{\tilde{V}_{f2}(k)}(V_{f2}(k))$

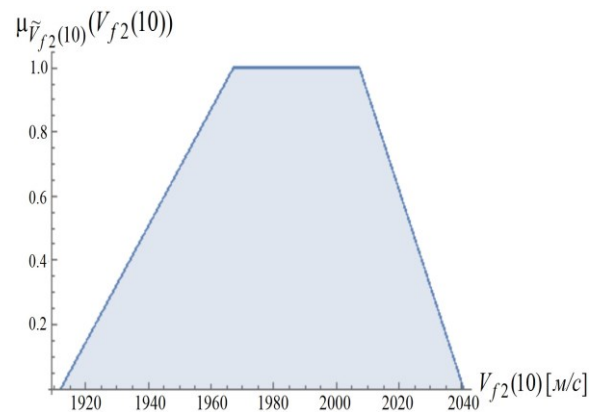


Рис. 2.44. Функция принадлежности $\tilde{V}_{f2}(10)$

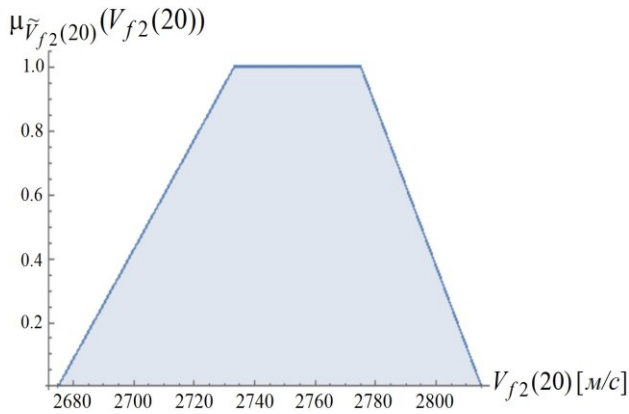


Рис. 2.45. Функция принадлежности

$$\tilde{V}_{f_2}(20)$$

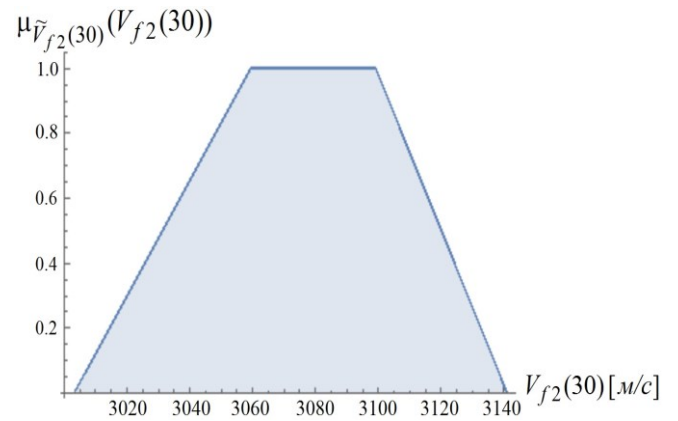


Рис. 2.46. Функция принадлежности

$$\tilde{V}_{f_2}(30)$$

Следует также отметить, что результаты расчетов с применением всех трех рассмотренных вариантов уточненных моделей с высокой степенью корректности согласуются с оценками, получаемыми в работе [107] на основе детерминистических вариантов соответствующих моделей.

2.4. Нечетко-множественный метод оценки влияния разбросов исходных параметров на характеристики напряженного состояния изгибаемых тонких изотропных плит

Проблема исследования напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций в виде изгибаемых тонких анизотропных плит в рамках прикладных моделей в качестве одного из актуальных аспектов также включает задачу оценки количественных показателей влияния неопределенности исходных параметров на эндогенные расчетные характеристики. В качестве факторов неопределенности для изгибаемых плит в этом случае выступают разбросы экспериментальных значений упругих постоянных конструкционных материалов пластин и отклонения для величин геометрических параметров. Разработка нечетко-множественной методики учета факторов разброса механических и геометрических характеристик для моделей изгибного деформирования тонких плит в рамках прикладной модели, базирующейся на гипотезах прямых нормалей, осуществлена применительно к двум типам задач —

задачам изгиба круговых и кольцевых плит в случае действия на их лицевые поверхности осесимметричных равномерно распределенных либо сосредоточенных нагрузений. Применяемыми в исследовании Базовыми соотношениями являются точные аналитические решения задач данного типа в рамках классических детерминистических моделей [120–122, 138, 255].

Для изотропной круговой плиты радиуса R с закрепленным краем, изгибаемой равномерно распределенными по лицевой поверхности усилиями интенсивности q , имеющей толщину h и изготовленной из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , функция прогиба описывается в полярных координатах (r, θ) выражением [255]

$$w_1(r) = F_w^{(1)}(\nu, E, h, R, q, r) = q(64D)^{-1}(R^2 - r^2)^2, \quad D = Eh^3[12(1 - \nu^2)]^{-1}; \quad (2.56)$$

а радиальные и тангенциальные изгибающие моменты имеют представления

$$M_r^{(1)} = G_r^{(1)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[R^2(1 + \nu) - r^2(3 + \nu)], \quad (2.57)$$

$$M_\theta^{(1)} = G_\theta^{(1)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[R^2(1 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)].$$

Аналогичные представления для изотропной плиты с опертым краем соответственно имеют вид [255]

$$w_2(r) = F_w^{(2)}(\nu, E, h, R, q, r) = q(64D)^{-1}((R^2 - r^2)^2 + 4R^2(R^2 - r^2)(1 + \nu)^{-1}); \quad (2.58)$$

$$M_r^{(2)} = G_r^{(2)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[(3 + \nu)(R^2 - r^2)], \quad M_\theta^{(2)} = G_\theta^{(2)}(\nu, R, q, r) = (q/16)[R^2(3 + \nu) - r^2(1 + 3\nu)].$$

В случае нагружения закрепленной по краю изотропной круговой плиты сосредоточенной силой величины P , приложенной в центральной точке $r = 0$, функция прогиба описывается выражением [255]

$$w_3(r) = F_w^{(3)}(\nu, E, h, R, P, r) = P(8\pi D)^{-1}[(3 + \nu)(2(1 + \nu))^{-1}(R^2 - r^2) - r^2 \ln(R/r)], \quad (2.59)$$

а при задании на контуре условия опирания

$$w_4(r) = F_w^{(4)}(\nu, E, h, R, P, r) = P(8\pi D)^{-1}[(1/2)(R^2 - r^2) - r^2 \ln(R/r)]. \quad (2.60)$$

Соответственно предположениям о наличии разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров плиты ν, E, h, R , а также в значениях параметров нагружения q, P , реализуется переход к описанию указанных неопределенных экзогенных параметров рассматриваемой модели в

форме трапецидальных нормальных нечетких интервалов с кортежами реперных точек и разложениями по множествам α – уровня

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \tilde{v} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha], \quad \underline{v}_\alpha = (1-\alpha)v_1 + \alpha v_2, \quad \bar{v}_\alpha = \alpha v_3 + (1-\alpha)v_4; \quad (2.61) \\ \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4; \\ \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4; \\ \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3, R_4), \quad \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \quad \underline{R}_\alpha = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1-\alpha)R_4; \\ \tilde{q} &= (q_1, q_2, q_3, q_4), \quad \tilde{q} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha], \quad \underline{q}_\alpha = (1-\alpha)q_1 + \alpha q_2, \quad \bar{q}_\alpha = \alpha q_3 + (1-\alpha)q_4; \\ \tilde{P} &= (P_1, P_2, P_3, P_4), \quad \tilde{P} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_\alpha, \bar{P}_\alpha], \quad \underline{P}_\alpha = (1-\alpha)P_1 + \alpha P_2, \quad \bar{P}_\alpha = \alpha P_3 + (1-\alpha)P_4.\end{aligned}$$

Процедура получения параметрических нечетких оценок $\tilde{w}_j(r)$, $M_r^{(j)}(r)$, $M_\theta^{(j)}(r)$ для характеристик напряженно-деформированного состояния рассматриваемых плит заключается в применении модифицированной α – уровневой формы эвристического принципа расширения при переходе к нечетко-интервальным аргументам в функциональных зависимостях (2.56) – (2.60) с использованием справедливых во всей области определения $F_w^{(j)}(v, E, h, R, q, r)$, $G_r^{(j)}(v, R, q, r)$, $G_\theta^{(j)}(v, R, q, r)$ (за исключением точки $r = 0$ в модели сосредоточенного нагружения) оценок для частных производных:

$$\begin{aligned}\partial F_w^{(1)}(v, E, h, R, q, r) / \partial v < 0, \quad \partial F_w^{(1)}(v, E, h, R, q, r) / \partial E < 0, \quad (2.62) \\ \partial F_w^{(1)}(v, E, h, R, q, r) / \partial h < 0, \quad \partial F_w^{(1)}(v, E, h, R, q, r) / \partial R \geq 0, \quad \partial F_w^{(1)}(v, E, h, R, q, r) / \partial q > 0; \\ \partial G_r^{(1)}(v, R, q, r) / \partial v \geq 0, \quad \partial G_r^{(1)}(v, R, q, r) / \partial R > 0, \quad \partial G_r^{(1)}(v, R, q, r) / \partial q > 0; \quad \partial G_\theta^{(1)}(v, R, q, r) / \partial R > 0, \\ \partial G_\theta^{(1)}(v, R, q, r) / \partial q > 0; \\ \partial F_w^{(2)}(v, E, h, R, q, r) / \partial E < 0, \quad \partial F_w^{(2)}(v, E, h, R, q, r) / \partial h < 0, \\ \partial F_w^{(2)}(v, E, h, R, q, r) / \partial R > 0, \quad \partial F_w^{(2)}(v, E, h, R, q, r) / \partial q > 0; \\ \partial G_r^{(2)}(v, R, q, r) / \partial v \geq 0, \quad \partial G_r^{(2)}(v, R, q, r) / \partial R > 0, \quad \partial G_r^{(2)}(v, R, q, r) / \partial q > 0 \\ \partial G_\theta^{(2)}(v, R, q, r) / \partial R > 0, \quad \partial G_\theta^{(2)}(v, R, q, r) / \partial q > 0; \\ \partial F_w^{(3)}(v, E, h, R, P, r) / \partial v < 0, \quad \partial F_w^{(3)}(v, E, h, R, P, r) / \partial E < 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial F_w^{(3)}(v, E, h, R, P, r)/\partial h < 0, \quad \partial F_w^{(3)}(v, E, h, R, P, r)/\partial R \geq 0, \quad \partial F_w^{(3)}(v, E, h, R, P, r)/\partial P > 0; \\ \partial F_w^{(4)}(v, E, h, R, P, r)/\partial E < 0, \quad \partial F_w^{(4)}(v, E, h, R, P, r)/\partial h < 0, \\ \partial F_w^{(4)}(v, E, h, R, P, r)/\partial R > 0, \quad \partial F_w^{(4)}(v, E, h, R, P, r)/\partial P > 0.\end{aligned}$$

В результате для эндогенных нечетко-множественных характеристик $\tilde{w}_j(r)$, $M_r^{(j)}$, $M_\theta^{(j)}$ записываются параметрические представления вида

$$\tilde{w}_j(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{w}_{j\alpha}(r), \bar{w}_{j\alpha}(r)], \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned}\underline{w}_{1\alpha}(r) &= F_w^{(1)}(\bar{v}_\alpha, \bar{E}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r), \quad \bar{w}_{1\alpha}(r) = F_w^{(1)}(\underline{v}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{q}_\alpha, r); \\ \underline{w}_{2\alpha}(r) &= \inf_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{F_w^{(2)}(v, \bar{E}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r)\}, \quad \bar{w}_{2\alpha}(r) = \sup_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{F_w^{(2)}(v, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{q}_\alpha, r)\}; \\ \underline{w}_{3\alpha}(r) &= F_w^{(3)}(\bar{v}_\alpha, \bar{E}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{P}_\alpha, r), \quad \bar{w}_{3\alpha}(r) = F_w^{(3)}(\underline{v}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{P}_\alpha, r); \\ \underline{w}_{4\alpha}(r) &= \inf_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{F_w^{(4)}(v, \bar{E}_\alpha, \bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{P}_\alpha, r)\}, \quad \bar{w}_{4\alpha}(r) = \sup_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{F_w^{(4)}(v, \underline{E}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{P}_\alpha, r)\};\end{aligned}$$

$$\tilde{M}_r^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r), \bar{G}_{r\alpha}^{(j)}(r)], \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}\underline{G}_{r\alpha}^{(1)}(r) &= G_r^{(1)}(\underline{v}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r), \quad \bar{G}_{r\alpha}^{(1)}(r) = G_r^{(1)}(\bar{v}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{q}_\alpha, r); \\ \underline{G}_{r\alpha}^{(2)}(r) &= G_r^{(2)}(\underline{v}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r), \quad \bar{G}_{r\alpha}^{(2)}(r) = G_r^{(2)}(\bar{v}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \bar{q}_\alpha, r);\end{aligned}$$

$$\tilde{M}_\theta^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r), \bar{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r)], \quad (2.65)$$

$$\underline{G}_{\theta\alpha}^{(1)}(r) = \inf_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{G_\theta^{(1)}(v, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r)\}, \quad \bar{G}_{\theta\alpha}^{(1)}(r) = \sup_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{G_\theta^{(1)}(v, \bar{R}_\alpha, \bar{q}_\alpha, r)\};$$

$$\underline{G}_{\theta\alpha}^{(2)}(r) = \inf_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{G_\theta^{(2)}(v, \underline{R}_\alpha, \underline{q}_\alpha, r)\}, \quad \bar{G}_{\theta\alpha}^{(2)}(r) = \sup_{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]} \{G_\theta^{(2)}(v, \bar{R}_\alpha, \bar{q}_\alpha, r)\}.$$

В качестве примеров численной реализации описанной методики оценивания разбросов для параметрических количественных оценок $w_j(r)$, $M_r^{(j)}(r)$, $M_\theta^{(j)}(r)$ представлены результаты расчетов, в которых рассматриваются процессы нагружения пластины в случае задания следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\tilde{v} = (0.29, 0.297, 0.301, 0.307), \quad \tilde{E} = (202E_*, 205E_*, 207E_*, 209E_*), \quad \tilde{h} = (2.7l_*, 2.9l_*, 3.0l_*, 3.1l_*),$$

$$\tilde{R} = (375l_*, 395l_*, 410l_*, 435l_*), \quad \tilde{q} = (3.6q_*, 3.9q_*, 4.1q_*, 4.5q_*), \quad \tilde{P} = (1.1p_*, 1.17p_*, 1.21p_*, 1.26p_*),$$

$$E_* = 1[\text{ГПа}], \quad l_* = 10^{-3}[\text{м}], \quad q_* = 10^3[\text{Па}], \quad p_* = 10^3[\text{н}]$$

Результаты расчетов, характеризующих нечетко-множественные параметрические оценки $\tilde{w}_j(r)$, $\tilde{M}_r^{(j)}(r)$, $\tilde{M}_\theta^{(j)}(r)$, представлены на рисунках 2.47 – 2.60. Так, на рисунке 2.47 представлены параметрические зависимости для границ $\mu = 0$ носителей и границ $\mu = 1$ модальных областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок эндогенной характеристики $\tilde{w}_1(r)$ от параметра радиальной координаты r , а на рисунке 2.48 – форма функции принадлежности для нечетко-множественной оценки $\tilde{w}_1(0)$.

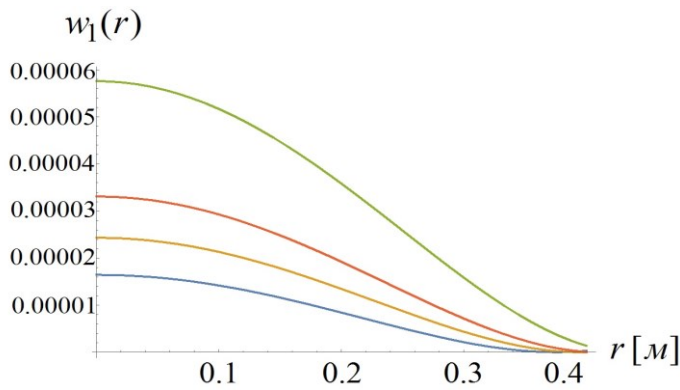


Рис. 2.47. Распределения $w_1(r)$
с показателями $\mu_{\tilde{w}_1(r)}(w_1(r))$

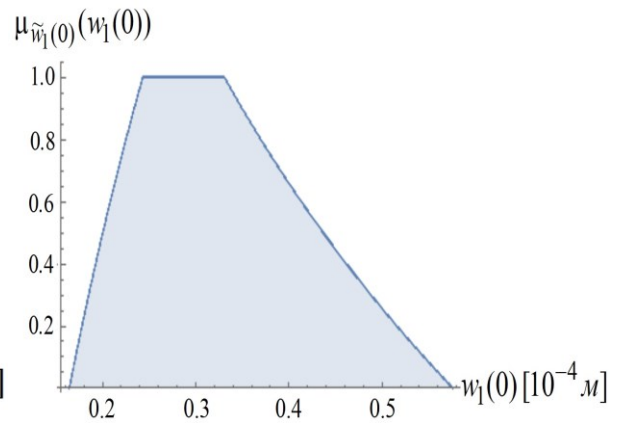


Рис. 2.48. Функция принадлежности $\tilde{w}_1(0)$

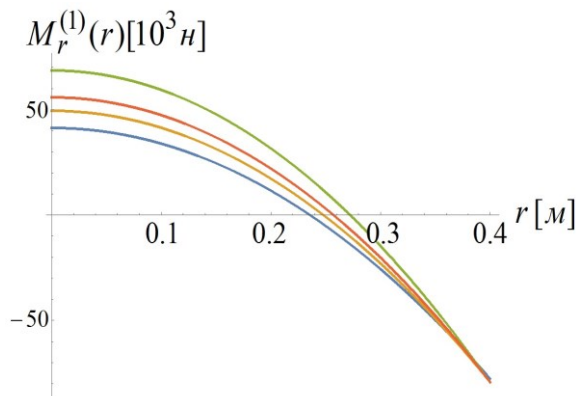


Рис. 2.49. Распределения $M_r^{(1)}(r)$
с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(1)}(r)}(M_r^{(1)}(r))$

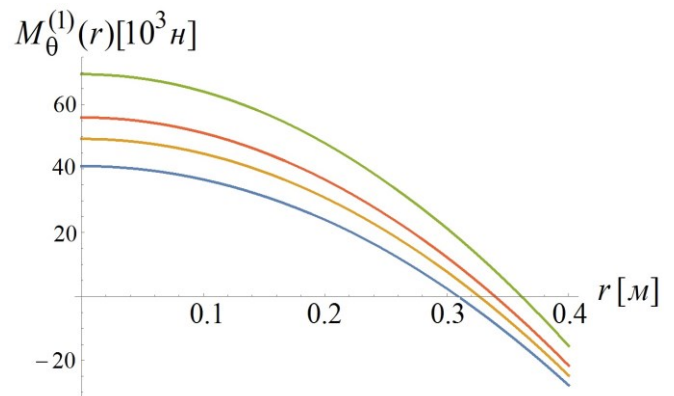


Рис. 2.50. Распределения $M_\theta^{(1)}(r)$
с показателями $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(1)}(r)}(M_\theta^{(1)}(r))$

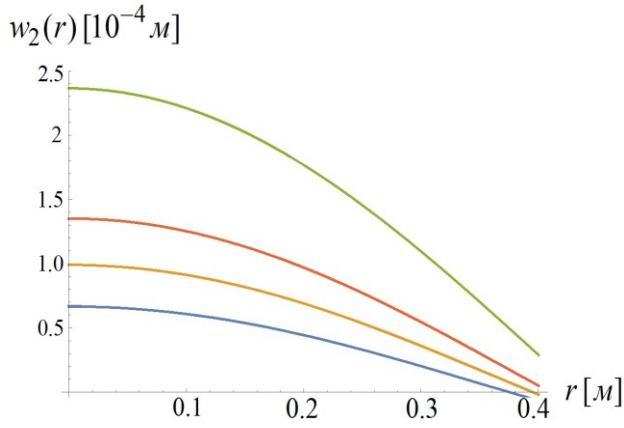


Рис. 2.51. Распределения $w_2(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{w}_2(r)}(w_2(r))$

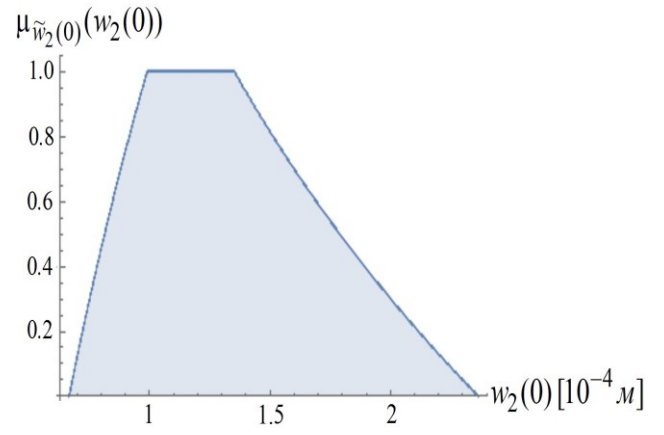


Рис. 2.52. Функция принадлежности $\tilde{w}_2(0)$

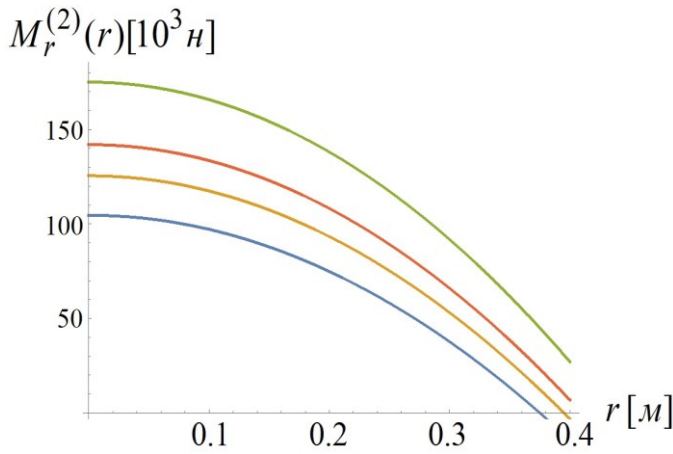


Рис. 2.53. Распределения $M_r^{(2)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(2)}(r)}(M_r^{(2)}(r))$

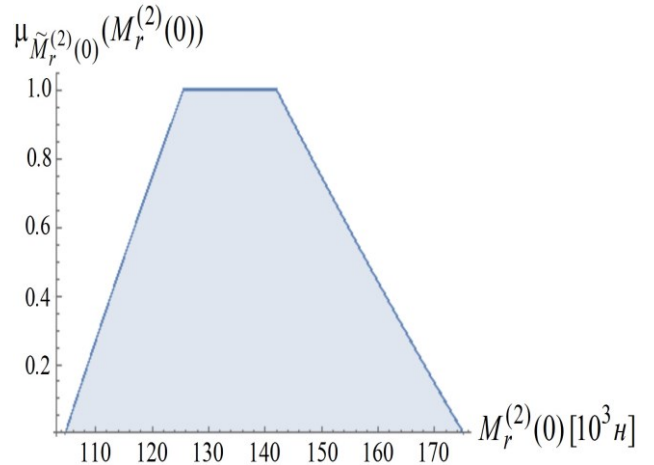


Рис. 2.54. Функция принадлежности $\tilde{M}_r^{(2)}(0)$

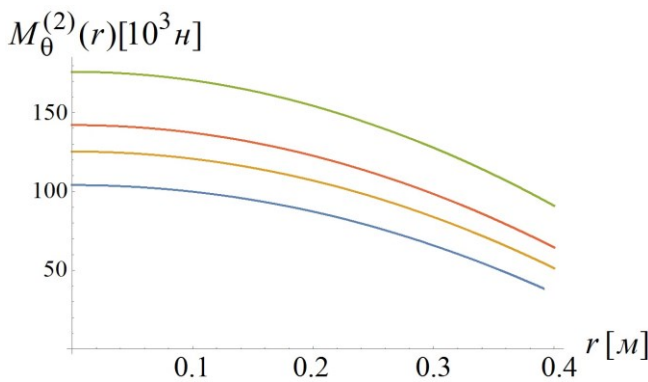


Рис. 2.55. Распределения $M_\theta^{(2)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(2)}(r)}(M_r^{(2)}(r))$

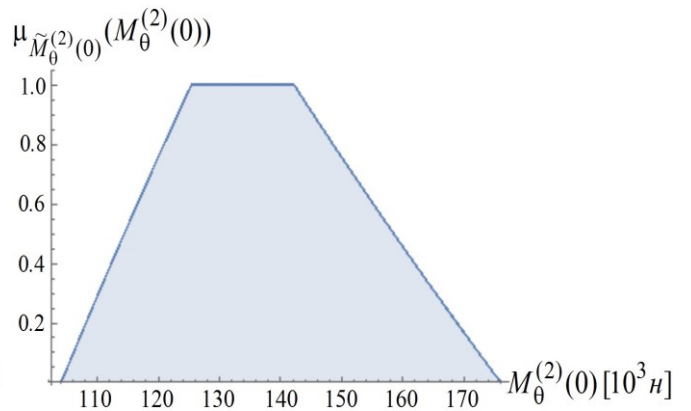


Рис. 2.56. Функция принадлежности $\tilde{M}_\theta^{(2)}(0)$

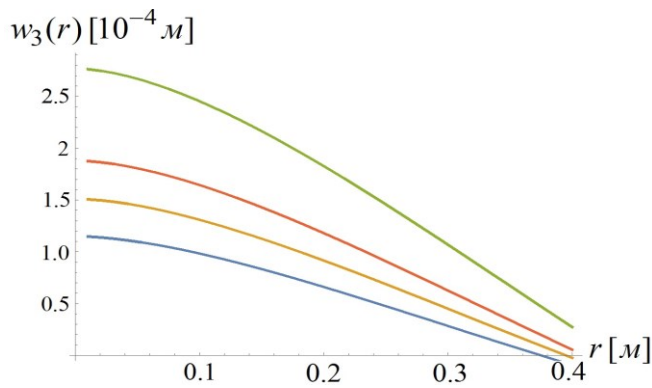


Рис. 2.57. Распределения $w_3(r)$
с показателями $\mu_{\tilde{w}_3(r)}(w_3(r))$

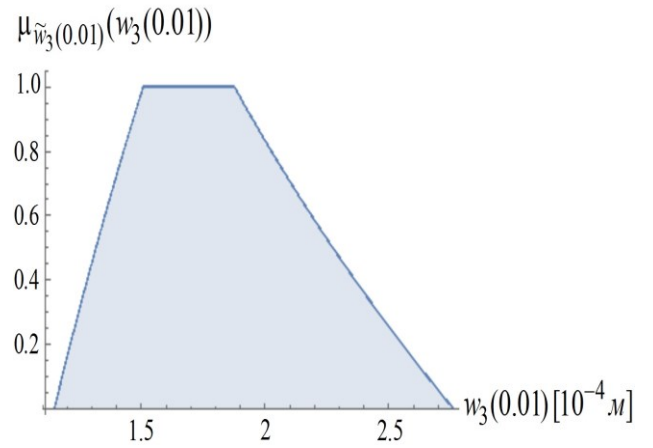


Рис. 2.58. Функция принадлежности
 $\tilde{w}_3(0.01)$

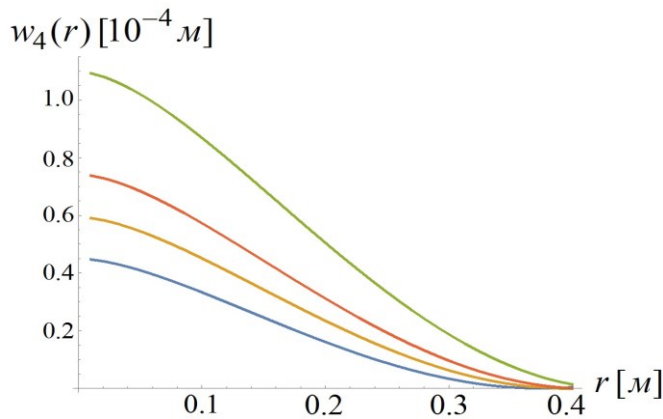


Рис. 2.59. Распределения $w_4(r)$
с показателями $\mu_{\tilde{w}_4(r)}(w_4(r))$

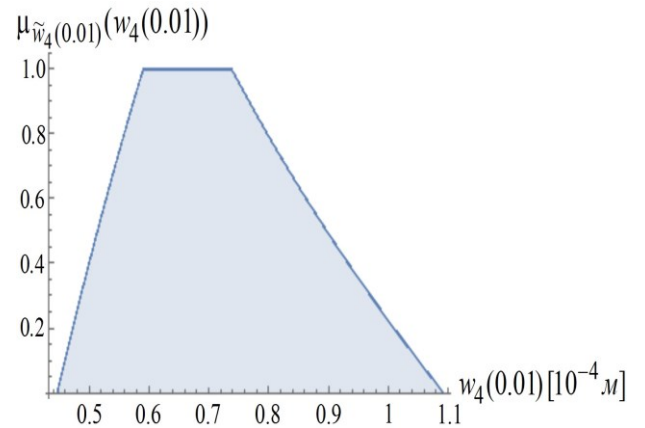


Рис. 2.60. Функция принадлежности
 $\tilde{w}_4(0.01)$

Для тонких изотропных кольцевых плит с внешним радиусом R_0 и внутренним радиусом R_1 при различных сочетаниях краевых условий на граничных контурах в случаях осесимметричных нагружений точные аналитические представления решений соответствующих задач в рамках классической детерминистической постановки имеют вид [122]: при жестком закреплении внешнего контура плиты и действии на внутреннем контуре равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности N

$$M_r^{(5)} = G_r^{(5)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = -2D(1+\nu)[A \ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}], \quad (2.66)$$

$$M_\theta^{(5)} = G_\theta^{(5)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = -2D(1+\nu)[A \ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}],$$

$$A = (4D)^{-1} R_1 N,$$

$$a = -[D(1-\nu)[AR_0^2(2\ln R_0 + 1) + AR_1^2((\mathcal{G}-1)\ln R_1 - 1)] + NR_1^3][D(1-\nu)((\mathcal{G}-1)R_1^2 + 2R_0^2)]^{-1},$$

$$b = -[D(1-\nu)[A(\mathcal{G}-1)(2\ln R_0 + 1) - 2A((\mathcal{G}-1)\ln R_1 - 1)] - 2NR_1]R_0^2R_1^2[D(1-\nu)((\mathcal{G}-1)R_1^2 + 2R_0^2)]^{-1};$$

– при жестком закреплении внутреннего контура плиты и действии на внешнем контуре равномерно распределенных поперечных усилий интенсивности N

$$M_r^{(6)} = G_r^{(6)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}], \quad (2.67)$$

$$M_\theta^{(6)} = G_\theta^{(6)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r) = -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}],$$

$$A = -(4D)^{-1} R_0 N,$$

$$a = -[D(1-\nu)[AR_1^2(2\ln R_1 + 1) + AR_0^2((\mathcal{G}-1)\ln R_0 - 1)] - NR_0^3][D(1-\nu)((\mathcal{G}-1)R_0^2 + 2R_1^2)]^{-1},$$

$$b = -[D(1-\nu)[A(\mathcal{G}-1)(2\ln R_1 + 1) - 2A((\mathcal{G}-1)\ln R_0 - 1)] + 2NR_0]R_0^2R_1^2[D(1-\nu)((\mathcal{G}-1)R_0^2 + 2R_1^2)]^{-1};$$

– при жестком закреплении внешнего контура плиты, свободном внутреннем контуре и действии по всей ее лицевой поверхности равномерно распределенных усилий интенсивности q

$$M_r^{(7)} = G_r^{(7)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(3+\nu)r^2,$$

$$M_\theta^{(7)} = G_\theta^{(7)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(1+3\nu)r^2,$$

$$A = -(8D)^{-1} qR_1^2, \quad (2.68)$$

$$a = [- (AR_0^2(2\ln R_0 + 1) + AR_1^2((\mathcal{G}-1)\ln R_1 - 1) + 4dR_1^3) + 4(5-\nu)(1-\nu)^{-1}dR_1^4][(\mathcal{G}-1)R_1^2 + 2R_0^2]^{-1},$$

$$d = q/(64D), \quad b = -[(1-\nu)[A(\mathcal{G}-1)(2\ln R_0 + 1) - 2A((\mathcal{G}-1)\ln R_1 - 1)] +$$

$$+ 8(1+\nu)dR_0 + 4(5-\nu)dR_1^4]R_0^2R_1^2[(1-\nu)((\mathcal{G}-1)R_1^2 + 2R_0^2)]^{-1};$$

– при жестком закреплении внутреннего контура плиты, свободном внешнем контуре и действии по всей ее лицевой поверхности равномерно распределенных усилий интенсивности q

$$M_r^{(8)} = G_r^{(8)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(3+\nu)r^2,$$

$$M_\theta^{(8)} = G_\theta^{(8)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = -2D(1+\nu)[A\ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(1+3\nu)r^2,$$

$$A = -(8D)^{-1} qR_0^2, \quad (2.69)$$

$$a = [- (AR_1^2(2\ln R_1 + 1) + AR_0^2((\mathcal{G}-1)\ln R_0 - 1) + 4dR_0^3) + 4(5-\nu)(1-\nu)^{-1}dR_0^4][(\mathcal{G}-1)R_0^2 + 2R_1^2]^{-1},$$

$$d = q/(64D), \quad b = -(1-\nu)[A(\mathcal{G}-1)(2 \ln R_1 + 1) - 2A((\mathcal{G}-1) \ln R_0 - 1)] + \\ + 8(1+\nu)dR_1 + 4(5-\nu)dR_0^4]R_0^2R_1^2[(1-\nu)((\mathcal{G}-1)R_0^2 + 2R_1^2)]^{-1}.$$

В случае жесткого закрепления внешнего контура плиты, наличия недеформируемого подкрепления на внутреннем контуре и действии по всей лицевой поверхности равномерно распределенных усилий интенсивности q

$$M_r^{(9)} = G_r^{(9)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = -2D(1+\nu)[A \ln r + a + A] - D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(3+\nu)r^2, \\ M_\theta^{(9)} = G_\theta^{(9)}(\nu, E, h, R_0, R_1, q, r) = -2D(1+\nu)[A \ln r + a + A] + D(1-\nu)[A - br^{-2}] - 4dD(1+3\nu)r^2, \\ A = q^*/(8\pi D), \quad q^* = -\pi q R_1^2, \quad (2.70)$$

$$a = [\gamma_{10}R_0 - \gamma_{11}R_1]/[2(R_0^2 - R_1^2)], \quad b = [R_0(\gamma_{11}R_0R_1 - \gamma_{10}R_1^2)]/[(R_0^2 - R_1^2)], \quad \gamma_{ij} = -[AR_j^i(\ln R_j^i + 1) + 4dR_j^3].$$

При получении и анализе нечетко-множественных обобщений моделей, описываемых соотношениями (2.66) – (2.70) вводятся дополнительные нечетко-интервальные описания для обладающих разбросами исходных геометрических параметров и параметра нагружения

$$\tilde{R}_0 = (R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{04}), \quad \tilde{R}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [R_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}], \quad R_{0\alpha} = (1-\alpha)R_{01} + \alpha R_{02}, \quad \bar{R}_{0\alpha} = \alpha R_{03} + (1-\alpha)R_{04}; \\ \tilde{R}_1 = (R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{14}), \quad \tilde{R}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [R_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}], \quad R_{1\alpha} = (1-\alpha)R_{11} + \alpha R_{12}, \quad \bar{R}_{1\alpha} = \alpha R_{13} + (1-\alpha)R_{14}; \\ \tilde{N} = (N_1, N_2, N_3, N_4), \quad \tilde{N} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [N_\alpha, \bar{N}_\alpha], \quad N_\alpha = (1-\alpha)N_1 + \alpha N_2, \quad \bar{N}_\alpha = \alpha N_3 + (1-\alpha)N_4;$$

и для эндогенных характеристик напряженного состояния на основании применения α – уровневой формы эвристического принципа обобщения записываются представления вида

$$\tilde{M}_r^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [G_{r\alpha}^{(j)}(r), \bar{G}_{r\alpha}^{(j)}(r)] \quad (j = \overline{5, 6}), \quad (2.71)$$

$$\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) = \inf_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha]}} \{G_r^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r)\}, \quad \bar{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) = \sup_{\substack{\nu \in [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha]}} \{G_r^{(j)}(\nu, E, h, R_0, R_1, N, r)\};$$

$$\tilde{M}_\theta^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [G_{\theta\alpha}^{(j)}(r), \bar{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r)] \quad (j = \overline{5, 6}), \quad (2.72)$$

$$\underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) = \inf_{\substack{v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha]}} \{G_\theta^{(j)}(v, E, h, R_0, R_1, N, r)\}, \quad \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) = \sup_{\substack{v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ N \in [\underline{N}_\alpha, \bar{N}_\alpha]}} \{G_\theta^{(j)}(v, E, h, R_0, R_1, N, r)\};$$

$$\tilde{M}_r^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r), \overline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r)] \quad (j = \overline{7,9}), \quad (2.73)$$

$$\underline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) = \inf_{\substack{v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha]}} \{G_r^{(j)}(v, E, h, R_0, R_1, q, r)\}, \quad \overline{G}_{r\alpha}^{(j)}(r) = \sup_{\substack{v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha]}} \{G_r^{(j)}(v, E, h, R_0, R_1, q, r)\};$$

$$\tilde{M}_\theta^{(j)}(r) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r), \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r)] \quad (j = \overline{7,9}), \quad (2.74)$$

$$\underline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) = \inf_{\substack{v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha]}} \{G_\theta^{(j)}(v, E, h, R_0, R_1, q, r)\}, \quad \overline{G}_{\theta\alpha}^{(j)}(r) = \sup_{\substack{v \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ R_0 \in [\underline{R}_{0\alpha}, \bar{R}_{0\alpha}] \\ R_1 \in [\underline{R}_{1\alpha}, \bar{R}_{1\alpha}] \\ q \in [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha]}} \{G_\theta^{(j)}(v, E, h, R_0, R_1, q, r)\}.$$

Примеры численной реализации описанной методики оценивания количественных разбросов параметрических оценок $M_r^{(j)}(r)$, $M_\theta^{(j)}(r)$ для рассматриваемых моделей осесимметричного изгиба кольцевых пластин представлены применительно к вышеприведенному случаю задания исходных нечетко-интервальных параметров с дополнением

$$\tilde{N} = (0.28n_*, 0.31n_*, 0.32n_*, 0.36n_*), \quad n_* = 10^3[\text{н}/(\text{рад} \cdot \text{м})].$$

Расчеты, результаты которых отражены на рисунках 2.61 – 2.80, относятся к случаям, когда геометрические параметры рассматриваемых плит полагаются точными величинами без разбросов со значениями

$$R_0 = 0.4l_*, \quad R_1 = 0.1l_*, \quad h = 3 \cdot 10^{-3}l_*,$$

а механические свойства материала плиты и характеристик внешнего нагружения обладают вышеописанными разбросами значений. Описания характеристик нечетко-множественных параметрических распределений $\tilde{M}_r^{(j)}(r)$, $\tilde{M}_\theta^{(j)}(r)$,

определяемых соотношениями (2.71) – (2.74), а также формы функций принадлежности для этих нечетко-множественных величин при отдельных значениях радиальной координаты даны на рисунках 2.61 – 2.80. Результаты расчетов во всех рассмотренных случаях согласуются с оценками, получаемыми в работах [122, 255] на основе детерминистических вариантов соответствующих моделей.

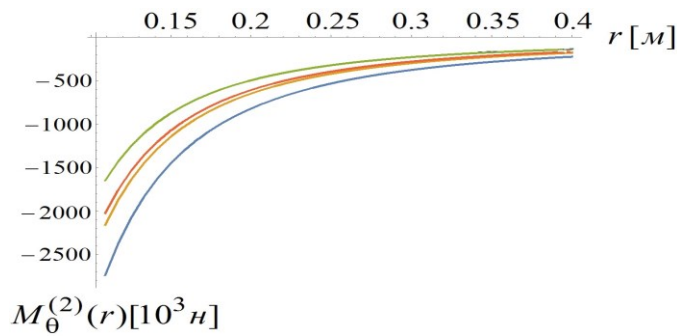


Рис. 2.61. Распределения $M_r^{(5)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(5)}(r)}(M_r^{(5)}(r))$

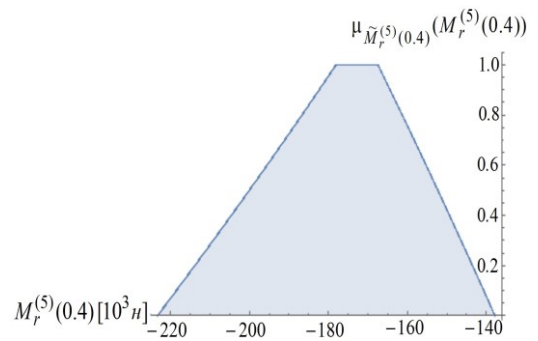


Рис. 2.62. Функция принадлежности $\tilde{M}_r^{(5)}(0.4)$

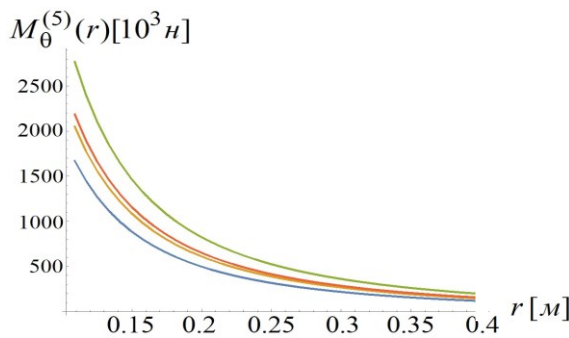


Рис. 2.63. Распределения $M_{\theta}^{(5)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_{\theta}^{(5)}(r)}(M_r^{(5)}(r))$

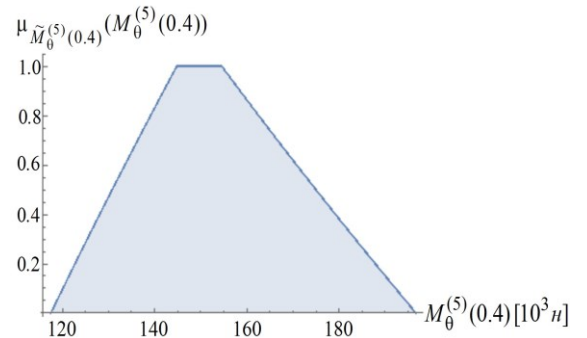


Рис. 2.64. Функция принадлежности $\tilde{M}_{\theta}^{(5)}(0.4)$

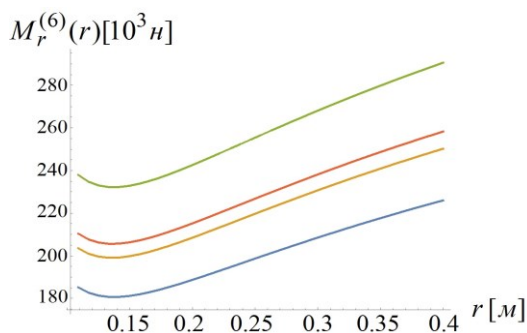


Рис. 2.65. Распределения $M_r^{(6)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(6)}(r)}(M_r^{(6)}(r))$

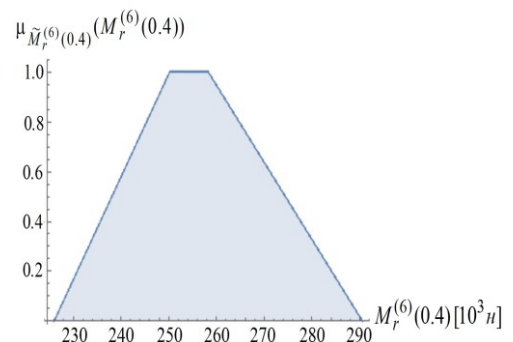


Рис. 2.66. Функция принадлежности $\tilde{M}_r^{(6)}(0.4)$

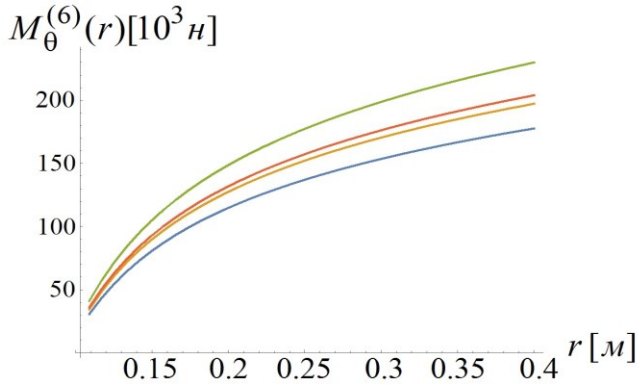


Рис. 2.67. Распределения $M_\theta^{(6)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(6)}(r)}(M_r^{(6)}(r))$

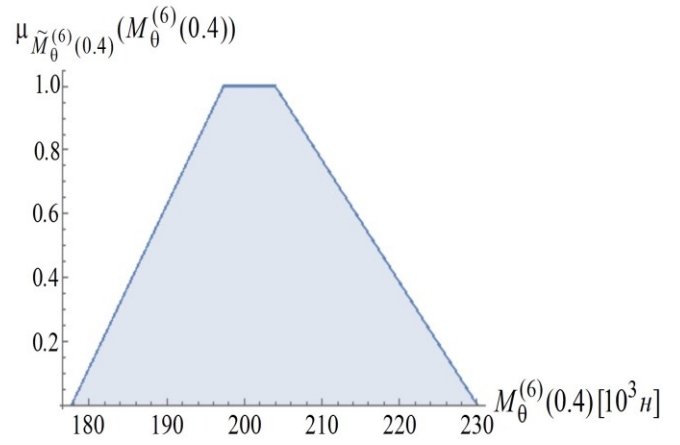


Рис. 2.68. Функция принадлежности $\tilde{M}_\theta^{(6)}(0.4)$

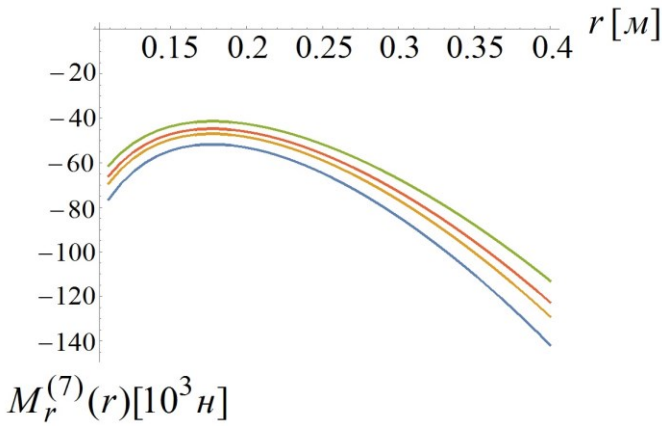


Рис. 2.69. Распределения $M_r^{(7)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(7)}(r)}(M_r^{(7)}(r))$

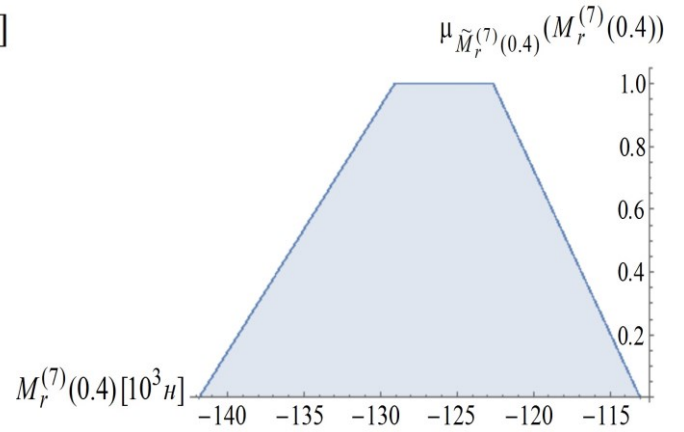


Рис. 2.70. Функция принадлежности $\tilde{M}_r^{(7)}(0.4)$

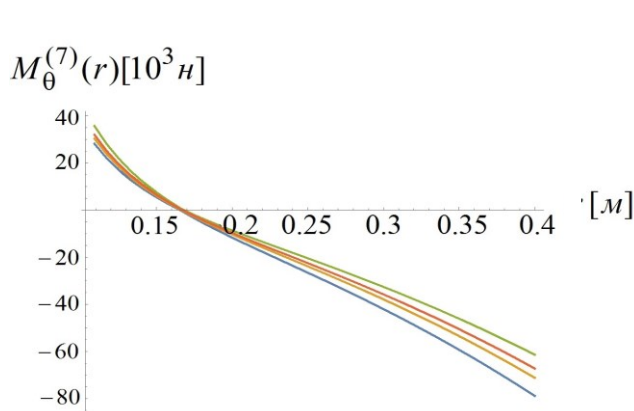


Рис. 2.71. Распределения $M_\theta^{(7)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(7)}(r)}(M_r^{(7)}(r))$

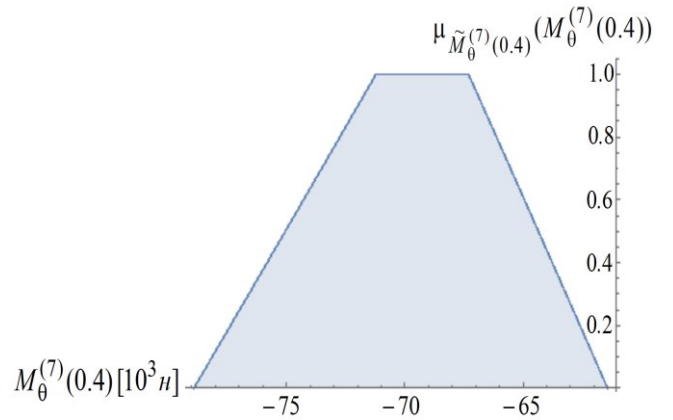


Рис. 2.72. Функция принадлежности $\tilde{M}_\theta^{(7)}(0.4)$

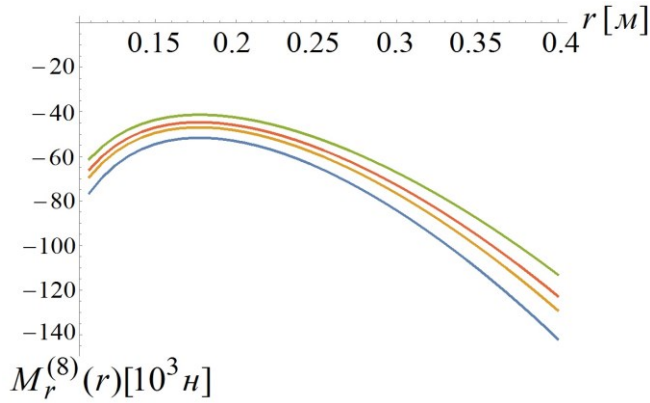


Рис. 2.73. Распределения $M_r^{(8)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(8)}(r)}(M_r^{(8)}(r))$

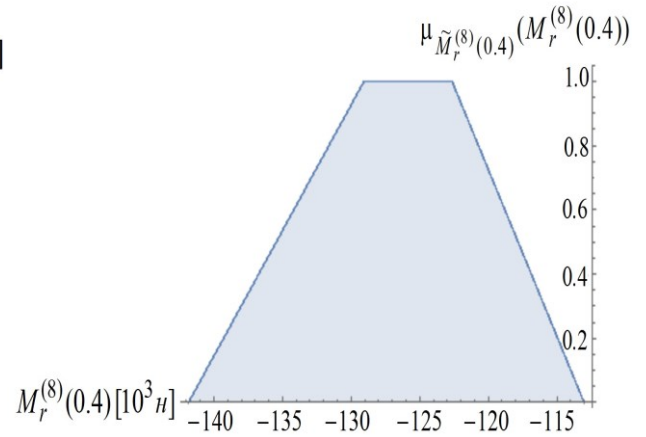


Рис. 2.74. Функция принадлежности $\tilde{M}_r^{(8)}(0.4)$

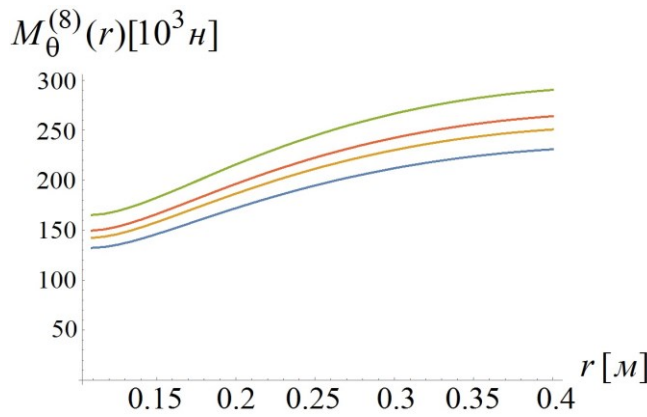


Рис. 2.75. Распределения $M_\theta^{(8)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(8)}(r)}(M_r^{(8)}(r))$

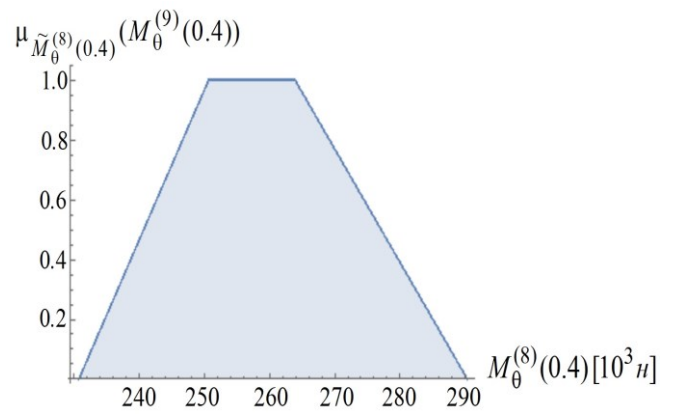


Рис. 2.76. Функция принадлежности $\tilde{M}_\theta^{(8)}(0.4)$

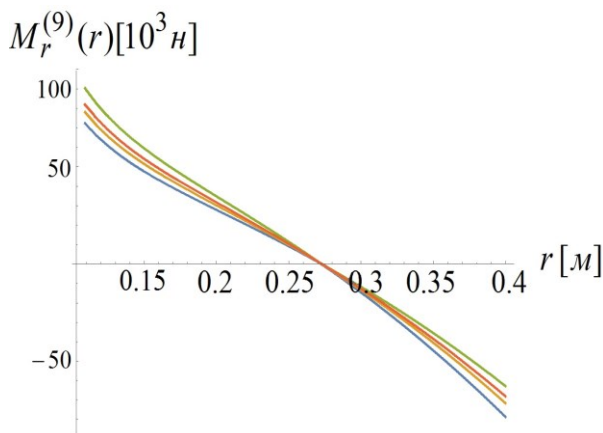


Рис. 2.77. Распределения $M_r^{(9)}(r)$ с показателями $\mu_{\tilde{M}_r^{(9)}(r)}(M_r^{(9)}(r))$

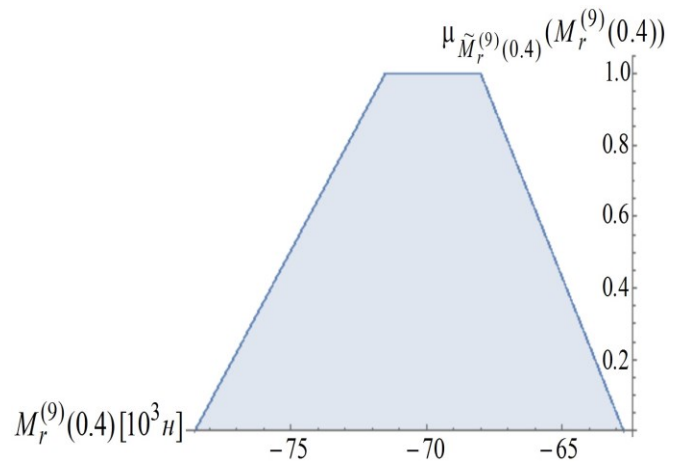


Рис. 2.78. Функция принадлежности $\tilde{M}_r^{(9)}(0.4)$

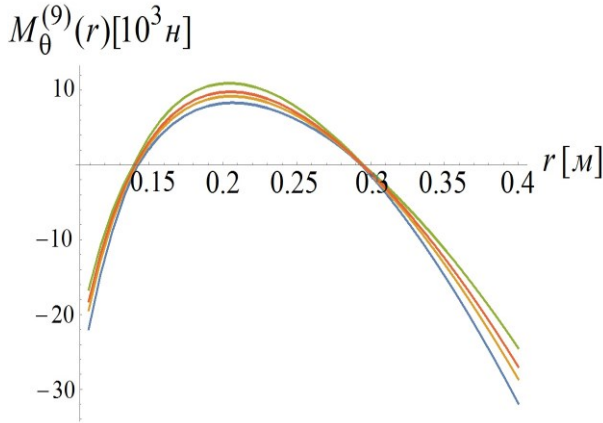


Рис. 2.79. Распределения $M_\theta^{(9)}(r)$
с показателями $\mu_{\tilde{M}_\theta^{(9)}(r)}(M_r^{(9)}(r))$

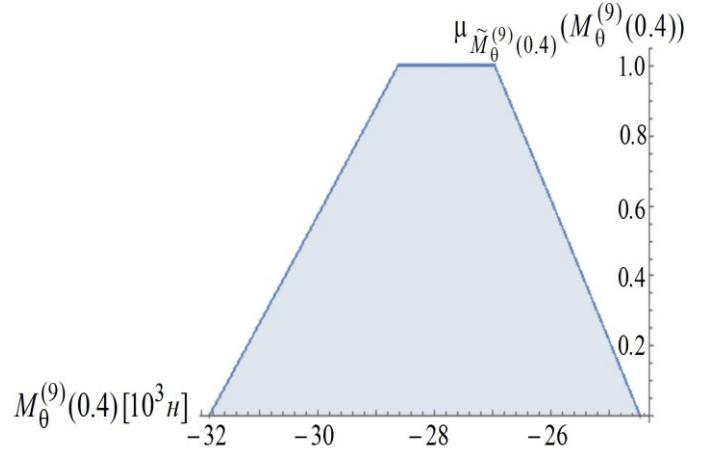


Рис. 2.80. Функция принадлежности
 $\tilde{M}_\theta^{(9)}(0.4)$

Соотношения нечетко-множественной модели учета факторов разброса механических и геометрических характеристик получены и применительно к задаче изгиба сплошных тонких ортотропных эллиптических плит [199] равномерно распределенными по контуру изгибающими моментами интенсивности M_0 . В этом случае для характеристик напряженного состояния плит с отнесенной к прямоугольным координатам Ox_1x_2 срединной плоскостью используются аналитические представления вида

$$M_{11} = -2\operatorname{Re}(p_1\tilde{a}_{11}R_{10}^{-1} + p_2\tilde{a}_{21}R_{20}^{-1}), M_{22} = -2\operatorname{Re}(q_1\tilde{a}_{11}R_{10}^{-1} + q_2\tilde{a}_{21}R_{20}^{-1}), \quad (2.75)$$

$$M_{12} = -2\operatorname{Re}(r_1\tilde{a}_{11}R_{10}^{-1} + r_2\tilde{a}_{21}R_{20}^{-1}),$$

$$p_k = D_{11} + D_{12}\mu_k^2, \quad q_k = D_{12} + D_{22}\mu_k^2, \quad r_k = 2D_{66}\mu_k, \quad R_{k0} = (a_0 - i\mu_k b_0)/2, \quad m_{k0} = (a_0 + i\mu_k b_0)/(2R_{k0}),$$

в которых μ_k – корни характеристического уравнения

$$D_{22}\mu^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + D_{11} = 0,$$

соответственно имеющие аналитические представления

$$\mu_k = \pm[-(D_{12} + 2D_{66}) + (-1)^k((D_{12} + 2D_{66})^2 - D_{11}D_{22})^{1/2}]^{1/2}, \quad \operatorname{Im}[\mu_k] > 0;$$

a_0 , b_0 – полуоси эллиптического контура пластины. Коэффициенты характеристического уравнения и соотношения для характеристик напряженного состояния плиты толщины $2h$ содержат параметры изгибных жесткостей $D_{ij} = (2h^3/3)b_{ij}$, где $b_{11} = a_{22}a_{66}\Delta^{-1}$, $b_{12} = -a_{12}a_{66}\Delta^{-1}$, $b_{22} = a_{11}a_{66}\Delta^{-1}$, $b_{66} = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\Delta^{-1}$,

$b_{11} = a_{22}a_{66}\Delta^{-1}$, $\Delta = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{66}$, а величины a_{ij} альтернативно выражаются через технические упругие постоянные ортотропного материала пластины в виде модулей Юнга, модулей сдвига и коэффициентов Пуассона. Величины $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{21}$ определяются из алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (p_1 m_{10} \mu_1^{-1}) \tilde{a}_{11} + (\bar{p}_1 \bar{\mu}_1^{-1}) \bar{\tilde{a}}_{11} + (p_2 m_{20} \mu_2^{-1}) \tilde{a}_{21} + (\bar{p}_2 \bar{\mu}_2^{-1}) \bar{\tilde{a}}_{21} &= -i M_0 b_0 / 2, \\ (q_1 m_{10}) \tilde{a}_{11} + (\bar{q}_1) \bar{\tilde{a}}_{11} + (q_2 m_{20}) \tilde{a}_{21} + (\bar{q}_2) \bar{\tilde{a}}_{21} &= -M_0 a_0 / 2. \end{aligned}$$

Таким образом, в форме (2.75), по-существу, записываются неявные аналитические функциональные зависимости для определения характеристик напряженного состояния $M_{ij}(M_0, a, b, h, E_1, E_2, G_{12}, \nu_{21})$ через экзогенные параметры модели, часть которых либо всю их совокупность можно рассматривать как неопределенные величины, характеризующиеся определенными разбросами в значениях. Полагается, что характер разброса позволяет описывать неопределенные экзогенные параметры трапецидальными нечеткими интервалами $\tilde{M}_0, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{h}, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{G}_{12}, \tilde{\nu}_{21}$ с кортежами реперных точек $(M_0^{(1)}, M_0^{(2)}, M_0^{(3)}, M_0^{(4)})$, $(a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)})$, ..., $(\nu_{21}^{(1)}, \nu_{21}^{(2)}, \nu_{21}^{(3)}, \nu_{21}^{(4)})$ и представлениями в виде суперпозиций множеств α -срезов:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{M}_{0\alpha}, \bar{M}_{0\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)M_0^{(1)} + \alpha M_0^{(2)}, \alpha M_0^{(3)} + (1-\alpha)M_0^{(4)}), \dots, \\ \tilde{\nu}_{21} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\nu}_{21\alpha}, \bar{\nu}_{21\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\nu_{21}^{(1)} + \alpha \nu_{21}^{(2)}, \alpha \nu_{21}^{(3)} + (1-\alpha)\nu_{21}^{(4)}). \end{aligned}$$

Искомые нечеткие оценки \tilde{M}_{ij} , получаемые на основе соотношений (2.75), также формируются в виде суперпозиций по множествам α - уровня

$$\tilde{M}_{ij} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{M}_{ij\alpha}, \bar{M}_{ij\alpha}), \text{ где}$$

$$\underline{M}_{ij\alpha} = \left\{ \inf_{\substack{M_0 \in (\underline{M}_{0\alpha}, \overline{M}_{0\alpha}) \\ a \in (\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha) \\ b \in (\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) \\ E_j \in (\underline{E}_{j\alpha}, \overline{E}_{j\alpha}) \\ G_{12} \in (\underline{G}_{12\alpha}, \overline{G}_{12\alpha}) \\ \nu_{21} \in (\underline{\nu}_{21\alpha}, \overline{\nu}_{21\alpha})}} M_{ij}(M_0, a, b, h, E_1, E_2, G_{12}, \nu_{21}) \right\}$$

$$\overline{M}_{ij\alpha} = \left\{ \sup_{\substack{M_0 \in (\underline{M}_{0\alpha}, \overline{M}_{0\alpha}) \\ a \in (\underline{a}_\alpha, \overline{a}_\alpha) \\ b \in (\underline{b}_\alpha, \overline{b}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha) \\ E_j \in (\underline{E}_{j\alpha}, \overline{E}_{j\alpha}) \\ G_{12} \in (\underline{G}_{12\alpha}, \overline{G}_{12\alpha}) \\ \nu_{21} \in (\underline{\nu}_{21\alpha}, \overline{\nu}_{21\alpha})}} M_{ij}(M_0, a, b, h, E_1, E_2, G_{12}, \nu_{21}) \right\}.$$

2.5. Метод учета факторов неопределенности в моделях термоупругого деформирования тонких пластин с контурами эллиптического очертания

К наиболее актуальным моделям напряженного состояния конструкционных элементов в виде тонких пластин круговой и эллиптической формы, пластин с малыми отверстиями эллиптического и кругового очертания, которые являются распространенными элементами конструкций аэрокосмических аппаратов и промышленного оборудования конструкций, относятся модели их температурного деформирования. В частности, это модели изгибного деформирования сплошных пластин эллиптической формы, вызванного различиями температур на противоположных плоских гранях; модели симметричного по толщине термонапряженного состояния пластин с отверстиями, обусловленного тепловыми потоками в их плоскости, и ряд иных моделей для конструкций данного типа. Методики анализа указанных моделей для современных высокотехнологичных приложений должны, помимо прочего, обеспечивать корректный учет влияния реально существующих разбросов в значениях физико-механических и геометрических параметров данных конструкций на характеристики полей возникающих температурных напряжений.

В этом контексте, данный подраздел посвящен разработке теоретической численно-аналитической нечетко-множественной методологии для учета влияния вариаций в значениях исходных параметров на оценки эндогенных характеристик температурных напряжений при анализе моделей температурного

деформирования тонкостенных элементов с эллиптическими границами [140, 211, 298, 326, 334].

Первой из рассматриваемых моделей является базирующаяся на гипотезах Кирхгоффа прикладная модель термоупругого изгиба тонких пластин из анизотропных композиционных материалов орторомбического класса, теоретическое численно-аналитическое исследование которой эффективно реализуется с применением методов комплексных потенциалов обобщенных комплексных переменных. Базовые соотношения детерминистической версии этой модели формулируются для конструкционного элемента в форме односвязной анизотропной пластины орторомбического класса с толщиной h , которая занимает область $V = \{(x_1, x_2) \in S, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\}$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$. Граничный эллиптический контур L срединной плоскости пластины S имеет полуоси a, b . Изгиб пластины обусловлен действием линейно изменяющегося по ее толщине стационарного поля температур $T(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \tau_0(x_1, x_2)$, а внешние усилия на плоских гранях $x_3 = \pm h/2$ отсутствуют. Рассматривается случай жестко закрепленной боковой поверхности пластины, и на боковой граничной поверхности $\Gamma = \{(x_1, x_2) \in L, x_3 \in [-h/2, h/2]\}$ выполняется условие $(\tau_0(x_1, x_2))_\Gamma = T_0$.

В данной задаче получаемые с применением методов теории функций обобщенных комплексных переменных [119, 139, 140, 211, 334] усредненные характеристики напряженного состояния – изгибающие моменты M_1, M_2 , закручивающий момент H_{12} и поперечные силы N_1, N_2 , являются постоянными величинами и имеют представления [140]

$$M_1 = -\gamma_1 T_0, M_2 = -\gamma_2 T_0, H_{12} = N_1 = N_2 = 0, \quad (2.76)$$

$$\gamma_1 = D_{11}\alpha_1 + D_{12}\alpha_2, \gamma_2 = D_{12}\alpha_1 + D_{22}\alpha_2, \quad D_{11} = E_1 h^3 / (12(1 - \nu_1 \nu_2)), D_{22} = E_2 h^3 / (12(1 - \nu_1 \nu_2)),$$

$$D_{12} = \nu_1 E_1 h^3 / (12(1 - \nu_1 \nu_2)) = \nu_2 E_2 h^3 / (12(1 - \nu_1 \nu_2));$$

в которых E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона материала пластины; α_1, α_2 – коэффициенты теплового расширения материала пластины

вдоль упруго-эквивалентных направлений. Таким образом, в соответствии с соотношениями (2.76) подлежащие анализу эндогенные характеристики изгибающих моментов M_1, M_2 описываются функциональными зависимостями

$$M_j = F_{M_j}(h, E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, T_0, \alpha_1, \alpha_2). \quad (2.77)$$

Второй из рассматриваемых моделей, применительно к которым разрабатывается нечетко-множественная методика анализа влияния факторов неопределенности, является модель описания концентрации термомеханических напряжений на контуре эллиптического отверстия с полуосями a, b в тонкой изотропной пластине при симметричном по толщине деформировании. Обобщенное плоское напряженное состояние пластины обусловлено действием направленного под углом β к координатному направлению Ox_1 симметричного по толщине теплового потока с усредненной интенсивностью q , которому соответствует распределение усредненной функции температуры $T(x_1, x_2)$ в срединной плоскости пластины $T(x_1, x_2) = q(x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)$. Согласно [140], напряжение в точке с угловой координатой θ на контуре отверстия с параметрическим описанием

$$x_1 = a \cos \theta, x_2 = b \sin \theta, \quad (2.78)$$

определяется по формуле

$$\sigma_\theta = F_{\sigma_\theta}(\alpha_t, q, a, b, E, \beta, \theta) = \alpha_t q E R [(1 - k^2) \cos(\theta + \beta) - (1 + k^2) \cos(\theta - \beta)] \cdot [1 - \cos 2\theta + k^2 (1 + \cos 2\theta)]^{-1}. \quad (2.79)$$

В выражении (2.79) $k = b/a$; $R = (a + b)/2$; α_t – температурный коэффициент линейного расширения материала пластины; E – модуль Юнга материала пластины. Представления (2.77) и (2.79) являются основой для применения нечетко-множественной методики оценивания показателей влияния неопределенности в виде разбросов значений исходных параметров рассматриваемых моделей.

Гипотезой, которая вводится при дальнейшем исследовании, является интерпретация обладающих разбросами значений исходных физико-механических и геометрических параметров как нечетко-множественных величин

в виде трапецеидальных нормальных нечетких интервалов. В модели термоупругого изгиба тонкой эллиптической пластины из анизотропного композиционного материала орторомбического класса для экзогенных параметров $a, b, h, E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G, T_0, \alpha_1, \alpha_2$ вводятся нечетко-интервальные описания $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{h}, \tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{\nu}_1, \tilde{\nu}_2, \tilde{G}, \tilde{T}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ вида

$$\begin{aligned} \tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4), \tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \tilde{E}_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{14}), \\ \tilde{E}_2 = (E_{21}, E_{22}, E_{23}, E_{24}), \tilde{\nu}_1 = (\nu_{11}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{14}), \tilde{\nu}_2 = (\nu_{21}, \nu_{22}, \nu_{23}, \nu_{24}), G = (G_1, G_2, G_3, G_4), \\ \tilde{T}_0 = (T_{01}, T_{02}, T_{03}, T_{04}), \tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}), \tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{24}). \end{aligned} \quad (2.80)$$

С использованием представлений (2.76) и правил нечетко-интервальной арифметики могут быть поочередно получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{11} &= (E_{11}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21}), E_{12}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22}), E_{13}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23}), E_{14}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})), \\ \tilde{D}_{22} &= (E_{21}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21}), E_{22}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22}), E_{23}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23}), E_{24}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})), \\ \tilde{D}_{12} &= (\nu_{11}E_{11}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21}), \nu_{12}E_{12}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22}), \nu_{13}E_{13}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23}), \nu_{14}E_{14}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})), \\ \tilde{D}_{11} &= (\alpha_{11} - \nu_{11}\alpha_{21})E_{11}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21})), (\alpha_{12} + \nu_{12}\alpha_{22})E_{12}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22})), \\ &(\alpha_{13} + \nu_{13}\alpha_{23})E_{13}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23})), (\alpha_{14} + \nu_{14}\alpha_{24})E_{14}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})), \\ \tilde{D}_{22} &= (\alpha_{21} + \nu_{21}\alpha_{11})E_{21}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21})), (\alpha_{22} + \nu_{22}\alpha_{12})E_{22}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22})), \\ &(\alpha_{23} + \nu_{23}\alpha_{13})E_{23}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23})), (\alpha_{24} + \nu_{24}\alpha_{14})E_{24}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})), \\ \tilde{\Lambda}_{-1} &= -T_{01}(\alpha_{11} + \nu_{11}\alpha_{21})E_{11}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21})), -T_{02}(\alpha_{12} + \nu_{12}\alpha_{22})E_{12}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22})), \\ &-T_{03}(\alpha_{13} + \nu_{13}\alpha_{23})E_{13}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23})), -T_{04}(\alpha_{14} + \nu_{14}\alpha_{24})E_{14}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})), \\ \tilde{\Lambda}_{-2} &= -T_{01}(\alpha_{21} + \nu_{21}\alpha_{11})E_{21}h_1^3 / (12(1 - \nu_{11}\nu_{21})), -T_{02}(\alpha_{22} + \nu_{22}\alpha_{12})E_{22}h_2^3 / (12(1 - \nu_{12}\nu_{22})), \\ &-T_{03}(\alpha_{23} + \nu_{23}\alpha_{13})E_{23}h_3^3 / (12(1 - \nu_{13}\nu_{23})), -T_{04}(\alpha_{24} + \nu_{24}\alpha_{14})E_{24}h_4^3 / (12(1 - \nu_{14}\nu_{24})). \end{aligned} \quad (2.81)$$

В частности, для пластины из волокнистого композиционного волокнистого материала – стеклопластика [140], при задании описываемых таблицами 2.4 и 2.5 нечетко-интервальных исходных параметров эндогенные параметры величин изгибающих моментов описываются нечеткими интервалами с функциями принадлежности, представленными на рис. 2.81, 2.82.

Таблица 2.4.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры				
	\tilde{a} [$10^{-3} м$]	\tilde{b} [$10^{-3} м$]	\tilde{h} [$10^{-3} м$]	$\tilde{\alpha}_1$ [$10^{-5} / град$]	$\tilde{\alpha}_2$ [$10^{-5} / град$]
γ_1	194	94	3.8	0.66	3.75
γ_2	198	97	4.0	0.69	3.80
γ_3	201	101	4.2	0.71	3.82
γ_4	203	102	4.6	0.74	3.94

Таблица 2.5.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры					
	\tilde{E}_1 [$10^{10} Па$]	\tilde{E}_2 [$10^{10} Па$]	\tilde{G} [$10^{10} Па$]	\tilde{v}_1	\tilde{v}_2	\tilde{T}_0
γ_1	3.78	0.96	0.378	0.071	0.26	96
γ_2	3.81	1.00	0.383	0.072	0.28	115
γ_3	3.83	1.05	0.385	0.074	0.29	121
γ_4	3.91	1.12	0.392	0.076	0.30	135

Для анализа факторов неопределенности в описываемой представлением вида (2.79) модели концентрации термомеханических напряжений на контуре эллиптического отверстия вследствие действия обтекающего теплового потока также принимается гипотеза нечетко-интервальных описаний для имеющих разбросы значений исходных параметров и используется модифицированная α -уровневая форма эвристического принципа обобщения. Для экзогенных параметров $\alpha_i, q, a, b, E, \beta$ в соотношении (2.79), помимо описанных в представлениях (2.80), вводятся нечетко-интервальные обобщения $\tilde{\alpha}_i, \tilde{q}, \tilde{\beta}$ вида

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_t &= (\alpha_{t1}, \alpha_{t2}, \alpha_{t3}, \alpha_{t4}), \quad \tilde{\alpha}_t = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{t\alpha}, \bar{\alpha}_{t\alpha}], \quad \underline{\alpha}_{t\alpha} = (1-\alpha)\alpha_{t1} + \alpha\alpha_{t2}, \quad \bar{\alpha}_{t\alpha} = \alpha\alpha_{t3} + (1-\alpha)\alpha_{t4}; \\ \tilde{q} &= (q_1, q_2, q_3, q_4), \quad \tilde{q} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha], \quad \underline{q}_\alpha = (1-\alpha)q_1 + \alpha q_2, \quad \bar{q}_\alpha = \alpha q_3 + (1-\alpha)q_4; \quad (2.82) \\ \tilde{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \quad \tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_\alpha, \bar{\beta}_\alpha], \quad \underline{\beta}_\alpha = (1-\alpha)\beta_1 + \alpha\beta_2, \quad \bar{\beta}_\alpha = \alpha\beta_3 + (1-\alpha)\beta_4.\end{aligned}$$

Для эндогенного параметра в виде параметрического нечеткого множества $\tilde{\sigma}_\theta(\theta)$ с учетом свойств

$$\partial F_{\sigma_\theta}(\alpha_t, q, a, b, E, \beta, \theta) / \partial \alpha_t > 0, \quad \partial F_{\sigma_\theta}(\alpha_t, q, a, b, E, \beta, \theta) / \partial q > 0, \quad \partial F_{\sigma_\theta}(\alpha_t, q, a, b, E, \beta, \theta) / \partial E > 0,$$

на основе применения модифицированной α – уровневой формы эвристического принципа обобщения записывается представление

$$\tilde{\sigma}_\theta(\theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\theta\alpha}(\theta), \bar{\sigma}_{\theta\alpha}(\theta)], \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_{\theta\alpha}(\theta) &= \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \beta \in [\underline{\beta}_\alpha, \bar{\beta}_\alpha]}} \{F_{\sigma_\theta}(\underline{\alpha}_{\theta\alpha}, \underline{q}_\alpha, a, b, \underline{E}_\alpha, \beta, \theta)\}, & \bar{\sigma}_{\theta\alpha}(\theta) &= \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \beta \in [\underline{\beta}_\alpha, \bar{\beta}_\alpha]}} \{F_{\sigma_\theta}(\bar{\alpha}_{\theta\alpha}, \bar{q}_\alpha, a, b, \bar{E}_\alpha, \beta, \theta)\}.\end{aligned}$$

В примере реализации описанной методики функции принадлежности $\mu_{\tilde{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\sigma}_\theta(\theta)$, полученные для значений $\theta = n\pi/4$ ($n = \overline{0,7}$) с использованием представления (2.83), представлены на рис. 2.83 – рис. 2.90. для случая описания эффектов воздействия теплового потока в содержащей эллиптическое отверстие пластине из композиционного полимерного материала [140] при задании представленных в таблице 2.6 неконтрастных физико-механических и геометрических параметров. Нечеткая характеристика \tilde{q} задается в виде

$$\tilde{q} = (234q_*, 240q_*, 245q_*, 252q_*), \quad q_* = 1 [\text{град/м}].$$

Полученные в результате анализа рассматриваемой модели оценки позволяют сделать выводы о диапазонах наиболее достоверных отклонений в значениях анализируемых показателей интенсивности изгибающих моментов и уровней концентрации напряжений в различных точках контура отверстия при рассматриваемых разбросах физико-механических параметров, а также о

границах возможных значений показателей концентрации, принимаемых на минимальном уровне уверенности.

Таблица 2.6.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры				
	\tilde{E} [10^{10} Па]	$\tilde{\beta}$ [рад]	\tilde{a} [10^{-2} м]	\tilde{b} [10^{-2} м]	$\tilde{\alpha}_i$ [10^{-5} град $^{-1}$]
γ_1	3.48	1.042	19.4	9.4	3.85
γ_2	3.51	1.047	19.8	9.7	4.00
γ_3	3.53	1.049	20.1	10.1	4.05
γ_4	3.61	1.053	20.3	10.2	4.20

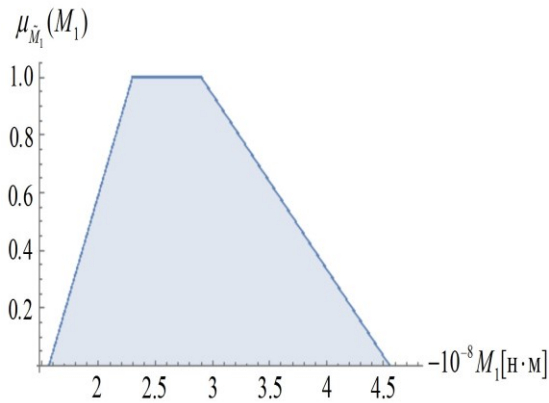


Рис. 2.81. Функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{M}_1}(M_1)$$

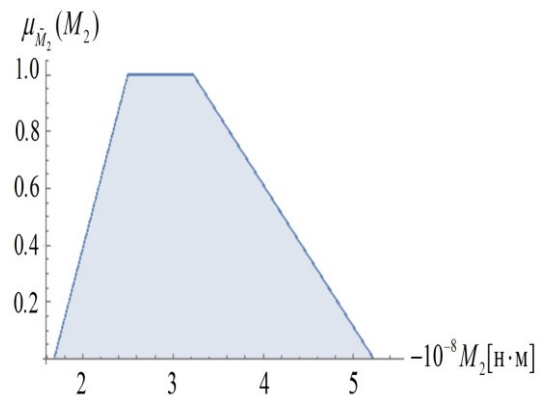


Рис. 2.82 Функция принадлежности

$$\mu_{\tilde{M}_2}(M_2)$$

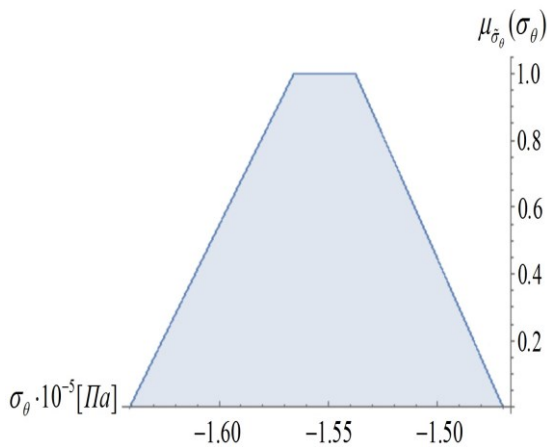


Рис. 2.83. Функция $\mu_{\tilde{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = 0$.

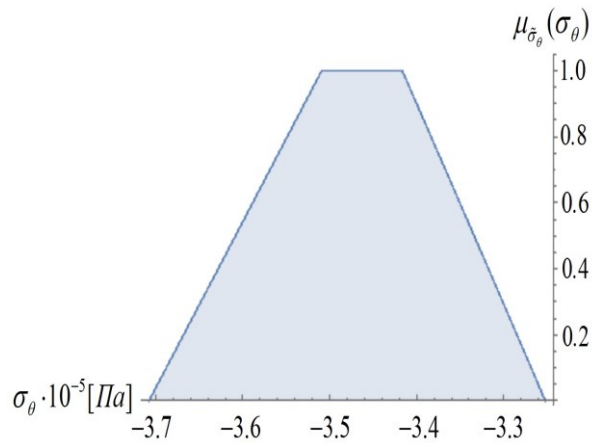
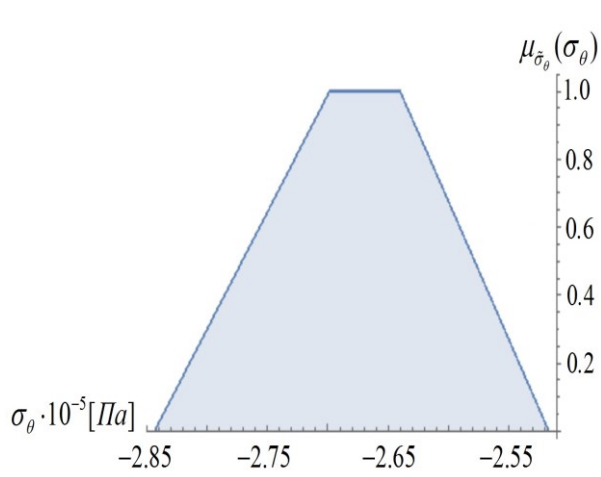
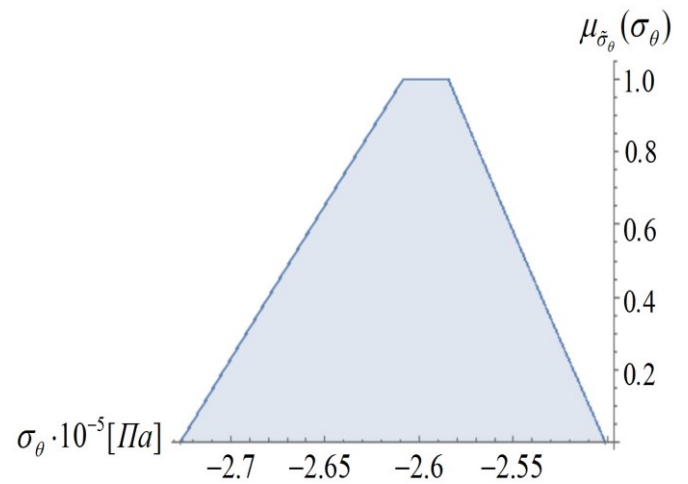
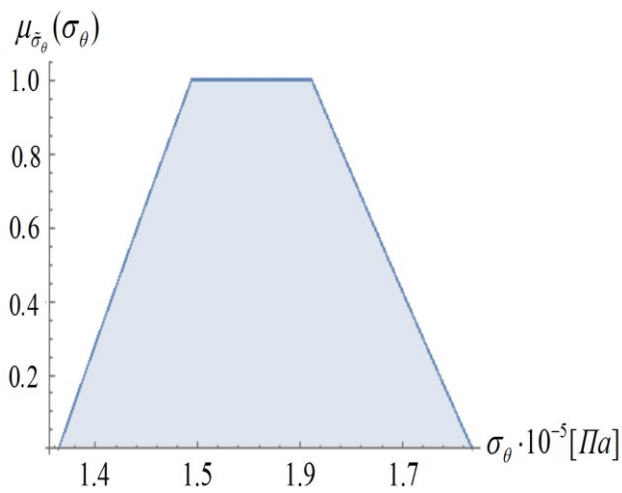
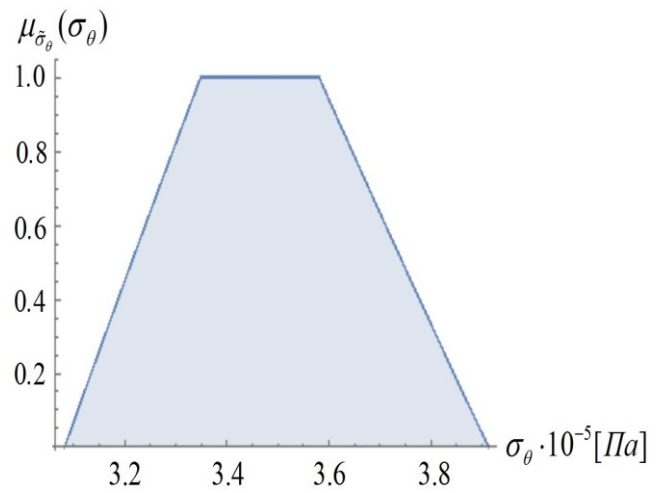
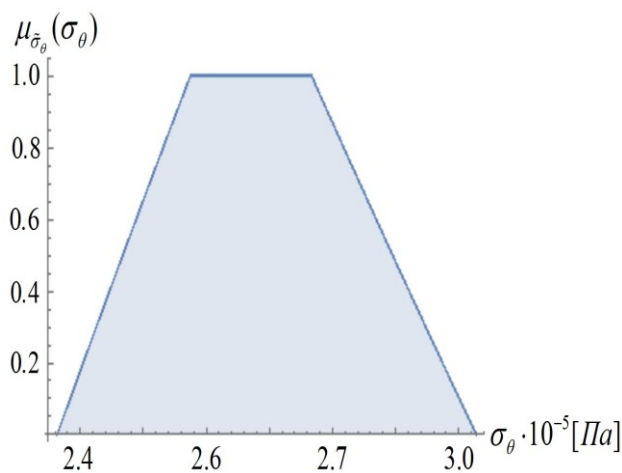
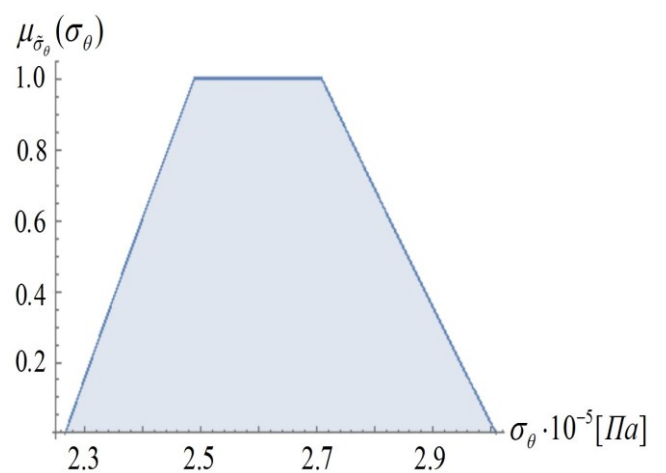


Рис. 2.84. Функция $\mu_{\tilde{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = \pi/4$.

Рис. 2.85. Функция $\mu_{\bar{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = \pi/2$.Рис. 2.86. Функция $\mu_{\bar{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = 3\pi/4$.Рис. 2.87. Функция $\mu_{\bar{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = \pi$.Рис. 2.88. Функция $\mu_{\bar{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = 5\pi/4$.Рис. 2.89. Функция $\mu_{\bar{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = 3\pi/2$.Рис. 2.90. Функция $\mu_{\bar{\sigma}_\theta}(\sigma_\theta)$ для $\theta = 7\pi/4$.

2.6. Нечетко-множественный анализ влияния факторов неопределенности в задачах устойчивости трехслойных пластин

В данном подразделе работы представлена нечетко-множественная методика исследования степени влияния неопределенности в виде погрешностей значений исходных параметров на эндогенные характеристики моделей устойчивости тонких трехслойных пластин. Методика ориентирована на учет разбросов данных экспериментальных измерений механических и геометрических параметров, а также технологических допусков для рассматриваемых конструкций. Используются результаты анализа детерминистических версий соответствующих моделей с переходом к нечетко-интервальным аргументам на основе эвристического принципа расширения.

В соответствии с целями исследования, рассматривается несколько вариантов постановки задач теории устойчивости трехслойной прямоугольной пластины симметричной по толщине структуры с заполнителями пониженной жесткости [51, 135, 210]. Полагается, что срединная плоскость пластины Γ занимает во вводимых координатах область $\Gamma: \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, x_3 = 0\}$; легкий заполнитель из изотропного материала пониженной жесткости с модулем Юнга E_q и модулем сдвига G_q занимает область $V_q = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, h < x_3 < h\}$; внешние изотропные слои одинаковой толщины δ из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν соответственно занимают области

$$V_{\delta}^{(+)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, h \leq x_3 \leq h + \delta\}, V_{\delta}^{(-)} = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, -(h + \delta) \leq x_3 \leq -h\}.$$

На краях пластины заданы условия шарнирного закрепления.

Применительно к первому из рассматриваемых случаев в предположении $l_1 \rightarrow \infty$, то есть для трехслойной пластины со срединной плоскостью в виде полосы $0 \leq x_2 \leq l_2$, нагруженной по граням равномерно распределенными сжимающими усилиями интенсивности P_2 , критическое значение данного усилия, обуславливающего потерю устойчивости с характеризуемой n полуволнами в направлении Ox_2 и одной бесконечно длинной полуволной в направлении Ox_1 изгибной формой, описывается, согласно [210], соотношением

$$P_{2n}^* = \Phi_{1n}(n, \delta, h, l_2, E, \nu, G_q) = \pi^2 D l_2^{-2} (n^2 + \pi^2 D / (2G_q h l_2^2))^{-1} = \quad (2.84)$$

$$= ((\pi^2 D l_2^{-2} n^2)^{-1} + (2G_q h)^{-1})^{-1}, \quad D = 2Eh(h + \delta/2)\delta(1 - \nu^2)^{-1}.$$

Во втором случае рассматривается пластина с прямоугольной срединной плоскостью Γ и шарнирно закрепленными краями, сжимаемая приложенными к торцам $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ равномерно распределенными усилиями интенсивности P_1 в направлении Ox_1 . В данном случае критические усилия, обуславливающие потерю устойчивости с изгибной формой, характеризующейся одной полуволной в направлении Ox_1 и m полуволнам в направлении Ox_2 , описываются представлениями [210]

$$P_{1m}^* = \Phi_{2m}(m, \delta, h, l_1, l_2, E, \nu, G_q) = \pi^2 D l_2^{-2} (m/\gamma + \gamma/m)^2 (1 + \pi^2 D (1 + m^2/\gamma^2) / (2G_q h l_2^2))^{-1}, \quad (2.85)$$

$$\gamma = l_1/l_2.$$

Третий анализируемый случай относится к симметричной относительно срединной плоскости форме потери устойчивости трехслойной полосы $0 \leq x_2 \leq l_2$ (внешнему выпучиванию несущих слоев) с одной полуволной в направлении Ox_2 под действием равномерно распределенных по граням сжимающих усилий интенсивности P_2 . Величина критического усилия в этом случае определяется соотношением [210]

$$P_2^{**} = \Phi_3(\delta, h, E, \nu, E_q) = 4((E_q/h)E\delta^3(12(1-\nu^2))^{-1})^{1/2}. \quad (2.86)$$

Задачей дальнейшего исследования является описание разбросов в значениях критических усилий при учете неопределенности в задании величин исходных параметров рассматриваемых конструкций.

Учет влияния неопределенности экзогенных параметров $\delta, h, l_1, l_2, E, \nu, E_q, G_q$ рассматриваемых моделей осуществляется на основе введения их описаний в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов $\tilde{\delta}, \tilde{h}, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{E}, \tilde{\nu}, \tilde{E}_q, \tilde{G}_q$, задаваемых кортежами реперных значений и суперпозициями соответствующих множеств α – уровня:

$$\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha], \quad \underline{\delta}_\alpha = (1-\alpha)\delta_1 + \alpha\delta_2, \quad \bar{\delta}_\alpha = \alpha\delta_3 + (1-\alpha)\delta_4;$$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4;$$

$$\tilde{l}_1 = (l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_{1\alpha}, \bar{l}_{1\alpha}], \quad \underline{l}_{1\alpha} = (1-\alpha)l_{11} + \alpha l_{12}, \quad \bar{l}_{1\alpha} = \alpha l_{13} + (1-\alpha)l_{14};$$

$$\tilde{l}_2 = (l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_{2\alpha}, \bar{l}_{2\alpha}], \quad \underline{l}_{2\alpha} = (1-\alpha)l_{21} + \alpha l_{22}, \quad \bar{l}_{2\alpha} = \alpha l_{23} + (1-\alpha)l_{24};$$

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4;$$

$$\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha], \quad \underline{v}_\alpha = (1-\alpha)v_1 + \alpha v_2, \quad \bar{v}_\alpha = \alpha v_3 + (1-\alpha)v_4;$$

$$\tilde{E}_q = (E_{q1}, E_{q2}, E_{q3}, E_{q4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{q\alpha}, \bar{E}_{q\alpha}], \quad \underline{E}_{q\alpha} = (1-\alpha)E_{q1} + \alpha E_{q2}, \quad \bar{E}_{q\alpha} = \alpha E_{q3} + (1-\alpha)E_{q4};$$

$$\tilde{G}_q = (G_{q1}, G_{q2}, G_{q3}, G_{q4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{q\alpha}, \bar{G}_{q\alpha}], \quad \underline{G}_{q\alpha} = (1-\alpha)G_{q1} + \alpha G_{q2}, \quad \bar{G}_{q\alpha} = \alpha G_{q3} + (1-\alpha)G_{q4}.$$

Переход к нечетко-интервальным аргументам в соотношениях (2.84) – (2.86) на основе α – уровневой версии эвристического принципа расширения реализуется с учетом устанавливаемых свойств знакоопределенности частных производных от функций $\Phi_{1n}(n, \delta, h, l_2, E, v, G_q)$, $\Phi_{2m}(m, \delta, h, l_1, l_2, E, v, G_q)$, $\Phi_3(\delta, h, E, v, E_q)$ по части аргументов:

$$\partial\Phi_{1n}/\partial\delta \geq 0, \quad \partial\Phi_{1n}/\partial E \geq 0, \quad \partial\Phi_{1n}/\partial v \leq 0, \quad \partial\Phi_{1n}/\partial G_q \geq 0; \quad \partial\Phi_{2m}/\partial\delta \geq 0, \quad \partial\Phi_{2m}/\partial E \geq 0, \quad (2.87)$$

$$\partial\Phi_{2m}/\partial v \leq 0, \quad \partial\Phi_{2m}/\partial G_q \geq 0; \quad \partial\Phi_3/\partial\delta \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial h \leq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial E \geq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial v \leq 0, \quad \partial\Phi_3/\partial E_q \geq 0.$$

С учетом этих оценок для нечетко-множественных характеристик \tilde{P}_{2n}^* , \tilde{P}_{1m}^* , \tilde{P}_2^{**} анализируемых критических усилий соответственно записываются следующие представления:

$$\tilde{P}_{2n}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{2n\alpha}^*, \bar{P}_{2n\alpha}^*], \quad (2.88)$$

$$\underline{P}_{2n\alpha}^* = \inf_{\substack{h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ l_2 \in [\underline{l}_{2\alpha}, \bar{l}_{2\alpha}]}} \Phi_{1n}(n, \underline{\delta}_\alpha, h, l_2, \underline{E}_\alpha, \bar{v}_\alpha, \underline{G}_{q\alpha}), \quad \bar{P}_{2n\alpha}^* = \sup_{\substack{h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ l_2 \in [\underline{l}_{2\alpha}, \bar{l}_{2\alpha}]}} \Phi_{1n}(n, \bar{\delta}_\alpha, h, l_2, \bar{E}_\alpha, \underline{v}_\alpha, \bar{G}_{q\alpha});$$

$$\tilde{P}_{1m}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{1m\alpha}^*, \bar{P}_{1m\alpha}^*], \quad (2.89)$$

$$\underline{P}_{1m\alpha}^* = \inf_{\substack{h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ l_1 \in [\underline{l}_{1\alpha}, \bar{l}_{1\alpha}] \\ l_2 \in [\underline{l}_{2\alpha}, \bar{l}_{2\alpha}]}} \Phi_{2m}(m, \underline{\delta}_\alpha, h, l_1, l_2, \underline{E}_\alpha, \bar{v}_\alpha, \underline{G}_{q\alpha}), \quad \bar{P}_{1m\alpha}^* = \sup_{\substack{h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ l_1 \in [\underline{l}_{1\alpha}, \bar{l}_{1\alpha}] \\ l_2 \in [\underline{l}_{2\alpha}, \bar{l}_{2\alpha}]}} \Phi_{2m}(m, \bar{\delta}_\alpha, h, l_1, l_2, \bar{E}_\alpha, \underline{v}_\alpha, \bar{G}_{q\alpha});$$

$$\tilde{P}_2^{**} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{2\alpha}^{**}, \bar{P}_{2\alpha}^{**}], \quad (2.90)$$

$$\underline{P}_{2\alpha}^{**} = \Phi_3(\underline{\delta}_\alpha, \underline{h}_\alpha, \underline{E}_\alpha, \underline{v}_\alpha, \underline{E}_{q\alpha}), \quad \overline{P}_{2\alpha}^{**} = \Phi_3(\overline{\delta}_\alpha, \overline{h}_\alpha, \overline{E}_\alpha, \overline{v}_\alpha, \overline{E}_{q\alpha}).$$

Соотношения (2.88) – (2.90) позволяют в соответствующих случаях описать разбросы в значениях критических усилий при задании неопределенных исходных параметров.

Представляемые частные примеры расчетов с использованием соотношений (2.88) – (2.90) выполнены для случая пластин с несущими слоями из алюминиевого сплава D16 и заполнителем из пенопласта ПХВ-1 [210] при следующих представленных в таблицах 2.7 и 2.8 нечетко-интервальных описаниях для обладающих разбросами исходных физико-механических и геометрических параметров модели.

Результаты расчетов для данных нечетко-интервальных представлений параметров с разбросами представлены на рисунках 2.91 – 2.93.

Согласно расчетам, при учитываемых уровнях разбросов множества исходных параметров модели, наиболее достоверные значения параметра P_{2n}^* критической нагрузки в случае изгибной формы потери устойчивости трехслойной полосы с одной полуволной по ее ширине лежат в диапазоне от 0.0543[МПа] до 0.674[МПа]; при этом достоверными хотя бы на минимальном уровне уверенности не могут быть значения $P_{2n}^* < 0.0497[МПа]$, $P_{2n}^* > 0.946[МПа]$.

Таблица 2.7.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры			
	\tilde{h} [м]	\tilde{l}_1 [м]	\tilde{l}_2 [м]	$\tilde{\delta}$ [м]
γ_1	0.0097	0.397	0.496	0.00095
γ_2	0.010	0.399	0.500	0.00098
γ_3	0.011	0.400	0.502	0.00100
γ_4	0.012	0.402	0.505	0.00120

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры			
	\tilde{E} [МПа]	$\tilde{\nu}$	\tilde{E}_q [МПа]	\tilde{G}_q [МПа]
γ_1	6950	0.29	95	18
γ_2	7000	0.30	100	20
γ_3	7200	0.31	105	21
γ_4	7300	0.315	108	24

Наиболее достоверные значения параметра P_{1m}^* критической нагрузки в случае изгибной формы потери устойчивости прямоугольной трехслойной пластины лежат в диапазоне от 0.188[МПа] до 0.23[МПа], а достоверными хотя бы на минимальном уровне уверенности не могут быть значения $P_{1m}^* < 0.171$ [МПа], $P_{1m}^* > 0.32$ [МПа]. Наконец, критические усилия, обуславливающие симметричную форму потери устойчивости в виде выпучивания несущих слоев трехслойной полосы P_2^{**} имеют наиболее достоверный диапазон изменения от 0.297[МПа] до 0.332[МПа], и не могут принимать значения $P_2^{**} > 0.452$ [МПа], $P_2^{**} < 0.264$ [МПа].

Применение методики, обеспечивающей учет эффектов неопределенности параметров рассматриваемых моделей, имеет прикладное значение и создает возможности для получения более адекватных практике результатов предпроектных конструкторских расчетов.

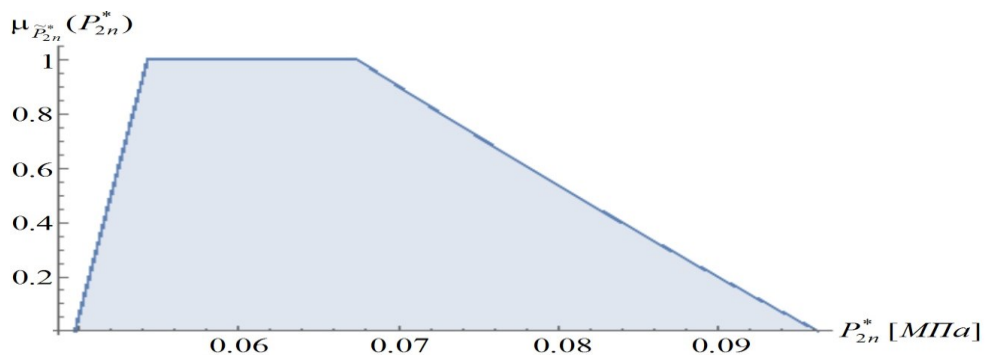


Рис. 2.91. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{P}_{2n}^* при $n = 1$.

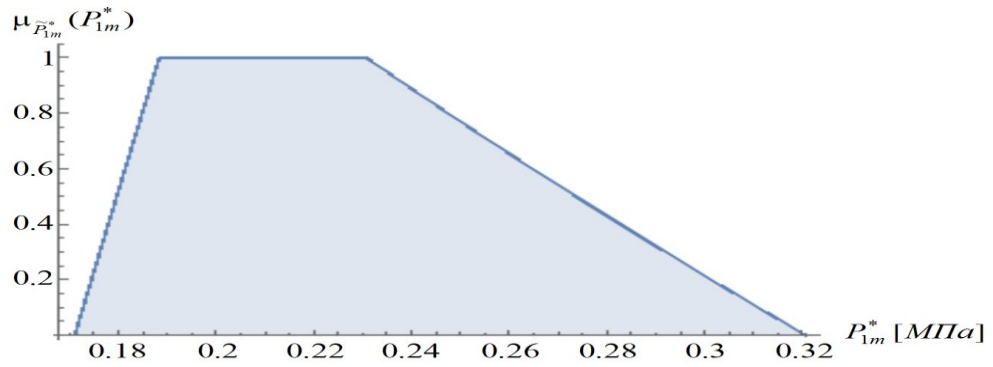


Рис. 2.92. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{P}_{1m}^* при $m=1$.

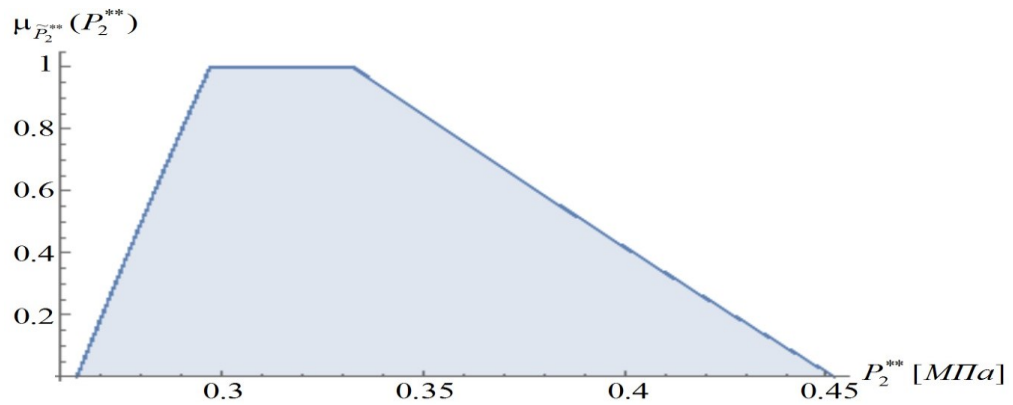


Рис. 2.93. Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{P}_2^{**} .

2.7. Оценки влияния разброса экзогенных параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек при равномерном осевом сжатии

Согласно результатам исследований, представленных в работе [256] и посвященных получению уточненных соотношений для критических значений параметра внешнего нагружения применительно к задаче о равномерном осевом сжатии тонкой идеально упругой изотропной круговой цилиндрической оболочки с радиусом R , длиной L и толщиной стенки h , изготовленной из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , критические усилия описываются следующими соотношениями.

В случае безмоментного докритического состояния и задания на краях оболочки граничных условий шарнирного опирания критическое сжимающее

осевое усилие q_{mn1}^* для формы потери устойчивости с числом волн в окружном направлении n и числом полуволн в продольном направлении m имеет величину

$$\begin{aligned} q_{mn1}^* &= Eh [(\lambda_m / (\lambda_m^2 + n^2))^4 (\lambda_m^2 + (2 + \nu)n^2) + (12(1 - \nu^2))^{-1} (h/R)^2 ((\lambda_m^2 + n^2)^2 / \lambda_m^2)] = \\ &= F_H(h, R, L, E, \nu, m, n), \lambda_m = m\pi RL^{-1}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

В случае безмоментного докритического состояния и задания на краях оболочки граничных условий жесткого закрепления соответствующее критическое сжимающее осевое усилие q_{mn2}^* имеет представление

$$\begin{aligned} q_{mn2}^* &= Eh [(2\lambda_m / (4\lambda_m^2 + n^2))^4 (4\lambda_m^2 + (2 + \nu)n^2) + \\ &+ (12(1 - \nu^2))^{-1} (h/R)^2 ((4\lambda_m^2 + 2\lambda_m^2 n^2 + (3/4)n^4) / \lambda_m^2)] = F_R(h, R, L, E, \nu, m, n). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Представления (2.91), (2.92) являются основой для решения задачи учета разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии в рамках концепции перехода к нечетко-множественному описанию неопределенных исходных параметров и расширения областей определения функциональных соотношений $q_{mn1}^* = F_H(h, R, L, E, \nu, m, n)$, $q_{mn2}^* = F_R(h, R, L, E, \nu, m, n)$, на нечетко-множественные аргументы с применением α – уровневой формы эвристического принципа обобщения. Вводится предположение о возможности эффективного описания разбросов экзогенных геометрических и физико-механических параметров модели h, R, L, E, ν на основе введения их представлений в виде нормальных нечетких трапецеидальных интервалов $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{L}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$ с кортежами реперных точек и разложениями по множествам α –уровня:

$$\begin{aligned} \tilde{h} &= (h_1, h_2, h_3, h_4), \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \underline{h}_\alpha = (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \\ \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3, R_4), \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \underline{R}_\alpha = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \\ \tilde{L} &= (L_1, L_2, L_3, L_4), \tilde{L} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha], \underline{L}_\alpha = (1 - \alpha)L_1 + \alpha L_2, \bar{L}_\alpha = \alpha L_3 + (1 - \alpha)L_4; \\ \tilde{E} &= (E_1, E_2, E_3, E_4), \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \underline{E}_\alpha = (1 - \alpha)E_1 + \alpha E_2, \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1 - \alpha)E_4; \end{aligned}$$

$$\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \tilde{v} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha], \quad \underline{v}_\alpha = (1-\alpha)v_1 + \alpha v_2, \quad \bar{v}_\alpha = \alpha v_3 + (1-\alpha)v_4.$$

Получаемые в результате применения разработанной методики на основе применения модифицированной версии эвристического принципа обобщения нечетко-множественные представления эндогенных параметров \tilde{q}_{mnj}^* критических усилий в рассматриваемой модели с учетом свойств

$$\partial F_H(h, R, L, E, v, m, n) / \partial h > 0, \quad \partial F_H(h, R, L, E, v, m, n) / \partial R < 0,$$

$$\partial F_H(h, R, L, E, v, m, n) / \partial E > 0, \quad \partial F_H(h, R, L, E, v, m, n) / \partial v > 0,$$

$$\partial F_R(h, R, L, E, v, m, n) / \partial h > 0, \quad \partial F_R(h, R, L, E, v, m, n) / \partial R < 0,$$

$$\partial F_R(h, R, L, E, v, m, n) / \partial E > 0, \quad \partial F_R(h, R, L, E, v, m, n) / \partial v > 0,$$

справедливых в областях определения соответствующих функций, имеют вид:

$$\tilde{q}_{mnj}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{mnj\alpha}^*, \bar{q}_{mnj\alpha}^*]; \quad (2.93)$$

$$q_{mn1\alpha}^* = \inf_{L \in [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \{F_H(\underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, L, \underline{E}_\alpha, \underline{v}_\alpha, m, n)\}, \quad \bar{q}_{mn1\alpha}^* = \sup_{L \in [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \{F_H(\bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, L, \bar{E}_\alpha, \bar{v}_\alpha, m, n)\};$$

$$q_{mn2\alpha}^* = \inf_{L \in [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \{F_R(\underline{h}_\alpha, \bar{R}_\alpha, L, \underline{E}_\alpha, \underline{v}_\alpha, m, n)\}, \quad \bar{q}_{mn2\alpha}^* = \sup_{L \in [\underline{L}_\alpha, \bar{L}_\alpha]} \{F_R(\bar{h}_\alpha, \underline{R}_\alpha, L, \bar{E}_\alpha, \bar{v}_\alpha, m, n)\}.$$

В модели следующего рассматриваемого типа описывается потеря устойчивости изотропной оболочки с безмоментным начальным состоянием, имеющей идеальную цилиндрическую форму, длину l , толщину h , изгибную жесткость D , изготовленную из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , нагруженную внешним гидростатическим давлением и приложенными к торцевым поверхностям равномерно распределенными сжимающими усилиями интенсивности q вдоль осевого направления [161]. Применительно к случаю осесимметричных форм потери устойчивости с числом полуволн m в продольном координатном направлении рассматриваемой оболочки с шарнирно-опертыми краями, для величины критического осевого усилия в [161] получено соотношение вида

$$q_{m1}^* = F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m) = E[h^3(m\pi/l)^2(12(1-\nu^2))^{-1} + hR^{-2}(m\pi/l)^{-2}], \quad (2.94)$$

а минимальное значение интенсивности критического усилия описывается выражением

$$q_1^* = G_1(E, \nu, R, h) = (Eh^2 R^{-1})(3(1-\nu^2))^{-1}. \quad (2.95)$$

Для неосесимметричных форм потери устойчивости с показателями количества полуволн m в продольном координатном направлении и n в окружном угловом направлении в [161] соответственно получены соотношения для критических усилий

$$q_{mn}^* = F_{mn}(E, \nu, R, h, l, m, n) = E[h^3((m\pi)^{-2}((m\pi/l)^2 + (n/R)^2))^2(12(1-\nu^2))^{-1} + hR^{-2}((m\pi)^{-2}((m\pi/l)^2 + (n/R)^2))^{-2}], \quad (2.96)$$

а минимальное критическое усилие также описывается соотношением (2.95).

В далее рассматриваемом случае, критическое значение внешнего гидростатического давления для цилиндрической оболочки с введенными выше характеристиками, получаемое в рамках модели больших перемещений [60], имеет представление вида

$$p_2^* = F_2(E, \nu, R, h, l, k) = (2/3)(E(1-\nu^2)^{-1})(h/R)^3(4k(\pi R/(2l))^2 + 2^{1/2} + 1), \quad (2.97)$$

в котором k – параметр граничных условий на краях оболочки, принимающий значение $k=0.25$ для случая шарнирно опертых краев и значение $k=0.5$ для случая жестко закрепленных краев.

Еще две анализируемые модели, относятся к случаям исследования устойчивости цилиндрических оболочек, помещенных в деформируемую среду либо содержащих внутреннее упругое наполнение. Данные модели интерпретируются как модели исследования устойчивости цилиндрических оболочек на упругом основании Винклера [164, 266]. В одной из них описываются процессы потери устойчивости протяженной цилиндрической оболочки длины k с внешним упругим основанием, характеризуемым коэффициентом постели α , и подверженной гидростатическому давлению в связи с размещением в упругом массиве из материала с параметром плотности ρ на некоторой глубине. Полученное в [164] представление для критического давления, обуславливающего потерю устойчивости с формой, характеризуемой

числом волн m в продольном осевом направлении оболочки и числом волн n в окружном угловом направлении, в этом случае имеет вид

$$Q_{3mn}^* = F_3(E, \nu, R, h, l, \alpha, m, n) = R^{-1} [Eh^3 (12(1-\nu^2))^{-1} R^{-2} ((m\pi R/l)^2 + n^2)^2 - 2n^2 + 1] + (2.98) \\ + Eh(m\pi R/l)^4 ((m\pi R/l)^2 + n^2)^{-2} + \alpha R^2 [n^2 (m\pi R/l)^2 ((m\pi R/l)^2 + n^2)^{-2} - n^2 + 1]^{-1},$$

а соотношение

$$H_{3mn}^* = \Phi_3(E, \nu, R, h, \alpha, \rho, \rho_0,) = (\rho g)^{-1} (h/R + \alpha R(1-\nu^2)/E) \cdot (Eh^2/(4(1-\nu^2)R^2) + (2.99) \\ + \alpha R^2/(3h) - \rho_0 g R/(1+h^2/(12R^2))) - R,$$

в котором ρ_0 – параметр плотности материала оболочки, определяет критическую глубину размещения, при которой происходит потеря устойчивости рассматриваемой оболочки. В характеризуемой модели также представлена оценка для параметра H_{np}^* глубины

$$H_{np}^* = \Phi_{3h}(E, R, h, T_{np}, \rho, \rho_0) = (\rho g)^{-1} (h/R + \alpha R(1-\nu^2)/E) (T_{np}/h - (\rho_0 g)R/(1+h^2/(12R^2))) - R,$$

на которой при достижении окружными напряжениями в оболочке предельного значения T_{np} , обуславливающего появление пластических деформаций, в случае $H_{np} < H_{3mn}^*$ пластическое деформирование оболочки предшествует бифуркации.

Наконец, в заключительной из анализируемых моделей рассматриваются эффекты потери устойчивости в форме осесимметричного выпучивания вертикально расположенных оболочек с направленным внутрь начальным искривлением и упругим заполнением, взаимодействие которого с оболочкой интерпретируется как контакт с упругим основанием Винклера [266]. Для параметра коэффициента постели используется выражение

$$\alpha = E_c ((1-\nu_c)(Rh)^{1/2})^{-1}, \quad (2.100)$$

в котором E_c, ν_c – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала заполнителя. Критическое осевое напряжение σ_4^* , обуславливающее потерю устойчивости в виде осесимметричного выпучивания с длиной полуволны l_n в осевом направлении рассматриваемой оболочки, согласно результатам работы [266] определяется соотношениями

$$\sigma_4^* = F_4(E, \nu, E_c, \nu_c, R, h) = Eh^2(\pi/l_n)^2(12(1-\nu^2))^{-1} + \quad (2.101)$$

$$(l_n/\pi)^2 ER^{-2} + (E_c/h)(l_n/\pi)^2(1-\nu_c)^{-1}(Rh)^{-1/2},$$

$$l_n = \pi(12(1-\nu^2)((Rh)^{-2} + (E_c/E)(1-\nu_c)^{-1}R^{-1/2}h^{-7/2}))^{-1/4}. \quad (2.102)$$

Дальнейшей задачей исследования является получение нечетко-множественных обобщений для соотношений, определяющих эндогенные параметры критических характеристик в детерминистических версиях рассматриваемых моделей. Для учета влияния разбросов в экспериментальных и технологических значениях экзогенных параметров рассматриваемых моделей используется прием описания неопределенных параметров нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами и вводятся их представления кортежами реперных значений и суперпозициями соответствующих множеств α – уровня:

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4; \quad (2.103)$$

$$\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \quad \underline{\nu}_\alpha = (1-\alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \quad \bar{\nu}_\alpha = \alpha \nu_3 + (1-\alpha)\nu_4;$$

$$\tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \quad \underline{R}_\alpha = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1-\alpha)R_4;$$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4;$$

$$\tilde{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha], \quad \underline{l}_\alpha = (1-\alpha)l_1 + \alpha l_2, \quad \bar{l}_\alpha = \alpha l_3 + (1-\alpha)l_4;$$

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha \rho_2, \quad \bar{\rho}_\alpha = \alpha \rho_3 + (1-\alpha)\rho_4;$$

$$\tilde{\rho}_0 = (\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0\alpha}, \bar{\rho}_{0\alpha}], \quad \underline{\rho}_{0\alpha} = (1-\alpha)\rho_{01} + \alpha \rho_{02}, \quad \bar{\rho}_{0\alpha} = \alpha \rho_{03} + (1-\alpha)\rho_{04};$$

$$\tilde{E}_c = (E_{c1}, E_{c2}, E_{c3}, E_{c4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{c\alpha}, \bar{E}_{c\alpha}], \quad \underline{E}_{c\alpha} = (1-\alpha)E_{c1} + \alpha E_{c2}, \quad \bar{E}_{c\alpha} = \alpha E_{c3} + (1-\alpha)E_{c4};$$

$$\tilde{\nu}_c = (\nu_{c1}, \nu_{c2}, \nu_{c3}, \nu_{c4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{c\alpha}, \bar{\nu}_{c\alpha}], \quad \underline{\nu}_{c\alpha} = (1-\alpha)\nu_{c1} + \alpha \nu_{c2}, \quad \bar{\nu}_{c\alpha} = \alpha \nu_{c3} + (1-\alpha)\nu_{c4}.$$

для рассматриваемых соотношений устанавливаются свойства:

$$\partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m) / \partial E > 0, \quad \partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m) / \partial h > 0, \quad \partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m) / \partial R < 0, \quad (2.104)$$

$$\partial F_{m1}(E, \nu, R, h, l, m) / \partial \nu > 0;$$

$$\begin{aligned}
& \partial G_1(E, \nu, R, h) / \partial E > 0, \quad \partial G_1(E, \nu, R, h) / \partial h > 0, \quad \partial G_1(E, \nu, R, h) / \partial R < 0, \quad \partial G_1(E, \nu, R, h) / \partial \nu > 0; \\
& \partial F_{mn1}(E, \nu, R, h, l, m, n) / \partial E > 0, \quad \partial F_{mn1}(E, \nu, R, h, l, m, n) / \partial h > 0, \quad \partial F_{mn1}(E, \nu, R, h, l, m, n) / \partial \nu > 0; \\
& \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k) / \partial E > 0, \quad \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k) / \partial h > 0, \quad \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k) / \partial \nu > 0, \\
& \quad \partial F_2(E, \nu, R, h, l, k) / \partial l < 0; \\
& \partial F_3(E, \nu, R, h, l, \alpha, m, n) / \partial E > 0, \quad \partial F_3(E, \nu, R, h, l, \alpha, m, n) / \partial h > 0, \\
& \partial F_3(E, \nu, R, h, l, \alpha, m, n) / \partial \nu > 0, \quad \partial F_3(E, \nu, R, h, l, \alpha, m, n) / \partial \alpha > 0; \\
& \partial \Phi_3(E, \nu, R, h, \alpha, \rho, \rho_0) / \partial \alpha > 0, \quad \partial \Phi_3(E, \nu, R, h, \alpha, \rho, \rho_0) / \partial \rho < 0, \\
& \quad \partial \Phi_3(E, \nu, R, h, \alpha, \rho, \rho_0) / \partial \rho_0 < 0; \\
& \partial \Phi_{3h}(E, \nu, R, h, T_{np}, \rho, \rho_0) / \partial T_{np} > 0, \quad \partial \Phi_{3h}(E, \nu, R, h, T_{np}, \rho, \rho_0) / \partial \rho < 0, \\
& \quad \partial \Phi_{3h}(E, \nu, R, h, T_{np}, \rho, \rho_0) / \partial \rho_0 < 0.
\end{aligned}$$

Учет полученных оценок позволяет записать следующие представления для нечетко-множественных эндогенных характеристик рассматриваемых моделей:

$$\tilde{q}_{m1}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{m1\alpha}^*, \bar{q}_{m1\alpha}^*], \quad (2.105)$$

$$\underline{q}_{m1\alpha}^* = \inf_{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha]} F_{m1}(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \underline{h}_\alpha, l, m), \quad \bar{q}_{m1\alpha}^* = \sup_{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha]} F_{m1}(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \bar{h}_\alpha, l, m);$$

$$\tilde{q}_{1\alpha}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{1\alpha}^*, \bar{q}_{1\alpha}^*], \quad \underline{q}_{1\alpha}^* = G_1(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, \bar{R}_\alpha, \underline{h}_\alpha), \quad \bar{q}_{1\alpha}^* = G_1(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, \underline{R}_\alpha, \bar{h}_\alpha); \quad (2.106)$$

$$\tilde{q}_{mn1}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{mn1\alpha}^*, \bar{q}_{mn1\alpha}^*], \quad (2.107)$$

$$\underline{q}_{mn1\alpha}^* = \inf_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} F_{mn1}(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, R, \underline{h}_\alpha, l, m, n), \quad \bar{q}_{mn1\alpha}^* = \sup_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} F_{mn1}(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, R, \bar{h}_\alpha, l, m, n);$$

$$\tilde{p}_{2\alpha}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{p}_{2\alpha}^*, \bar{p}_{2\alpha}^*], \quad (2.108)$$

$$\underline{p}_{2\alpha}^* = \inf_{R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]} F_2(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, R, \underline{h}_\alpha, \bar{l}_\alpha, k), \quad \bar{p}_{2\alpha}^* = \sup_{R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]} F_2(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, R, \bar{h}_\alpha, \underline{l}_\alpha, k);$$

$$\tilde{Q}_3^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{Q}_{3\alpha}^*, \bar{Q}_{3\alpha}^*], \quad (2.109)$$

$$\underline{Q}_{3\alpha}^* = \inf_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} F_3(\underline{E}_\alpha, \underline{\nu}_\alpha, R, \underline{h}_\alpha, l, \underline{\alpha}_\alpha, m, n), \quad \bar{Q}_{3\alpha}^* = \sup_{\substack{l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} F_3(\bar{E}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, R, \bar{h}_\alpha, l, \bar{\alpha}_\alpha, m, n);$$

$$\tilde{H}_{3mn}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [H_{3mn\alpha}^*, \bar{H}_{3mn\alpha}^*], \quad (2.110)$$

$$\underline{H}_{3mn\alpha}^* = \inf_{\substack{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_3(\underline{E}_\alpha, v, R, h, \underline{\alpha}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_{0\alpha}), \quad \bar{H}_{3mn\alpha}^* = \sup_{\substack{v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \Phi_3(\bar{E}_\alpha, v, R, h, \bar{\alpha}_\alpha, \underline{\rho}_\alpha, \underline{\rho}_{0\alpha});$$

$$\tilde{H}_{np} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{H}_\alpha, \bar{H}_\alpha], \quad (2.111)$$

$$\underline{H}_\alpha = \inf_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]}} \Phi_{3h}(E, v, R, h, \underline{T}_{np\alpha}, \rho, \bar{\rho}_{0\alpha}), \quad \bar{H}_\alpha = \sup_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]}} \Phi_{3h}(E, v, R, h, \bar{T}_{np\alpha}, \rho, \underline{\rho}_{0\alpha});$$

$$\tilde{\sigma}_4 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{4\alpha}, \bar{\sigma}_{4\alpha}], \quad (2.112)$$

$$\underline{\sigma}_{4\alpha} = \inf_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ E_c \in [\underline{E}_{c\alpha}, \bar{E}_{c\alpha}] \\ v_c \in [\underline{v}_{c\alpha}, \bar{v}_{c\alpha}] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} F_4(E, v, E_c, v_c, R, h), \quad \bar{\sigma}_{4\alpha} = \sup_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha] \\ E_c \in [\underline{E}_{c\alpha}, \bar{E}_{c\alpha}] \\ v_c \in [\underline{v}_{c\alpha}, \bar{v}_{c\alpha}] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} F_4(E, v, E_c, v_c, R, h).$$

Расчетные соотношения (2.105) – (2.112) описывают нечетко-множественные характеристики потери устойчивости рассматриваемых цилиндрических оболочечных конструкций в форме оценки меры достоверности (значения функций принадлежности к нечетким множествам возможных значений) того, что при наличии учитываемых разбросов для исходных параметров рассматриваемых моделей соответствующий эндогенный параметр может принимать то или иное значение из диапазона носителя нечеткого множества.

Описанная методика в процессе практического применения в предпроектном моделировании на этапе перехода к нечетко-множественным расширениям аргументов расчетных соотношений должна дополняться приемами фаззификации обладающих разбросами неопределенных исходных данных.

Примеры расчетной апробации описанного подхода реализуются применительно к цилиндрической оболочечной конструкции с нечетко-интервальными исходными параметрами, приведенными в таблицах 2.9 и 2.10.

Таблица 2.9.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры				
	\tilde{E} [ГПа]	$\tilde{\nu}$	\tilde{E}_c [ГПа]	$\tilde{\nu}_c$	\tilde{T}_{np} [ГПа]
γ_1	190	0.29	0.25	0.18	0.19
γ_2	198	0.30	0.32	0.20	0.21
γ_3	203	0.31	0.36	0.22	0.23
γ_4	210	0.315	0.43	0.25	0.26

Таблица 2.10.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры					
	$\tilde{\alpha}$ [МПа]	$\tilde{\rho}$ [10^3 кг/м ³]	$\tilde{\rho}_0$ [10^3 кг/м ³]	\tilde{R} [м]	\tilde{h} [м]	l [м]
γ_1	1.0	7.7	0.25	1.45	0.0028	9.95
γ_2	1.5	7.75	0.28	1.5	0.0030	10.00
γ_3	1.7	7.82	0.34	1.531	0.0031	10.02
γ_4	2.1	7.9	0.4	1.60	0.0035	10.07

Применительно к данному варианту задания параметров моделей результаты расчетов в виде профилей функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик, определяемых соотношениями (2.105) – (2.112), представлены на рисунках 2.94 – 2.102. Рассматриваемый вариант задания фаззифицированных в нечетко-интервальные представления исходных данных характеризуется максимальными разбросами в значениях по отношению к средней величине на носителе, имеющими порядок $\approx 5\%$ – для E ; $\approx 4\%$ – для ν ; $\approx 5\%$ – для R ; $\approx 12\%$ –

для h ; $\approx 1\%$ – для l ; $\approx 26\%$ – для E_c ; $\approx 16\%$ – для ν_c ; $\approx 16\%$ – для T_{np} ; $\approx 35\%$ – для α ; $\approx 1\%$ – для ρ ; $\approx 23\%$ – для ρ_0 .

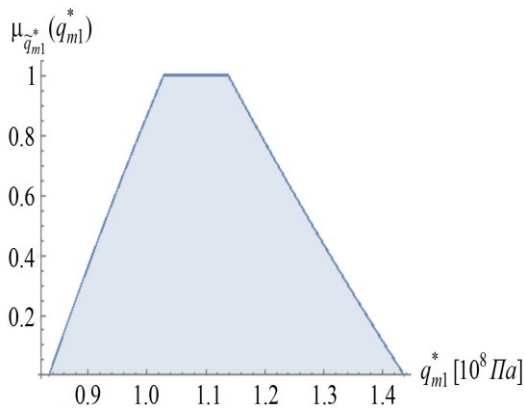


Рис. 2.94. Функция принадлежности \tilde{q}_{m1}^* при $m = 5$.

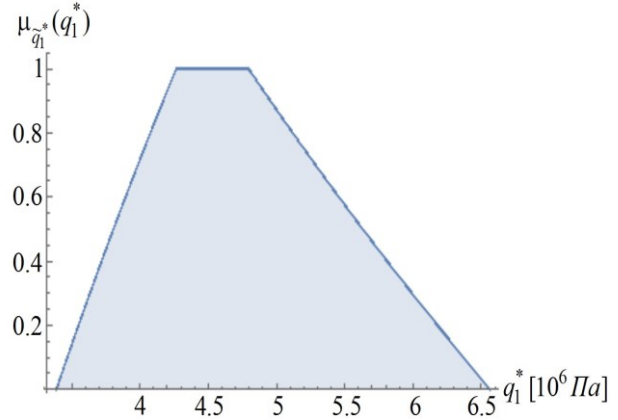


Рис. 2.95. Функция принадлежности \tilde{q}_1^* .

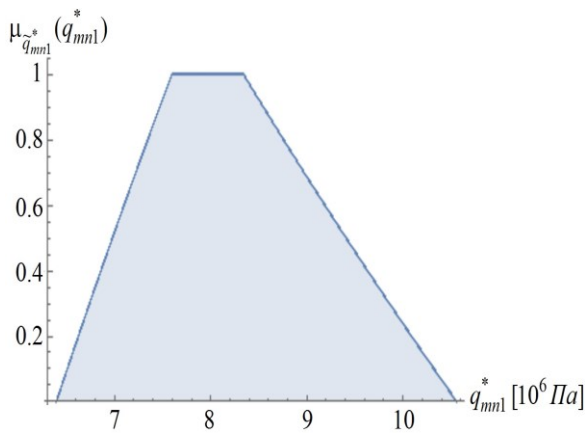


Рис. 2.96. Функция принадлежности \tilde{q}_{mnl}^* при $m = 5, n = 2$.

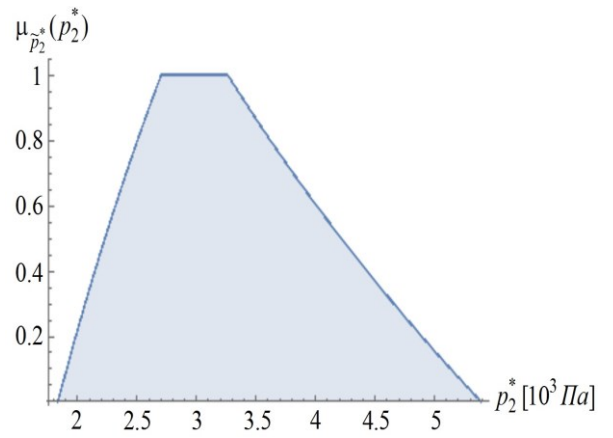


Рис. 2.97. Функция принадлежности \tilde{p}_2^* для оболочки с опертыми краями.

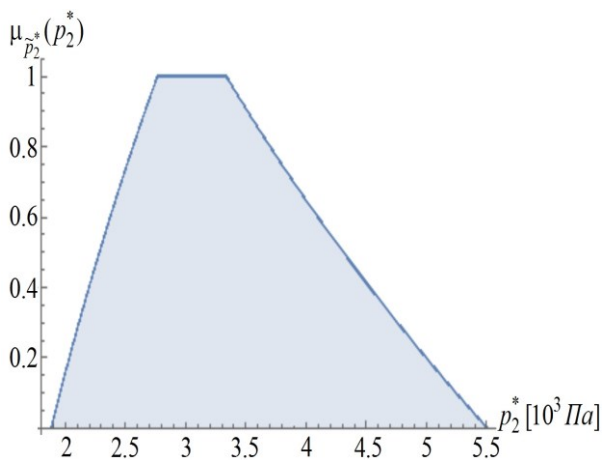


Рис. 2.98. Функция принадлежности \tilde{p}_2^* для оболочки с закрепленными краями.

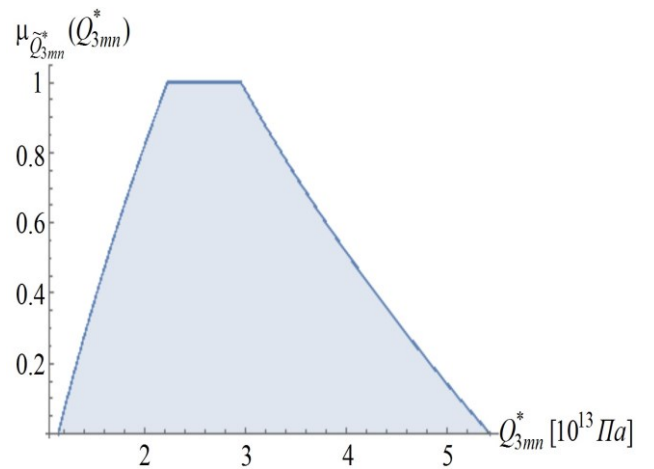


Рис. 2.99. Функция принадлежности \tilde{Q}_{3mn}^* при $m = 1, n = 2$.

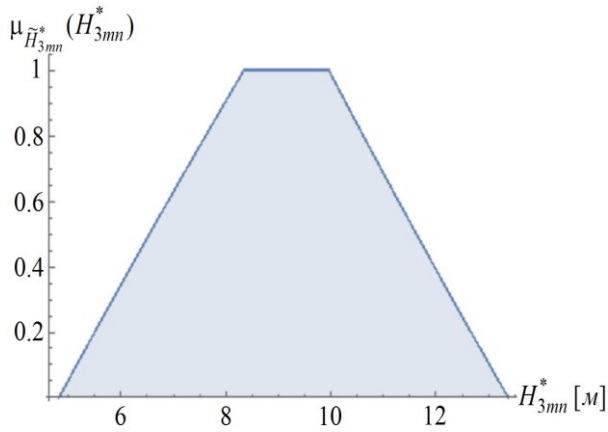


Рис. 2.100. Функция принадлежности

$$\tilde{H}_{3mn}^*$$

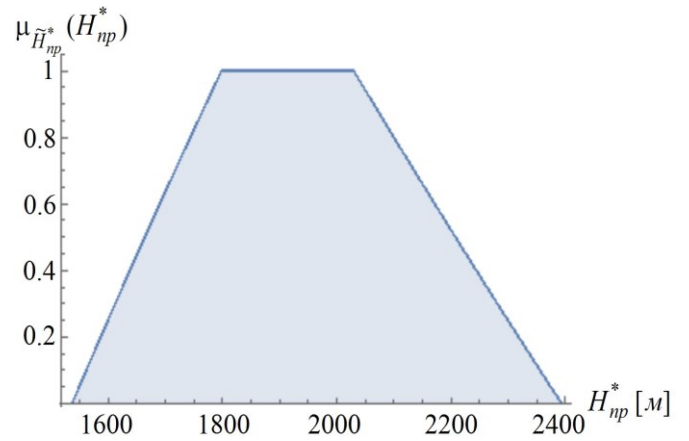
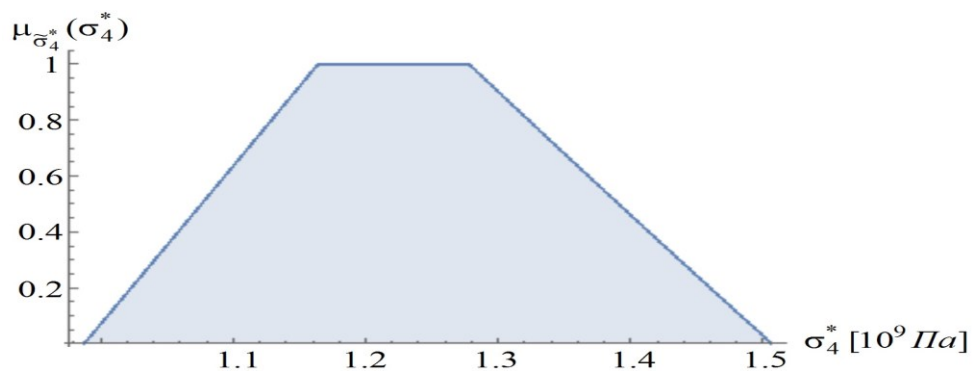


Рис. 2.101. Функция принадлежности

$$\tilde{H}_{np}^*$$

При этом, аналогичные разбросы в рассчитываемых значениях эндогенных характеристик соответственно имеют порядок: $\approx 25\%$ – для критического осевого усилия q_{m1}^* при $m=5$; $\approx 31\%$ – для минимального значения интенсивности критического усилия q_1^* ; $\approx 24\%$ – для критического осевого усилия q_{mn1}^* при $m=5$, $n=2$; $\approx 49\%$ – для критических усилий p_2^* при $k=0.25$ и $k=0.5$; $\approx 64\%$ – для критического усилия \tilde{Q}_{3mn}^* при $m=1$, $n=2$; $\approx 46\%$ – для параметра критической глубины H_{3mn}^* при $m=1$, $n=2$; $\approx 21\%$ – для параметра критической глубины возникновения пластических деформаций H_{np}^* ; $\approx 21\%$ – для параметра критического усилия σ_4^* .

Рис. 2.102. Функция принадлежности $\tilde{\sigma}_4^*$.

Рассчитываемые оценки разбросов характеризуют весь диапазон возможных значений определяемых параметров – от минимального, до максимального, уровни относительных показателей возможности возникновения которых стремятся к нулю.

В рамках разработки нечетко-множественного подхода к учету влияния разброса экзогенных параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек выполнен также сопоставительный анализ применения для анализа моделей (2.91), (2.92) с параметрами, описываемыми треугольными нечеткими числами, аппарата классической неидемпотентной арифметики и идемпотентной арифметики треугольных двухкомпонентных чисел. Исходя из представлений неконтрастных параметров h, R, E, ν в виде треугольных нечетких чисел $\tilde{h}, \tilde{R}, \tilde{E}, \tilde{\nu}$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3), \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \bar{h}_\alpha = \alpha h_2 + (1-\alpha)h_3; \quad (2.113)$$

$$\tilde{R} = (R_1, R_2, R_3), \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \underline{R}_\alpha = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \bar{R}_\alpha = \alpha R_2 + (1-\alpha)R_3;$$

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3), \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \bar{E}_\alpha = \alpha E_2 + (1-\alpha)E_3;$$

$$\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \underline{\nu}_\alpha = (1-\alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \bar{\nu}_\alpha = \alpha \nu_2 + (1-\alpha)\nu_3 .;$$

в случае, когда параметр длины оболочки L полагается точной величиной, задаваемой без ошибок возмущения, для представляемых треугольными нечеткими числами эндогенных параметров $\tilde{q}_{mn1}^* = (q_{1mn1}, q_{2mn1}, q_{3mn1})$, $\tilde{q}_{mn2}^* = (q_{1mn2}, q_{2mn2}, q_{3mn2})$ кортежи опорных значений могут быть найдены в результате стандартных арифметических нечетко-множественных вычислений в виде

$$q_{1mn1} = E_1 h_1 [(\lambda_{1m} / (\lambda_{3m}^2 + n^2))^4 (\lambda_{1m}^2 + (2 + \nu_1)n^2) + (12(1 - \nu_3^2))^{-1} (h_1 / R_3)^2 ((\lambda_{1m}^2 + n^2)^2 / \lambda_{3m}^2)],$$

$$q_{2mn1} = E_2 h_2 [(\lambda_{2m} / (\lambda_{2m}^2 + n^2))^4 (\lambda_{2m}^2 + (2 + \nu_2)n^2) + (12(1 - \nu_2^2))^{-1} (h_2 / R_2)^2 ((\lambda_{2m}^2 + n^2)^2 / \lambda_{2m}^2)],$$

$$\begin{aligned}
q_{3mn1} &= E_3 h_3 [(\lambda_{3m} / (\lambda_{1m}^2 + n^2))^4 (\lambda_{3m}^2 + (2 + \nu_3)n^2) + (12(1 - \nu_1^2))^{-1} (h_3 / R_1)^2 ((\lambda_{3m}^2 + n^2)^2 / \lambda_{1m}^2)]; \\
q_{1mn2} &= E_1 h_1 [(2\lambda_{1m} / (4\lambda_{3m}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{1m}^2 + (2 + \nu_1)n^2) + \\
&+ (12(1 - \nu_3^2))^{-1} (h_1 / R_3)^2 ((4\lambda_{1m}^2 + 2\lambda_{1m}^2 n^2 + (3/4)n^4) / \lambda_{3m}^2)]; \\
q_{2mn2} &= E_2 h_2 [(2\lambda_{2m} / (4\lambda_{2m}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{2m}^2 + (2 + \nu_2)n^2) + \\
&+ (12(1 - \nu_2^2))^{-1} (h_2 / R_2)^2 ((4\lambda_{2m}^2 + 2\lambda_{2m}^2 n^2 + (3/4)n^4) / \lambda_{2m}^2)]; \\
q_{3mn2} &= E_3 h_3 [(2\lambda_{3m} / (4\lambda_{1m}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{3m}^2 + (2 + \nu_3)n^2) + \\
&+ (12(1 - \nu_1^2))^{-1} (h_3 / R_1)^2 ((4\lambda_{3m}^2 + 2\lambda_{3m}^2 n^2 + (3/4)n^4) / \lambda_{1m}^2)]; \quad \lambda_{jm} = m\pi R_j L^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

В случае же использования в вычислениях \tilde{q}_{mn1}^* , \tilde{q}_{mn2}^* правил идемпотентной арифметики, основывающейся на алгебре двухкомпонентных чисел [272, 273], неконтрастные экзогенные параметры модели \tilde{h} , \tilde{R} , \tilde{E} , $\tilde{\nu}$ интерпретируются как двухкомпонентные векторы из параметрических зависимостей

$$\tilde{h} = \{(h_1 + (h_2 - h_1)\alpha), (h_3 + (h_3 - h_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \quad \tilde{R} = \{(R_1 + (R_2 - R_1)\alpha), (R_3 + (R_3 - R_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \tag{2.115}$$

$$\tilde{E} = \{(E_1 + (E_2 - E_1)\alpha), (E_3 + (E_3 - E_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \quad \tilde{\nu} = \{(\nu_1 + (\nu_2 - \nu_1)\alpha), (\nu_3 + (\nu_3 - \nu_2)\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1].$$

В свою очередь, идемпотентные арифметические операции для пар треугольных нечетких чисел $\tilde{\Phi}_J = (\Phi_{J1}, \Phi_{J2}, \Phi_{J3})$, $\tilde{\Phi}_Q = (\Phi_{Q1}, \Phi_{Q2}, \Phi_{Q3})$ интерпретируемых двухкомпонентными векторами параметрических зависимостей

$$\tilde{\Phi}_J = \{(\Phi_{J1} + (\Phi_{J2} - \Phi_{J1})\alpha), (\Phi_{J3} + (\Phi_{J2} - \Phi_{J3})\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \tag{2.116}$$

$$\tilde{\Phi}_Q = \{(\Phi_{Q1} + (\Phi_{Q2} - \Phi_{Q1})\alpha), (\Phi_{Q3} + (\Phi_{Q2} - \Phi_{Q3})\alpha)\} \quad \alpha \in [0, 1], \tag{2.117}$$

выполняются по правилу

$$\tilde{\Phi}_J * \tilde{\Phi}_Q = (\Phi_{J1} * \Phi_{Q1}, \Phi_{J2} * \Phi_{Q2}, \Phi_{J3} * \Phi_{Q3}), \tag{2.119}$$

где символ $*$ соответствует произвольной операции стандартной арифметики действительных чисел. Этот результат, в свою очередь, имеет интерпретацию в виде двухкомпонентного вектора

$$\tilde{\Phi}_J * \tilde{\Phi}_Q = \{((\Phi_{J1} * \Phi_{Q1}) + ((\Phi_{J2} * \Phi_{Q2}) - (\Phi_{J1} * \Phi_{Q1}))\alpha), ((\Phi_{J3} * \Phi_{Q3}) - ((\Phi_{J2} * \Phi_{Q2}) - (\Phi_{J3} * \Phi_{Q3}))\alpha)\}. \tag{2.120}$$

Таким образом, результатом анализа рассматриваемой модели в варианте применения аппарата идемпотентной арифметики треугольных нечетких чисел являются представления вида

$$\tilde{q}_{mn1}^* = \{q_{1mn1} + (q_{2mn1} - q_{1mn1})\alpha, q_{3mn1} + (q_{2mn1} - q_{3mn1})\alpha\}, \quad (2.121)$$

$$\tilde{q}_{mn2}^* = \{q_{1mn2} + (q_{2mn2} - q_{1mn2})\alpha, q_{3mn2} + (q_{2mn2} - q_{3mn2})\alpha\} \quad \alpha \in [0, 1], \quad (2.122)$$

в которых

$$q_{jmn1} = E_j h_j [(\lambda_{jm} / (\lambda_{jm}^2 + n^2))^4 (\lambda_{jm}^2 + (2 + \nu_1)n^2) + (12(1 - \nu_j^2))^{-1} (h_j / R_j)^2 ((\lambda_{jm}^2 + n^2)^2 / \lambda_{jm}^2)],$$

$$q_{jmn2} = E_j h_j [(2\lambda_{jm} / (4\lambda_{jm}^2 + n^2))^4 (4\lambda_{jm}^2 + (2 + \nu_j)n^2) + (12(1 - \nu_j^2))^{-1} (h_j / R_j)^2 ((4\lambda_{jm}^2 + 2\lambda_{jm}^2 n^2 + (3/4)n^4) / \lambda_{jm}^2)]; \quad \lambda_{jm} = m\pi R_j L^{-1} \quad (j = \overline{1, 3}).$$

С применением разработанного для численной реализации вышеописанных методик программного приложения выполнен ряд вычислительных экспериментов, в которых рассматривается тонкая изотропная цилиндрическая оболочка с неконтрастными параметрами, интерпретируемыми как нечеткие треугольные числа. Параметры для расчетных моделей (2.91), (2.92) задаются в виде

$$\tilde{E} = (190c_*, 198c_*, 208c_*), \quad \tilde{\nu} = (0.3, 0.31, 0.315), \quad \tilde{R} = (1.45l_*, 1.50l_*, 1.53l_*)$$

$$\tilde{h} = (0.0028l_*, 0.003l_*, 0.0031l_*), \quad l = 10.0l_*, \quad c_* = 1 [\text{ГПа}], \quad l_* = 1 [M].$$

Априорным свойством представляемых результатов является совпадение модальных значений для треугольных нечетких чисел, описывающих эндогенные параметры критических усилий и получаемых при использовании стандартного аппарата арифметики нечетких треугольных чисел и версии идемпотентных арифметических операций.

Результаты вычислительных экспериментов для моделей с расчетными соотношениями (2.114), (2.121) в случае варьирования целочисленных параметров формы потери устойчивости приведены в таблице 2.11. На основе их анализа можно сделать заключение о том, для ряда сочетаний параметров формы (в частности, для $n=0, m=1,4$; $n=1, m=2, m=3$; и т.д.) оценки разбросов значений критических усилий в пределах точности вычислений не отличаются при

использовании обоих альтернативных вариантов аппарата нечетко-множественных вычислений. В доминирующем числе случаев интервалы разбросов, получаемые в случае применения версии идемпотентных арифметических операций, являются более узкими в сравнении с интервалами, определяемыми с применением стандартной арифметики треугольных нечетких чисел.

Как следует из таблицы, низшее значение критического усилия в рассматриваемых случаях отвечает форме потери устойчивости $n=3$, $m=1$, этом случае применение алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел влечет уменьшение ширины интервала прогнозируемых разбросов на 27%. Профили функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик критических усилий \tilde{q}_{131}^* применительно к этому случаю, рассчитываемые с применением стандартных и идемпотентных нечетко-множественных арифметических операций соответственно приведены на рисунках 2.103, 2.104.

Таблица 2.11.

Характеристики нечетких эндогенных параметров для модели (2.91).

Параметры формы		Модальное значение, $10^{-5} Па$	Разбросы значений критического усилия, $10^{-5} Па$			
			Стандартные операции		Идемпотентные операции	
m	n	q_{2mn1}	q_{1mn1}	q_{3mn1}	q_{1mn1}	q_{3mn1}
1	0	26748.8	25637.5	27872.4	25637.5	27872.4
2	0	6687.20	6409.38	6968.0	6409.38	6968.00
3	0	2972.09	2848.62	3096.94	2972.09	2848.62
4	0	1671.81	1602.35	1742.04	1602.35	1742.04
1	1	332.557	270.159	382.253	270.20	382.251
2	1	1179.06	1022.87	1301.95	1022.87	1301.95
3	1	1264.46	1143.65	1362.11	1143.65	1362.11
4	1	1023.08	946.204	1087.90	946.205	1087.90
1	2	8.89825	7.01536	10.4284	7.03133	10.4067

2	2	83.1946	67.5926	95.6302	67.5979	95.6228
3	2	205.984	173.285	231.735	173.288	231.730
4	2	294.799	255.741	325.529	255.744	325.525
1	3	1.68987	1.33211	2.00542	1.40857	1.90196
2	3	10.8682	8.64108	12.6704	8.66287	12.6405
3	3	37.0818	30.1239	42.6314	30.1357	42.6148
4	3	73.6108	61.2161	83.4036	61.2246	83.3914
1	4	27.5310	21.8563	32.9039	24.2253	29.7052
2	4	28.8396	22.7516	33.9843	23.3902	33.1148
3	4	91.6321	73.1823	106.573	73.5022	106.132
4	4	21.0196	17.0699	24.1756	17.0909	24.1461

Для описываемого соотношением (2.92) случая оболочки с закрепленными краями низшее значение критического усилия в рассматриваемых случаях отвечает форме потери устойчивости $n=4$, $m=1$, и применение в этом случае алгебры двухкомпонентных чисел приводит к уменьшению ширины интервала прогнозируемых разбросов на 26%. Модальное значение \tilde{q}_{142}^* в данном случае составляет $4.146 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Для этой формы потери устойчивости на рисунке 2.105 и рисунке 2.106 представлены профили функций принадлежности для \tilde{q}_{142}^* , рассчитанные в рамках применения стандартных и идемпотентных нечетко-множественных арифметических операций.

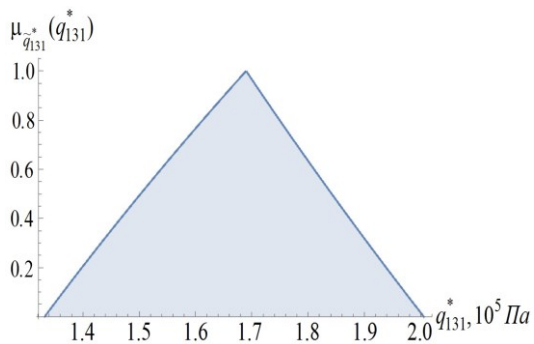


Рис. 2.103. Функция принадлежности для \tilde{q}_{131}^* , (стандартная арифметика треугольных нечетких чисел)

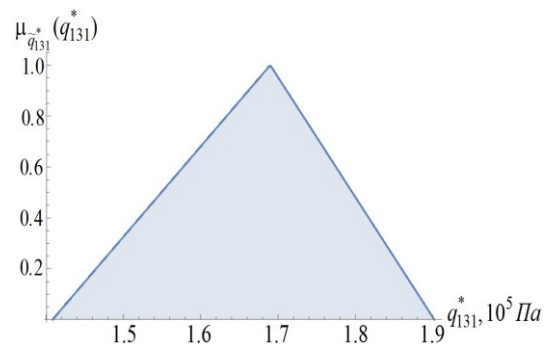


Рис. 2.104. Функция принадлежности для \tilde{q}_{131}^* , (идемпотентная арифметика треугольных нечетких чисел)

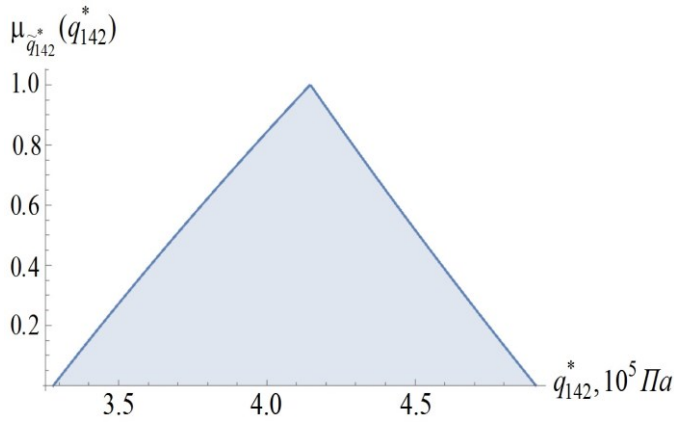


Рис. 2.105. Функция принадлежности для \tilde{q}_{142}^* , (стандартная арифметика треугольных нечетких чисел)

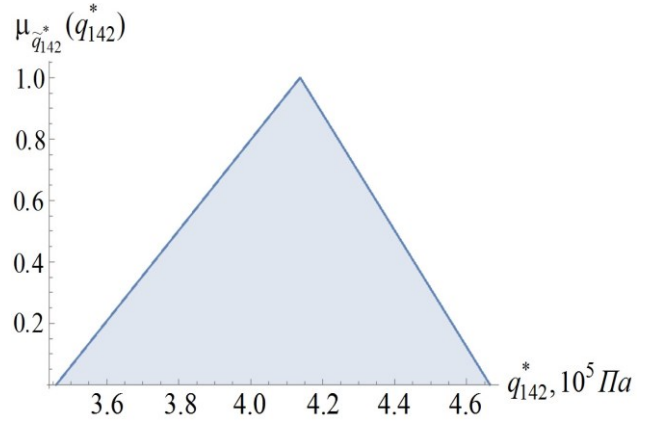


Рис. 2.106. Функция принадлежности для \tilde{q}_{142}^* , (идемпотентная арифметика треугольных нечетких чисел)

2.8. Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний замкнутых сферических, эллипсоидальных и тороидальных оболочек

Исследования по разработке нечетко-множественных алгоритмов учета факторов неопределенности в моделях упругих колебаний и устойчивости нагруженных тонкостенных конструкций реализованы также применительно к тонким изотропным идеально упругим оболочкам замкнутой сферической, эллипсоидальной и тороидальной формы.

Первой из рассматриваемых является модель устойчивости равномерно сжимаемой сферической изотропной оболочки радиуса R и толщины h , изготовленной из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν . Согласно [68, 96], критическое значение интенсивности распределенного обуславливающего потерю устойчивости внешнего нормального давления P_* на оболочку в рассматриваемом случае задается соотношением

$$P_* = F_1(E, \nu, h, R) = 2Eh^2 / (R^2(3(1-\nu^2))^{1/2}). \quad (2.123)$$

Вторым рассматриваемым случаем является модель подверженной равномерному внешнему давлению эллипсоидальной оболочки [7, 68, 96, 297] с полуосями a и b , характеризуемой как вытянутая ($a < \sqrt{2}b$) либо сплюснутая ($a > b$). Согласно [68], для вытянутой эллипсоидальной оболочки

$$P_2 = F_2(E, \nu, h, a, b) = 2Eh^2 / ((2b^2 - a^2)(3(1 - \nu^2))^{1/2}), \quad (2.124)$$

а для сплюсщенной эллипсоидальной оболочки

$$P_3 = F_3(E, \nu, h, a, b) = 2Eh^2 b^2 / (a^4 (3(1 - \nu^2))^{1/2}). \quad (2.125)$$

Еще одной анализируемой моделью является модель устойчивости трансверсально-изотропной замкнутой сферической оболочки при действии нормального равномерно распределенного быстро приложенного внешнего давления, деформирование которой рассматривается в рамках учитывающей эффекты поперечного сдвига уточненной теории. Согласно данной модели базовым является описывающее колебания рассматриваемой оболочки толщины h уравнение относительно функции динамических нормальных перемещений $w(\beta, \delta, t)$

$$[c_2(\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta](\Delta + 2)w = ((R^2 / Eh)(1 - h^* \Delta)(\Delta + 1 - \nu)\rho h \cdot \partial^2 w / \partial t^2) \quad (2.126)$$

в котором β, δ – соответственно угловые параметры долготы и широты связываемых с оболочкой географических координат; Δ – оператор Лапласа

$$\Delta = (\sin \beta)^{-1} [\cos \beta \cdot \partial / \partial \beta + \sin \beta \cdot \partial^2 / \partial \beta^2 + (\sin \beta)^{-1} \partial^2 / \partial \delta^2]; \quad (2.127)$$

$$c^2 = h^2 (12(1 - \nu)R^2)^{-1}; \quad h^* = Eh^2 (10(1 - \nu^2)R^2 G^*)^{-1};$$

E – модуль Юнга материала оболочки в тангенциальных направлениях; ν – коэффициент Пуассона; G^* – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к поверхности оболочки; ρ – плотность материала оболочки.

В рамках данной модели представления для собственных частот колебаний имеют вид

$$\omega_n = \Phi(E, G^*, \nu, \rho, R, h) = [E(\lambda_n - 2)(c^2(\lambda_n - 1)^2 + 1 + h^* \lambda_n) / (\rho R^2 (1 + h^* \lambda_n)(\lambda_n - 1 + \nu))]^{1/2}, \quad (2.128)$$

$$\lambda_n = n(n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для оценки влияния разбросов значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров на величины характеристик, определяемых выражениями (2.123) – (2.125), (2.128), в указанных функциональных соотношениях реализуется переход к нечетко-множественным аргументам с применением α – уровневой формы эвристического принципа расширения. Исходным этапом процедуры расширения области определения аргументов

$E, G, v, \rho, R, a, b, h$ указанных функциональных соотношений на нечетко-множественные величины $\tilde{E}, \tilde{G}, \tilde{v}, \tilde{\rho}, \tilde{R}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{h}$ является введение гипотезы описания неопределенных исходных параметров трапецеидальными нормальными нечеткими интервалами с заданием соответствующих кортежей реперных точек и разложений по множествам α – срезам

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4; \quad (2.129)$$

$$\tilde{G} = (G_1, G_2, G_3, G_4), \quad \tilde{G} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_\alpha, \bar{G}_\alpha], \quad \underline{G}_\alpha = (1-\alpha)G_1 + \alpha G_2, \quad \bar{G}_\alpha = \alpha G_3 + (1-\alpha)G_4;$$

$$\tilde{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad \tilde{v} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha], \quad \underline{v}_\alpha = (1-\alpha)v_1 + \alpha v_2, \quad \bar{v}_\alpha = \alpha v_3 + (1-\alpha)v_4;$$

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \bar{\rho}_\alpha = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4;$$

$$\tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4), \quad \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \quad \underline{R}_\alpha = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1-\alpha)R_4;$$

$$\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad \tilde{a} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], \quad \underline{a}_\alpha = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, \quad \bar{a}_\alpha = \alpha a_3 + (1-\alpha)a_4;$$

$$\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4), \quad \tilde{b} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \quad \underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \bar{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4;$$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4.$$

Получаемые с учетом справедливых в областях определения функций $F_1(E, v, h, R)$, $F_2(E, v, h, a, b)$, $F_3(E, v, h, a, b)$, $\Phi(E, G, v, \rho, R, h)$ оценок

$$\partial F_1(E, v, h, R) / \partial E > 0, \quad \partial F_1(E, v, h, R) / \partial v > 0, \quad \partial F_1(E, v, h, R) / \partial h > 0, \quad \partial F_1(E, v, h, R) / \partial R < 0;$$

$$\partial F_2(E, v, h, R) / \partial E > 0, \quad \partial F_2(E, v, h, R) / \partial v > 0, \quad \partial F_2(E, v, h, R) / \partial h > 0, \quad \partial F_2(E, v, h, R) / \partial a > 0,$$

$$\partial F_2(E, v, h, R) / \partial b < 0; \quad \partial F_3(E, v, h, R) / \partial E > 0, \quad \partial F_3(E, v, h, R) / \partial v > 0, \quad \partial F_3(E, v, h, R) / \partial h > 0,$$

$$\partial F_3(E, v, h, R) / \partial a < 0, \quad \partial F_3(E, v, h, R) / \partial b > 0; \quad \partial \Phi(E, G^*, v, \rho, R, h) / \partial \rho < 0;$$

представления нечетко-множественных эндогенных параметров рассматриваемых исследуемых расчетных моделей соответственно записываются в виде:

$$\tilde{P}_{*j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [P_{*j\alpha}, \bar{P}_{*j\alpha}] \quad (j = \overline{1,3}), \quad \tilde{\omega}_n = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\omega_{n\alpha}, \bar{\omega}_{n\alpha}], \quad (2.130)$$

где

$$\underline{P}_{*1\alpha} = 2\underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 / (\bar{R}_\alpha^2 (3(1-\underline{v}_\alpha^2))^{1/2}), \quad \bar{P}_{*1\alpha} = 2\bar{E}_\alpha \bar{h}_\alpha^2 / (\underline{R}_\alpha^2 (3(1-\bar{v}_\alpha^2))^{1/2}); \quad (2.131)$$

$$\underline{P}_{*2\alpha} = 2\underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 / ((2\underline{b}_\alpha^2 - \underline{a}_\alpha^2)(3(1 - \underline{v}_\alpha^2))^{1/2}), \quad \overline{P}_{*2\alpha} = 2\overline{E}_\alpha \overline{h}_\alpha^2 / ((2\overline{b}_\alpha^2 - \overline{a}_\alpha^2)(3(1 - \overline{v}_\alpha^2))^{1/2});$$

$$\underline{P}_{*3\alpha} = 2\underline{E}_\alpha \underline{h}_\alpha^2 \underline{b}_\alpha^2 / (\underline{a}_\alpha^4 (3(1 - \underline{v}_\alpha^2))^{1/2}), \quad \overline{P}_{*3\alpha} = 2\overline{E}_\alpha \overline{h}_\alpha^2 \overline{b}_\alpha^2 / (\overline{a}_\alpha^4 (3(1 - \overline{v}_\alpha^2))^{1/2});$$

$$\underline{\omega}_{n\alpha} = \inf_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \overline{G}_\alpha] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \{ [E(\lambda_n - 2)(c^2(\lambda_n - 1)^2 + 1 + h^* \lambda_n) / (\underline{\rho}_\alpha R^2 (1 + h^* \lambda_n)(\lambda_n - 1 + v))]^{1/2} \},$$

$$\overline{\omega}_{n\alpha} = \sup_{\substack{E \in [\underline{E}_\alpha, \overline{E}_\alpha] \\ G \in [\underline{G}_\alpha, \overline{G}_\alpha] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \overline{v}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha]}} \{ [E(\lambda_n - 2)(c^2(\lambda_n - 1)^2 + 1 + h^* \lambda_n) / (\underline{\rho}_\alpha R^2 (1 + h^* \lambda_n)(\lambda_n - 1 + v))]^{1/2} \}.$$

Соотношения (2.130), (2.131) являются базовыми для получения численных нечетко-множественных оценок факторов неопределенности в рассматриваемых моделях. Разработанная методика в качестве примера реализована в задачах оценки показателей интенсивности критических внешних усилий и величин собственных частот для сферических и эллипсоидальных оболочек с нечетко-интервальными физико-механическими и геометрическими исходными параметрами. Для модели равномерно сжимаемой извне сферической оболочки из стали рассмотрен вариант задания неконтрастных экзогенных параметров

$$\tilde{E} = (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \quad E_* = 10^{10}[\text{Па}], \quad \tilde{v} = (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \quad (2.132)$$

$$\tilde{R} = (2.95 R_*, 2.99 R_*, 3.02 R_*, 3.06 R_*), \quad \tilde{h} = (0.0038 R_*, 0.004 R_*, 0.0042 R_*, 0.0044 R_*), \quad R_* = 1[\text{м}].$$

Получаемая в данном случае нечетко-множественная оценка для величины критического внешнего равномерно распределенного давления \tilde{P}_* характеризуется функцией принадлежности, представляемой на рисунке 2.107. Вид функций принадлежности позволяет сделать выводы о степени уверенности в возможности достижения соответствующих значений эндогенным параметром интенсивности критического давления при рассматриваемых неконтрастных параметрах расчетной модели. Можно также указать, что максимальные разбросы для задаваемых в виде (2.130) исходных параметров $\tilde{E}, \tilde{v}, \tilde{R}$ относительно медианных значений на носителях составляют не более 1.8%, а для исходного параметра \tilde{h} этот разброс составляет 7.3%. При этом оцениваемый максимальный

(предельно возможный) разброс для рассчитанного эндогенного параметра \tilde{P}_1 относительно медианного значения на носителе составляет в данном случае порядка 19.3%, а на модальном интервале (в диапазоне наиболее достоверных значений) относительно его медианного значения – порядка 6.2%.

Для модели равномерно сжимаемой извне вытянутой эллипсоидальной стальной оболочки вариант задания неконтрастных экзогенных параметров имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \quad \tilde{\nu} = (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \\ \tilde{a} &= (2.95 R_*, 2.99 R_*, 3.02 R_*, 3.06 R_*), \quad \tilde{b} = (39.5 R_*, 39.9 R_*, 40.2 R_*, 40.3 R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038 R_*, 0.004 R_*, 0.0042 R_*, 0.0044 R_*), \quad E_* = 10^{10}[\text{Па}], \quad R_* = 1[\text{м}]. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Нечетко-множественная оценка интенсивности критического равномерного давления в данном случае характеризуется функцией принадлежности, представляемой на рисунке 2.108. При этом максимальные разбросы для задаваемых исходных параметров относительно медианных значений на носителях составляют не более 7.3%, а максимальный разброс для эндогенного параметра \tilde{P}_2 относительно медианного значения на носителе составляет порядка 16.8%, на модальном интервале – порядка 5.9%.

Для модели равномерно сжимаемой сплюсненной эллипсоидальной стальной оболочки вариант задания неконтрастных экзогенных параметров описывается в таблице 2.12, а нечетко-множественная оценка интенсивности критического давления, характеризуется функцией принадлежности, представляемой на рисунке 2.109.

Таблица 2.12.

Описания нечетко-интервальных экзогенных параметров

Нормированные компоненты γ_p кортежа $\tilde{\gamma}$	Нечетко-интервальные экзогенные параметры				
	\tilde{E} [ГПа]	$\tilde{\nu}$	\tilde{a} [м]	\tilde{b} [м]	\tilde{h} [м]
γ_1	197	0.276	6.95	2.95	0.0038

γ_2	199	0.279	6.99	2.99	0.0040
γ_3	200	0.282	7.02	3.02	0.0042
γ_4	202	0.285	7.06	3.06	0.0044

В данном случае, максимальные разбросы исходных параметров относительно медианных значений на носителях также составляют не более 7.3%, максимальный разброс для эндогенного параметра \tilde{P}_3 относительно медианного значения на носителе – порядка 28.6%, на модальном интервале – порядка 7.9%.

Наконец, нечетко-множественная оценка $\tilde{\omega}_2$ для характеристики собственной частоты колебаний сферической трансверсально-изотропной оболочки в случае задания неконтрастных исходных параметров вида

$$\tilde{E} = (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \quad \tilde{G}^* = (7.7E_*, 7.8E_*, 7.9E_*, 8.1E_*), \quad (2.134)$$

$$\tilde{\nu} = (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \quad \tilde{\rho} = (7.79\rho_*, 7.82\rho_*, 7.83\rho_*, 7.86\rho_*), \quad \tilde{R} = (2.95R_*, 2.99R_*, 3.02R_*, 3.06R_*),$$

$$\tilde{h} = (0.0038 R_*, 0.004 R_*, 0.0042 R_*, 0.0044 R_*), \quad E_* = 10^{10}[\text{Па}], \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3], \quad R_* = 1[\text{м}],$$

характеризуется функцией принадлежности, приведенной на рисунке 2.110. Максимальные разбросы исходных параметров относительно медианных значений на носителях в этом варианте расчетов составляют для исходного параметра \tilde{h} – 7.3%, для остальных экзогенных параметров – не более 1.8%; максимальный разброс для эндогенного параметра $\tilde{\omega}_2$ относительно медианного значения на носителе – порядка 2.4%, на модальном интервале – порядка 0.6%.

Алгоритм получения нечетко-множественных оценок для показателей критических нагрузок разработан и применительно к задачам устойчивости тонкостенных конструкций в виде тонких замкнутых изотропных оболочек тороидальной формы, подверженных действия равномерно распределенных по граничной поверхности сжимающих внешних усилий. В данном исследуемом случае используются полученные в [68] результаты решения в классической постановке задачи определения критических значений внешних равномерно распределенных по внешней поверхности нормальных усилий, обуславливающих потерю устойчивости при безмоментном деформировании тонкой замкнутой в

обоих направлениях изотропной тороидальной оболочки. Оболочка характеризуется геометрическими параметрами толщины стенки h , радиуса круговых сечений R_s трубчатой части и расстояния R_l от оси симметрии оболочки до центров поперечных сечений, а также физико-механическими параметрами модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν материала оболочки. Для оболочки с описанными характеристиками, согласно [68], значения критических усилий q_n^* описываются соотношениями

$$q_n^* = \Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu) = EhR_s^{-1}(1-\nu^2)^{-1}(\delta_n(k) + (h^2/(12R_s^2))\lambda_n(k)) \quad (n=1, 2, \dots), \quad (2.135)$$

$$\delta_n(k) = (1+k^2/4)^{-1}((k^2/2)(n^2 + ((1-\nu^2)/2)n^2k^2 + (1+\nu)^2k^2 + \nu + 1)/(n^2(n^2(1+k^2/2) + (1+\nu)k^2/2))),$$

$$\lambda_n(k) = (1+k^2/4)^{-1}((n^2 - 1 + n^2k^2/2)(n^2(1+k^2/2) + k^2)/(n^2(1+k^2/2) + (1+\nu)k^2/2 + k^2/2), \quad k = R_s/R_l.$$

При этом для функций $\Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)$ во всей области их определения выполняются свойства

$$\partial\Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)/\partial E > 0, \quad \Phi_n(h, R_s, R_l, E, \nu)/\partial h > 0, \quad (2.136)$$

учитываемые ниже при реализации процедуры перехода в функциональных отображениях (2.135) к нечетко-интервальным аргументам.

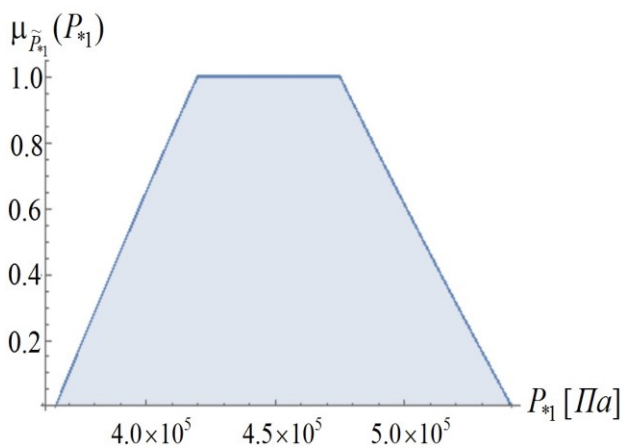


Рис. 2.107. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_1}(P_{*1})$.

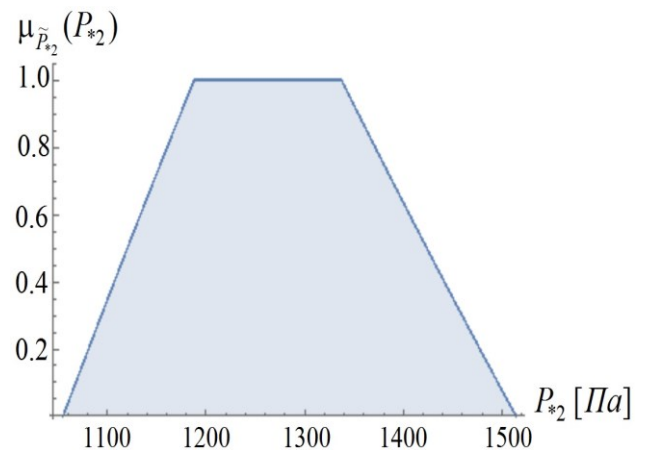


Рис. 2.108. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{P}_2}(P_{*2})$.

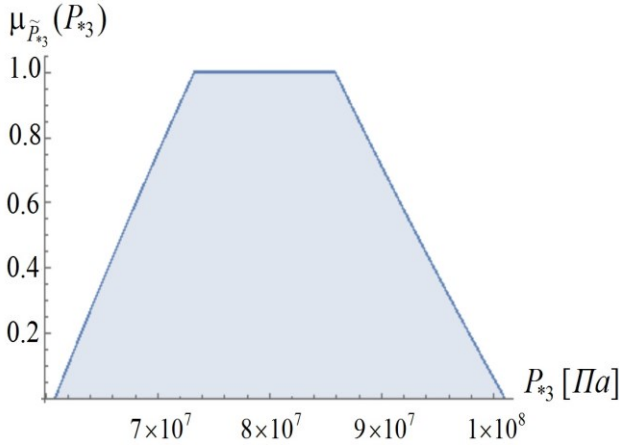


Рис. 2.109. Профиль функции принадлежности $\mu_{P_3}(P_3)$.

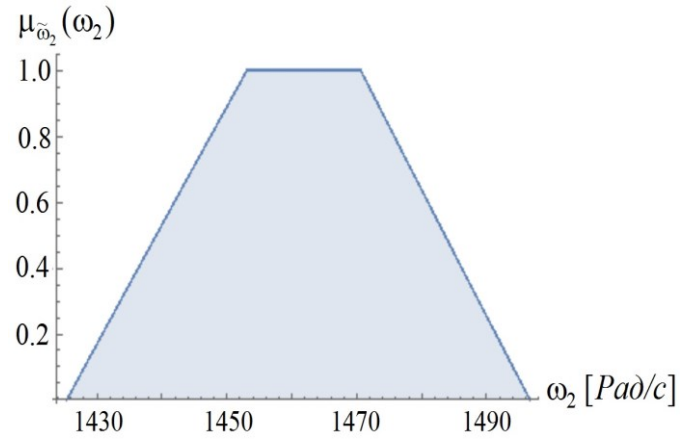


Рис. 2.110. Профиль функции принадлежности $\mu_{\omega_2}(\omega_2)$

Для оценки меры влияния неконтрастности значений указанных исходных физико-механических и геометрических параметров в модели устойчивости рассматриваемой оболочки на определяемые соотношениями (2.124) критические величины параметра внешнего нагружения в данных функциональных соотношениях реализуется переход к нечетко-множественным аргументам с применением α – уровневой формы эвристического принципа расширения. Исходным этапом процедуры расширения области определения аргументов h, R_s, R_l, E, ν на нечетко-множественные величины $\tilde{h}, \tilde{R}_s, \tilde{R}_l, \tilde{E}, \tilde{\nu}$ в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов является ведение их представлений кортежами из значений границ носителей и границ интервалов модальных значений

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad (2.137)$$

$$\tilde{R}_s = (R_{s1}, R_{s2}, R_{s3}, R_{s4}), \quad \tilde{R}_s = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}], \quad \underline{R}_{s\alpha} = (1-\alpha)R_{s1} + \alpha R_{s2}, \quad \bar{R}_{s\alpha} = \alpha R_{s3} + (1-\alpha)R_{s4};$$

$$\tilde{R}_l = (R_{l1}, R_{l2}, R_{l3}, R_{l4}), \quad \tilde{R}_l = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}], \quad \underline{R}_{l\alpha} = (1-\alpha)R_{l1} + \alpha R_{l2}, \quad \bar{R}_{l\alpha} = \alpha R_{l3} + (1-\alpha)R_{l4};$$

$$\tilde{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha], \quad \underline{E}_\alpha = (1-\alpha)E_1 + \alpha E_2, \quad \bar{E}_\alpha = \alpha E_3 + (1-\alpha)E_4;$$

$$\tilde{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4), \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha], \quad \underline{\nu}_\alpha = (1-\alpha)\nu_1 + \alpha \nu_2, \quad \bar{\nu}_\alpha = \alpha \nu_3 + (1-\alpha)\nu_4.$$

Нечетко-множественные описания для эндогенных параметров интенсивности критических усилий соответственно записываются в виде:

$$\tilde{q}_n^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{n\alpha}^*, \bar{q}_{n\alpha}^*], \quad (2.138)$$

$$\underline{q}_{n\alpha}^* = \inf_{\substack{R_s \in [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}] \\ R_l \in [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]}} \Phi_n(\underline{h}_\alpha, R_s, R_l, \underline{E}_\alpha, v), \quad \bar{q}_{n\alpha}^* = \sup_{\substack{R_s \in [\underline{R}_{s\alpha}, \bar{R}_{s\alpha}] \\ R_l \in [\underline{R}_{l\alpha}, \bar{R}_{l\alpha}] \\ v \in [\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha]}} \Phi_n(\bar{h}_\alpha, R_s, R_l, \bar{E}_\alpha, v).$$

Данные соотношения позволяют провести расчеты, связанные с получением описаний для функций принадлежности $\mu_{\tilde{q}_n^*}(q_n^*)$ нечетко-множественных характеристик \tilde{q}_n^* . На основе применения описанной методики реализован ряд расчетов, связанных с нечетко-множественным анализом рассматриваемой модели. При этом полагается, что рассматриваемая оболочка изготовлена из стали, и в качестве первой задачи численного анализа подлежат расчету функции принадлежности для нечетко-множественных оценок \tilde{q}_n^* в случае задания совокупности нечетко-интервальных исходных параметров вида:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= (19.7E_*, 19.9E_*, 20.0E_*, 20.2E_*), \quad \tilde{v} = (0.276, 0.279, 0.282, 0.285), \quad (2.139) \\ \tilde{R}_s &= (0.95 R_*, 0.99 R_*, 1.02 R_*, 1.06 R_*), \quad \tilde{R}_l = (104.95 R_*, 104.99 R_*, 105.02 R_*, 105.06 R_*), \\ \tilde{h} &= (0.0038 R_*, 0.004 R_*, 0.0042 R_*, 0.0044 R_*), \quad E_* = 10^{10} [\text{Па}], \quad R_* = 1 [\text{м}]. \end{aligned}$$

Результаты расчетов $\mu_{\tilde{q}_n^*}(q_n^*)$ с использованием соотношений (2.138), для этого варианта задания неконтрастных исходных параметров приведены на рисунках 2.111 – 2.113. При этом с учетом немонотонной зависимости q_n^* от n и зависимости соответствующей минимальному значению q_n^* величины n от совокупности физико-механических и геометрических характеристик модели, для рассматриваемого варианта нечетких экзогенных параметров дано описание функции принадлежности для минимального по медианному значению нечетко-множественного показателя \tilde{q}_3^* и двух следующих по возрастанию медианных значений на носителях нечетко-множественных величин \tilde{q}_2^* и \tilde{q}_4^* . Анализ результатов расчетов позволяет заключить, что максимальные разбросы для задаваемых в виде (2.139) исходных нечетко-интервальных параметров $\tilde{E}, \tilde{v}, \tilde{R}_l$

относительно медианных значений на носителях составляют не более 1.6%, для исходного параметра \tilde{R}_s этот разброс составляет 5.5%, а для исходного параметра \tilde{h} – 7.3%. Расчетный оцениваемый максимально возможный разброс для параметров \tilde{q}_2^* и \tilde{q}_3^* относительно средних значений на интервалах их носителей составляет в данном случае порядка 26.4%, а в диапазонах наиболее достоверных значений на модальных интервалах относительно их средних значений – порядка 8.2%. Для параметра \tilde{q}_4^* оценка максимально возможного разброса на интервале носителя составляет порядка 33.5%, а в диапазоне наиболее достоверных значений на модальном интервале – порядка 10.5%. Вид рассчитанных функций принадлежности позволяет оценить меру возможности достижения соответствующих значений эндогенным параметром интенсивности критического давления q_n^* в случае задания рассматриваемых неконтрастных исходных параметров расчетной модели.

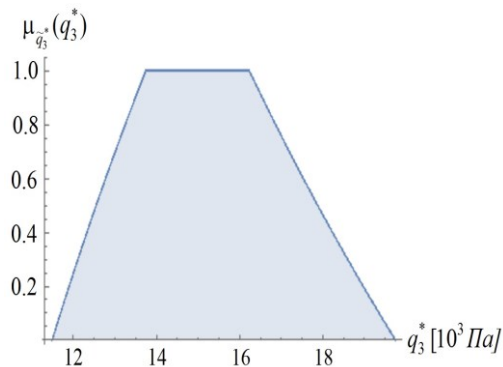


Рис. 2.111. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{q}_3^*}(q_3^*)$.

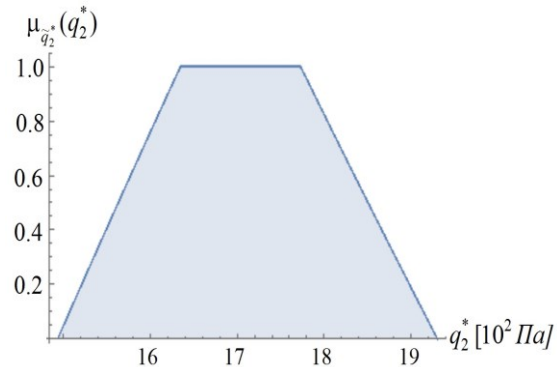


Рис. 2.112. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{q}_2^*}(q_2^*)$.

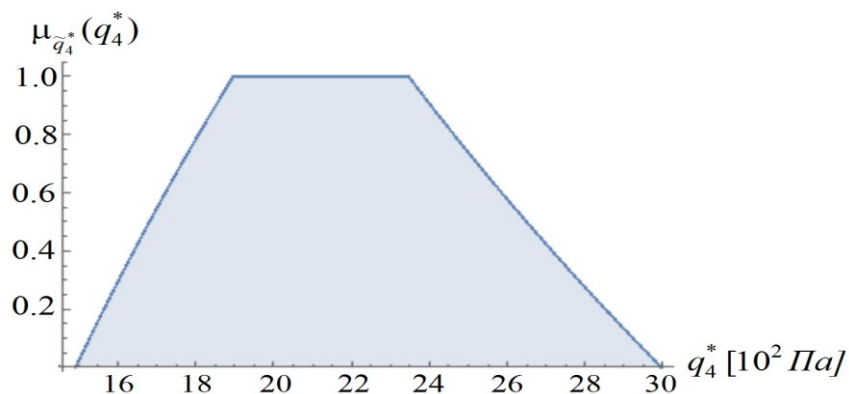


Рис. 2.113. Профиль функции принадлежности $\mu_{\tilde{q}_4^*}(q_4^*)$.

2.9. Выводы по разделу 2

1. В рамках принятой в работе концептуальной схемы исследования, с использованием результатов анализа детерминистических версий моделей деформирования разработаны методологические приемы применения нечетко-множественного подхода для учета разбросов исходных геометрических и физико-механических параметров в моделях деформирования тонкостенных конструкций стержневого, пластинчатого и оболочечного типов.

2. С применением нечетко-множественного подхода получены расчетные соотношения для оценок собственных частот поперечных колебаний прямых однородных стержней с различными типами граничных условий на концах при учете разброса параметров физико-механических свойств, параметров длины и геометрической формы поперечного сечения.

3. Разработан метод нечетко-множественного анализа моделей потери устойчивости сжатых прямых стержней и тонких плит симметричного трехслойного строения в рамках теории линейного докритического состояния.

4. Разработан метод получения нечетко-множественных оценок для скоростей линейных упругих волн кручения в тонкостенных стержнях с варьируемыми формами поперечных сечений на основе ряда уточненных теорий.

5. Разработан нечетко-множественный метод оценки влияния разбросов исходных параметров на характеристики напряженного состояния в моделях изгиба тонких изотропных плит и термоупругого деформирования тонких пластин эллиптического очертания.

6. Разработан нечетко-множественный метод оценки влияния разбросов экзогенных параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек при осевом сжатии, моделях устойчивости нагруженных внешним равномерным давлением сферических, эллипсоидальных и тороидальных тонких оболочек.

7. Разработан и апробирован комплекс программных приложений для расчетного анализа всех представленных в разделе случаев нечетко-множественного моделирования процессов деформирования тонкостенных

конструкционных элементов стержневого, пластиночного и оболочечного типов с неопределенными физико-механическими и геометрическими параметрами.

РАЗДЕЛ 3. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ ФОРМИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ЗОН ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ОКОЛО ПОЛОСТЕЙ И ОТВЕРСТИЙ

3.1. Нечетко множественный анализ влияния разброса физико-механических и геометрических параметров при исследовании концентрации напряжений в пластинах с эллиптическими отверстиями

Данный подраздел работы посвящен разработке методики получения нечетко-множественных оценок для имеющих разброс показателей концентрации механических напряжений у границ эллиптического отверстий при исследовании моделей деформирования пластин. Неопределенность в описании форм эллиптических отверстий в реальных конструкционных элементах связана с нечеткостью в задании их эксцентриситета, обусловленной технологическими разбросами в соотношениях длин полуосей эллиптического контура. Неопределенность в значениях упругих постоянных изотропного либо ортотропного материала пластин связана с разбросами их экспериментальных замеров, допусками и технологическими особенностями в процессах изготовления соответствующих материалов.

Представляемый подход базируется на результатах решения задачи определения характеристик локализованного поля механических напряжений в прямолинейно-ортотропной тонкой пластине с модулями жесткости $\{S_{11}, S_{22}, S_{12}, S_{66}\}$ в окрестности находящегося в равномерном поле растягивающих напряжений эллиптического отверстия со свободным контуром. Деформирование пластины описывается моделью обобщенного плоского напряженного состояния; в срединной плоскости пластины введена система прямоугольных координат Ox_1x_2 , а контур Γ эллиптического отверстия с полуосями a и b имеет параметрическое описание $(x_1)_\Gamma = a \cdot \cos \theta$, $(x_2)_\Gamma = b \cdot \sin \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Согласно [139, 211], в случае равномерного

растяжения пластины вдоль оси Ox_1 усилиями интенсивности p на основе применения методов теории функций обобщенных комплексных переменных показатель концентрации механических напряжений $\sigma_{ks} = (\sigma_s / p)_\Gamma$ в точках контура отверстия получен в виде аналитического представления

$$\sigma_{ks} = F(a, b, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta) = 1 + \sum_{j=1}^2 [b(1 - \beta_j^2)(\cos 2\theta - m_j) \cdot \quad (3.1)$$

$$\cdot (R_j(-1)^j(\beta_2 - \beta_1)(1 - 2m_j \cos 2\theta + m_j^2)^{-1}],$$

$$m_j = [(1 - \beta_j \cdot (b/a)) / (1 + \beta_j \cdot (b/a))], \quad R_j = [a(1 + \beta_j \cdot (b/a)) / 2],$$

$$\beta_j = [((2s_{12} + s_{66}) + (-1)^{j+1}((2s_{12} + s_{66})^2 - 4s_{11}s_{22})^{1/2}) / (2s_{11})]^{1/2} \quad (j = \overline{1,2}).$$

Описанная модель анализа показателя концентрации напряжений у контура отверстия исследуется в рамках предположений о нечеткости задания ее геометрических параметров в полуосей эллиптического отверстия a , b при точных значениях модулей жесткости материала пластины, а также задания неконтрастных значений геометрических параметров a и b в нечеткими трапецеидальными интервалами \tilde{a} , \tilde{b} с кортежами реперных точек (a_1, a_2, a_3, a_4) , (b_1, b_2, b_3, b_4) разложениями по множествам α -срезов

$$\tilde{a} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{a}}_\alpha, \overline{\tilde{a}}_\alpha], \quad \underline{\tilde{a}}_\alpha = (1 - \alpha)m_1 + \alpha m_2, \quad \overline{\tilde{a}}_\alpha = \alpha m_3 + (1 - \alpha)m_4;$$

$$\tilde{b} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{b}}_\alpha, \overline{\tilde{b}}_\alpha], \quad \underline{\tilde{b}}_\alpha = (1 - \alpha)m_1 + \alpha m_2, \quad \overline{\tilde{b}}_\alpha = \alpha m_3 + (1 - \alpha)m_4.$$

Соотношение (3.1) преобразуется с ведением характеристики $\eta = b/a$

$$(\sigma_\theta / p)_\Gamma = F(\eta, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta) = 1 + \sum_{j=1}^2 [(1 - \beta_j^2)(\cos 2\theta - m_j) \cdot \quad (3.2)$$

$$\cdot ((-1)^j(\beta_2 - \beta_1)(1 + \beta_j \eta)(1 - 2m_j \cos 2\theta + m_j^2) / (2\eta))^{-1}],$$

$$m_j = [(1 - \beta_j \eta) / (1 + \beta_j \eta)],$$

которая в рамках нечетко-множественного обобщения является нечетко-интервальной величиной $\tilde{\eta}$ с кортежем реперных точек $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, $\eta_1 = b_1/a_4$, $\eta_2 = b_2/a_3$, $\eta_3 = b_3/a_2$, $\eta_4 = b_4/a_1$ и представляется в виде

$$\tilde{\eta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{\eta}}_{\alpha}, \overline{\tilde{\eta}}_{\alpha}], \quad \underline{\tilde{\eta}}_{\alpha} = (1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, \quad \overline{\tilde{\eta}}_{\alpha} = \alpha\eta_3 + (1-\alpha)\eta_4. \quad (3.3)$$

Соответственно, при применении эвристического принципа расширения для получения нечеткой оценки показателя концентрации контурных напряжений $\tilde{\sigma}_{ks}$ в данном случае записывается представление

$$\tilde{\sigma}_{ks} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{F}}_{\alpha}, \overline{\tilde{F}}_{\alpha}], \quad (3.4)$$

$$\underline{\tilde{F}}_{\alpha} = \inf_{\eta_{\alpha} \in [(1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, (1-\alpha)\eta_4 + \alpha\eta_3]} F(\eta_{\alpha}, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta),$$

$$\overline{\tilde{F}}_{\alpha} = \sup_{\eta_{\alpha} \in [(1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, (1-\alpha)\eta_4 + \alpha\eta_3]} F(\eta_{\alpha}, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, \theta).$$

В качестве примера реализации данного варианта методики получения нечетких оценок для показателя концентрации контурных напряжений $\tilde{\sigma}_{ks}$ рассмотрен случай растяжения ортотропной пластины из волокнистого стеклопластика со значениями модулей жесткости $s_{11} = 0.0412 \cdot s_*$, $s_{22} = 0.1001 \cdot s_*$, $s_{12} = -0.0170 \cdot s_*$, $s_{66} = 0.3393 \cdot s_*$, $s_* = 10^{-10}$ Па.

Приведенной совокупности s_{ij} соответствуют определяемые по формуле (3.1) значения $\beta_1 = 2.6575$, $\beta_2 = 0.5864$. В рассматриваемой пластине имеется эллиптическое отверстие с неконтрастными нормированными нечетко-интервальными величинами полуосей

$$\tilde{a} = (1.85, 1.95, 2.1, 2.2), \quad \tilde{b} = (0.85, 1.0, 1.1, 1.15).$$

Определяемые соотношениями (3.4) нечеткие оценки для показателя концентрации напряжений $\tilde{\sigma}_{ks}$ при нескольких значениях углового параметра $\theta \in \{5^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$ представлены на рис. 3.1 – 3.4. Полученные оценки, в частности, позволяют сделать вывод об увеличении степени разброса показателя концентрации в зоне действия растягивающих контурных напряжений для точек участка границы отверстия, лежащих на ортогональном направлению растяжения координатной оси Ox_2 , в случае, когда эллиптический контур вытянут вдоль направления растяжения. Напротив, степень нечеткости показателя концентрации

в контурных точках отверстия при их приближении к точке пресечения контура с осью Ox_1 снижается и разброс его значений полностью отсутствует для положения $\theta = 0^\circ$.

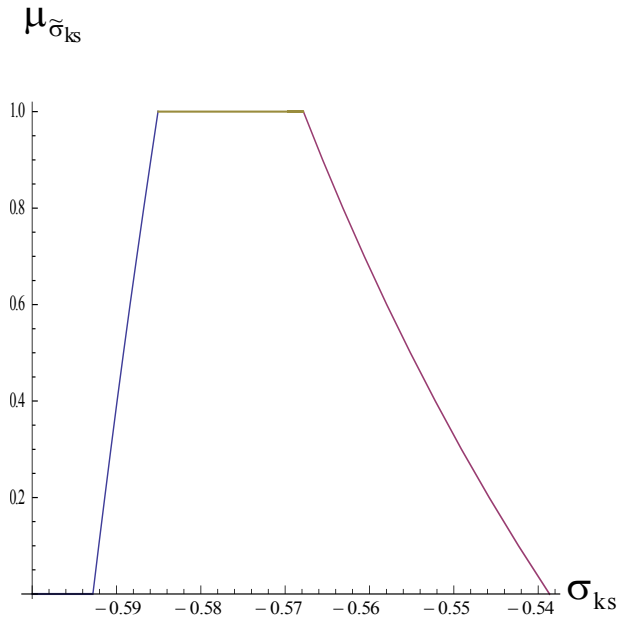


Рис.3.1. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{ks}$ при $\theta = 5^\circ$

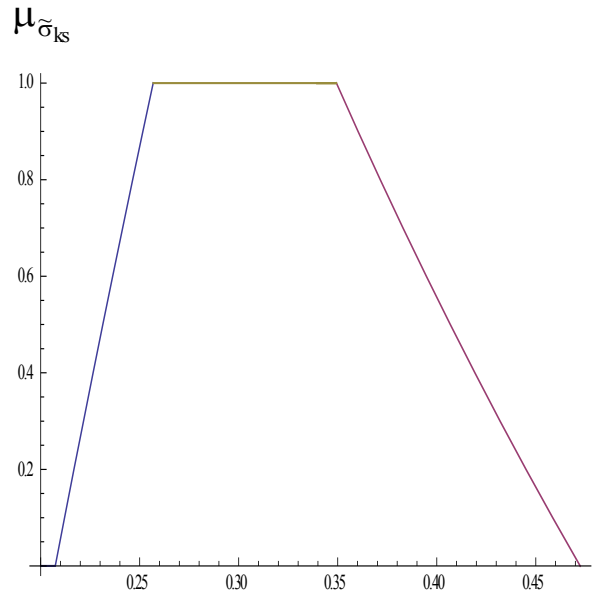


Рис.3.2. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{ks}$ при $\theta = 30^\circ$

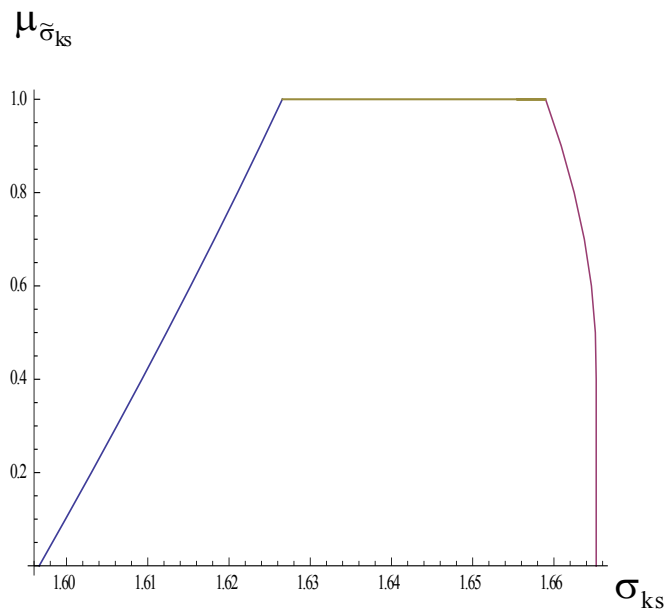


Рис.3.3. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{ks}$ при $\theta = 60^\circ$

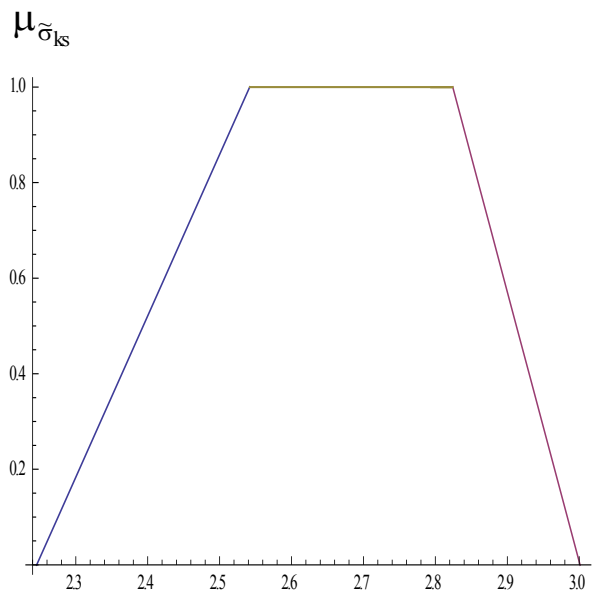


Рис.3.4. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\sigma}_{ks}$ при $\theta = 90^\circ$

3.2. Оценки влияния нечеткости экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния изотропной пластины с эллиптическим упругим включением

Аналогичный представленному в подразделе 3.1 метод разработан применительно к задаче получения оценок для неопределенных показателей концентрации механических напряжений у контура эллиптического упругого включения в тонкой изотропной пластине при наличии разброса в значениях ее физико-механических и геометрических параметров. Способ учета неконтрастности экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния пластины также основывается на применении модифицированного эвристического принципа обобщения в теории нечетких вычислений к аналитическим соотношениям, полученным при решении рассматриваемой задачи теории концентрации напряжений в классической детерминистической постановке.

В разрабатываемом методе используются результаты представленного в публикации [157] исследования модели обобщенного плоского напряженного состояния бесконечной тонкой изотропной пластины G_2 с эллиптическим упругим включением G_1 в детерминистической постановке без учета свойств неконтрастности данных об исходных параметрах модели, имеющие форму аналитического описания характеристик напряженно-деформированного состояния в произвольной точке пластины и включения.

При получении указанного аналитического решения область срединной плоскости пластины рассматривается в декартовых координатах Ox_1x_2 , интерпретируемых также как комплексная плоскость $z = x_1 + ix_2$, с полюсом в центре отверстия, содержащего идеально контактирующее изотропное включение G_1 . Эллиптическая область включения имеет полуоси a , b , а для его контура вводится обозначение L . Механические свойства материалов включения и пластины в областях G_j соответственно характеризуются модулями сдвига μ_j и коэффициентами Пуассона ν_j .

Учитывается, что область G_2 во внешности L , занимаемая материалом пластины, может конформно отображаться на область во внешности имеющей единичный радиус окружности на некоторой плоскости комплексных переменных $\zeta = r \cdot \exp(i\theta)$, рассматриваемой как вспомогательная в процессе получения решения. Функция конформного отображения имеет вид $z = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1})$, $R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$, $a = R(1+m)$, $b = R(1-m)$, или $x_1 = R(r + mr^{-1})\cos\theta$, $x_2 = R(r - mr^{-1})\sin\theta$, и с использованием общей формулы $\exp(i\gamma) = \zeta\omega'(\zeta)/|\zeta\omega'(\zeta)|$ для определения направляющего угла $\gamma = (\vec{n}, x_1)$ внешней нормали \vec{n} к вводимой отображением $z = \omega(\zeta)$ эллиптической кривой L , в рассматриваемом случае может быть записано соотношение

$$e^{-2i\gamma} = (((1+m^2)\cos 2\theta - 2m) - i(1-m^2)\sin 2\theta)/(1+m^2 - 2m\cos 2\theta). \quad (3.5)$$

Введенная этим представлением функция $z = \omega(\zeta)$ реализует также конформное отображение области включения G_1 с разрезом на отрезке $[-c, c]$, $c = 2R \cdot m^{1/2}$ между фокусами эллиптического контура включения на область кольцевой формы $\{r \in [m^{1/2}, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$ в плоскости ζ .

С применением метода комплексных потенциалов [157] для функций механических напряжений $(\sigma_{rr}^{(j)})_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(j)})_L$ в точках граничного контура L контакта пластины и включения в случае действия на удалении от отверстия с включением (в бесконечно удаленных точках области G_2) внешних нагрузжений σ_{11}^∞ , σ_{22}^∞ , σ_{12}^∞ , записываются выражения

$$(\sigma_{rr}^{(1)})_L = (\sigma_{rr}^{(2)})_L = A_1 + \bar{A}_1 - (B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma})/2 = F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \quad (3.6)$$

$$(\sigma_{\theta\theta}^{(1)})_L = A_1 + \bar{A}_1 + (B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma})/2 = F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \quad (3.7)$$

$$(\sigma_{\theta\theta}^{(2)})_L = 2(A - mD + \bar{A} - m\bar{D} - (mA - \bar{D})e^{2i\theta} - (m\bar{A} - D)e^{-2i\theta})/(1+m^2 - 2m\cos 2\theta) - A_1 - \bar{A}_1 + (B_1 e^{2i\gamma} + \bar{B}_1 e^{-2i\gamma})/2 = F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta), \quad (3.8)$$

где

$$D = m\bar{A} + \bar{B} - m(A_1 + \bar{A}_1) - B_1, \quad F = (1-m^2)(\mu_1 - \mu_2)/\mu_1, \quad (3.9)$$

$$G = (\mu_1 + \kappa_1\mu_2)/\mu_1 - m^2(\mu_1 - \mu_2)(\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2)/(\mu_1(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)),$$

$$C = (1 + \kappa_2)\bar{A} - m(1 + \kappa_2)(\mu_1 - \mu_2)(mA + B)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1), \quad A_1 = (FC - G\bar{C})/(F^2 - G^2),$$

$$B_1 = \mu_1(1 + \kappa_2)(mA + B)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1) - mA_1 - m\bar{A}_1(\kappa_2\mu_1 - \kappa_1\mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1),$$

$$A = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \frac{8i\mu}{1 + \kappa}\omega^\infty), \quad B = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty + 2i\sigma_{12}^\infty), \quad \omega^\infty = -\sigma_{12}^\infty m(1 + \kappa_2)/(2\mu_2(m_2 + \kappa_2)).$$

Индекс j в представлениях $(\sigma_{rr}^{(j)})_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(j)})_L$ указывает на ту из контактирующих по линии L областей G_j , в которой действует соответствующее напряжение. Входящий в представления (3.9) параметр κ_j имеет представление $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, если в представляемой постановке рассматривается задача обобщенного плоского напряженного состояния пластины, и описывается выражением $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$ в случае двумерной модели плоской деформации изотропного тела с цилиндрическим включением эллиптического сечения. Величина ω^∞ в формуле (3.9) для параметра A при соответствующем типе внешнего нагружения является характеристикой угла поворота на бесконечности. Наряду с напряжениями $(\sigma_{rr}^{(j)})_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(j)})_L$, на основе использования представления

$$2\mu_1(u_1^{(1)} + iu_2^{(1)}) = (\kappa_1 A_1 - \bar{A}_1)z - \bar{B}_1 \bar{z} \quad (3.10)$$

для произвольной точки включения могут быть также рассчитаны упругие перемещения $u_j^{(1)}$

При отдельных частных схемах приложения внешних усилий, для параметров соотношений (3.6)–(3.10) могут быть записаны конкретизированные специальные представления, которые имеют вид:

– в случае действия усилий одностороннего растяжения $\sigma_{11}^\infty = p$, $\sigma_{22}^\infty = 0$, $\sigma_{12}^\infty = 0$

$$A = p/4, \quad B = -p/2, \quad C = p(1 + \kappa_2)(1 - m(m - 2)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))/4, \quad (3.11)$$

$$A_1 = C/(F + G), \quad B_1 = \mu_1 p(1 + \kappa_2)(m - 2)/(4(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)) - mA_1(\mu_2(1 - \kappa_1) + 2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1);$$

– в случае действия усилий одностороннего растяжения $\sigma_{11}^\infty = 0$, $\sigma_{22}^\infty = p$, $\sigma_{12}^\infty = 0$

$$A = p/4, \quad B = p/2, \quad C = p(1 + \kappa_2)(1 - m(m + 2)(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))/4, \quad (3.12)$$

$$A_1 = C/(F + G), \quad B_1 = \mu_1 p(1 + \kappa_2)(m + 2)/(4(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)) - mA_1(\mu_2(1 - \kappa_1) + 2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1);$$

– в случае всестороннего растяжения $\sigma_{11}^\infty = p$, $\sigma_{22}^\infty = p$, $\sigma_{12}^\infty = 0$

$$A = p/2, \quad B = 0, \quad C = p(1 + \kappa_2)(1 - m^2(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))/2, \quad (3.13)$$

$$A_1 = C/(F + G), \quad B_1 = \mu_1 p(1 + \kappa_2)m/(2(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)) - mA_1(\mu_2(1 - \kappa_1) + 2\mu_1\kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1).$$

Представления для $(\sigma_{rr}^{(j)})_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(j)})_L$ для вышеуказанных частных случаев целесообразно записать в унифицированной форме

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta}^{(1)})_L &= F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta) = \\ &= 2G/(F + G) + B_1((1 + m^2)\cos 2\theta - 2m)/(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{\theta\theta}^{(2)})_L &= F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta) = \\ &= 4(A - mD - (ma - D)\cos 2\theta)/(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta) - \\ &- 2G/(F + G) + B_1((1 + m^2)\cos 2\theta - 2m)/(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta). \end{aligned} \quad (3.15)$$

При действии на пластину сдвиговых усилий σ_{12}^∞

$$\begin{aligned} A &= -im\sigma_{12}^\infty/(m^2 + \kappa_2), \quad A_1 = C/(F - G), \quad B = i\sigma_{12}^\infty, \\ B_1 &= i\mu_1((1 + \kappa_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))(\kappa_2/(m^2 + \kappa_2))\sigma_{12}^\infty - mA_1\mu_2(1 + \kappa_1)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1), \\ C &= -i(1 + \kappa_2)(1 - (1 + m^2(\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1))(m/(m^2 + \kappa_2))\sigma_{12}^\infty, \\ F - G &= -\mu_2(1 + \kappa_1)(1 + m^2((\mu_1 - \mu_2)/(\mu_2 + \kappa_2\mu_1)))/\mu_1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Нечетко-множественный метод анализа эффектов влияния неопределенности исходных параметров на ведущие эндогенные характеристики рассматриваемой расчетной модели, прежде всего на показатели концентрации механических напряжений на границе контакта материала и включения, основывается на описанных выше результатах ее исследования в детерминистической постановке с переходом в полученных соотношениях аргументам нечетко-множественного типа. Для неконтрастных экзогенных параметров внешних силовых воздействий $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty$, параметров механических свойств материалов пластины и включения μ_j, ν_j , а также геометрических характеристик a, b , имеющих разбросы в подлежащих учету значениях, связанные с погрешностями экспериментальных измерений, проектными и технологическими допусками, отклонениями эксплуатационных режимах, на базе приемов фаззификации вводятся описания в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\mu}_j, \tilde{\nu}_j, \tilde{\sigma}_{11}^\infty, \tilde{\sigma}_{22}^\infty, \tilde{\sigma}_{12}^\infty$ с представлениями вида

$$\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], \quad \underline{a}_\alpha = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, \quad \bar{a}_\alpha = \alpha a_3 + (1-\alpha)a_4; \quad (3.17)$$

$$\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \quad \underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \bar{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4;$$

$$\tilde{\mu}_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j}, \mu_{3j}, \mu_{4j}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{\alpha j}, \bar{\mu}_{\alpha j}], \quad \underline{\mu}_{\alpha j} = (1-\alpha)\mu_{1j} + \alpha\mu_{2j}, \quad \bar{\mu}_{\alpha j} = \alpha\mu_{3j} + (1-\alpha)\mu_{4j};$$

$$\tilde{\nu}_j = (\nu_{1j}, \nu_{2j}, \nu_{3j}, \nu_{4j}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\nu}_{\alpha j}, \bar{\nu}_{\alpha j}], \quad \underline{\nu}_{\alpha j} = (1-\alpha)\nu_{1j} + \alpha\nu_{2j}, \quad \bar{\nu}_{\alpha j} = \alpha\nu_{3j} + (1-\alpha)\nu_{4j};$$

$$\tilde{\sigma}_{ij}^\infty = (\sigma_1^{(ij)}, \sigma_2^{(ij)}, \sigma_3^{(ij)}, \sigma_4^{(ij)}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_\alpha^{(ij)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(ij)}], \quad \underline{\sigma}_\alpha^{(ij)} = (1-\alpha)\sigma_1^{(ij)} + \alpha\sigma_2^{(ij)}, \quad \bar{\sigma}_\alpha^{(ij)} = \alpha\sigma_3^{(ij)} + (1-\alpha)\sigma_4^{(ij)}.$$

Наряду с учетом факторов неконтрастности для всей совокупности исходных параметров модели, могут также отдельно рассматриваться частные случаи оценивания эффектов влияния разбросов значений упругих постоянных μ_j, ν_j при точном задании параметров внешнего силового воздействия и геометрических характеристик a, b ; влияния разбросов для параметров полуосей a, b включения при задании точных значений параметров свойств материалов и внешних усилий. При этом, применительно к самому общему варианту учета неконтрастности экзогенных параметров модели, на базе эвристического принципа обобщения для эндогенных параметров концентрации напряжений $(\sigma_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\sigma_{rr}^{(2)}(\theta))_L, (\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L, (\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ получены нечетко-множественные описания

$$(\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [F_{1\alpha}(\theta), \bar{F}_{1\alpha}(\theta)], \quad (3.18)$$

$$\underline{F}_{1\alpha}(\theta) = \inf_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_{\alpha j}, \bar{\mu}_{\alpha j}] \\ \nu_j \in [\underline{\nu}_{\alpha j}, \bar{\nu}_{\alpha j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}]}} F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta),$$

$$\bar{F}_{1\alpha}(\theta) = \sup_{\substack{a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_{\alpha j}, \bar{\mu}_{\alpha j}] \\ \nu_j \in [\underline{\nu}_{\alpha j}, \bar{\nu}_{\alpha j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}]}} F_1(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [F_{2\alpha}(\theta), \bar{F}_{2\alpha}(\theta)],$$

$$\underline{F}_{2\alpha}(\theta) = \inf_{\substack{a \in [a_\alpha, a_\alpha] \\ b \in [b_\alpha, b_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_{\alpha j}, \mu_{\alpha j}] \\ \nu_j \in [\underline{\nu}_{\alpha j}, \nu_{\alpha j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}]}} F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta),$$

$$\overline{F}_{2\alpha}(\theta) = \sup_{\substack{a \in [a_\alpha, a_\alpha] \\ b \in [b_\alpha, b_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_{\alpha j}, \mu_{\alpha j}] \\ \nu_j \in [\underline{\nu}_{\alpha j}, \nu_{\alpha j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}]}} F_2(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{3\alpha}(\theta), \overline{F}_{3\alpha}(\theta)],$$

$$\underline{F}_{3\alpha}(\theta) = \inf_{\substack{a \in [a_\alpha, a_\alpha] \\ b \in [b_\alpha, b_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_{\alpha j}, \mu_{\alpha j}] \\ \nu_j \in [\underline{\nu}_{\alpha j}, \nu_{\alpha j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}]}} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta),$$

$$\overline{F}_{3\alpha}(\theta) = \sup_{\substack{a \in [a_\alpha, a_\alpha] \\ b \in [b_\alpha, b_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_{\alpha j}, \mu_{\alpha j}] \\ \nu_j \in [\underline{\nu}_{\alpha j}, \nu_{\alpha j}] \\ \sigma_{11}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(11)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(11)}] \\ \sigma_{22}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(22)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(22)}] \\ \sigma_{12}^\infty \in [\underline{\sigma}_\alpha^{(12)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(12)}]}} F_3(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta).$$

В этих представлениях функции $F_j(a, b, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta)$ описываются соотношениями (3.6) – (3.16).

При постановке задачи парциального учета эффектов влияния разбросов только для геометрических параметров модели в виде величин полуосей включения a, b , выражения (3.18) записываются в виде

$$(\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{1\alpha}(\theta), \overline{F}_{1\alpha}(\theta)], \quad (3.19)$$

$$\underline{F}_{1\alpha}(\theta) = \inf_{m \in [\underline{m}_\alpha, m_\alpha]} F_1(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta),$$

$$\overline{F}_{1\alpha}(\theta) = \sup_{m \in [\underline{m}_\alpha, m_\alpha]} F_1(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{2\alpha}(\theta), \overline{F}_{2\alpha}(\theta)],$$

$$\underline{F}_{2\alpha}(\theta) = \inf_{m \in [\underline{m}_\alpha, m_\alpha]} F_2(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta),$$

$$\bar{F}_{2\alpha}(\theta) = \sup_{m \in [\underline{m}_\alpha, \bar{m}_\alpha]} F_2(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta);$$

$$(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [F_{3\alpha}(\theta), \bar{F}_{3\alpha}(\theta)],$$

$$\underline{F}_{3\alpha}(\theta) = \inf_{m \in [\underline{m}_\alpha, \bar{m}_\alpha]} F_3(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta),$$

$$\bar{F}_{3\alpha}(\theta) = \sup_{m \in [\underline{m}_\alpha, \bar{m}_\alpha]} F_3(m, \mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \theta).$$

В выражениях (3.19)

$$\underline{m}_\alpha = (1 - \alpha)m_1 + \alpha m_2, \quad \bar{m}_\alpha = m(1 - \alpha)m_4 + \alpha m_3,$$

$$m_1 = (a_1 - b_4)/(a_4 + b_4), \quad m_2 = (a_1 - b_4)/(a_4 + b_4), \quad m_3 = (a_1 - b_4)/(a_4 + b_4), \quad m_4 = (a_1 - b_4)/(a_4 + b_4).$$

Для реализации алгоритма применения представленного метода разработано программное приложение, с использованием которого выполнены отдельные расчетные эксперименты по получению нечетко-множественных оценок для эндогенного параметра концентрации контурных напряжений в модели всестороннего растяжения усилиями $\sigma_{11}^\infty = p$, $\sigma_{22}^\infty = p$, $\sigma_{12}^\infty = 0$ пластины, изготовленной из катаного алюминия и содержащей титановое эллиптическое включение. Параметры полуосей включения a [10^{-2} м], b [10^{-2} м] и коэффициенты Пуассона материалов пластины и включения ν_j интерпретируются как величины, имеющие разбросы значений и задаваемые представлениями в виде нечетких нормальными трапецидальных интервалов

$$\tilde{\nu}_1 = (0.31, 0.315, 0.325, 0.33); \quad \tilde{\nu}_2 = (0.32, 0.34, 0.35, 0.36);$$

$$\tilde{a} = (1.90, 1.95, 2.05, 2.10); \quad \tilde{b} = (0.90, 0.95, 1.05, 1.10).$$

Вид функций принадлежности для отнесенных к контрастной интенсивности растягивающих усилий p нечетко-множественных нормированных эндогенных характеристик напряженного состояния в пластине и включении $(\sigma_{rr}^{(1)}(\theta))_L = (\sigma_{rr}^{(2)}(\theta))_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$, $(\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$, в точках контура границы их контакта для ряда значений θ применительно к частному случаю учета разбросов только для параметров длин полуосей включения и задания нормированных точных величин $\mu_1 = 4.38$, $\mu_2 = 2.62$, $\tilde{\nu}_1 = 0.32$, $\nu_2 = 0.345$, представлены на рисунках 3.5 – 3.11.

В другом частном случае, при учете разбросов лишь в значениях коэффициентов Пуассона для материала пластины и включения, а также описании точными значениями $\mu_1 = 4.38$, $\mu_2 = 2.62$, $a = 2.0$, $b = 1.0$ остальных нормированных параметров модели, функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик напряженного состояния изображены на рисунках 3.12 – 3.20.

Анализ рассчитанных профилей функций принадлежности позволяет сделать заключения о мере влияния неопределенности в виде разбросов значений исходных механических или геометрических параметров исследуемой модели на уровни неконтрастности соответствующих показателей концентрации контурных напряжений в точках линии контакта пластины и включения, для которых различным является параметр кривизны

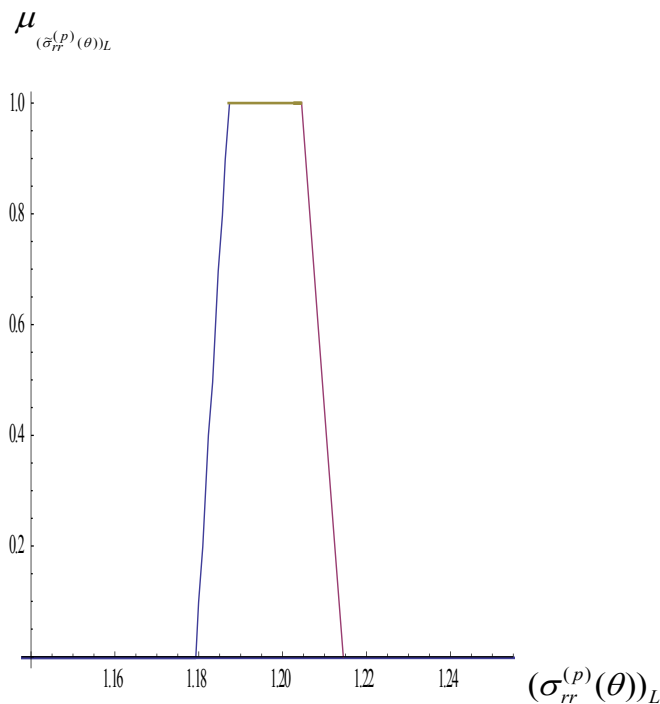


Рис. 3.5. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ при $\theta = 2^\circ$.

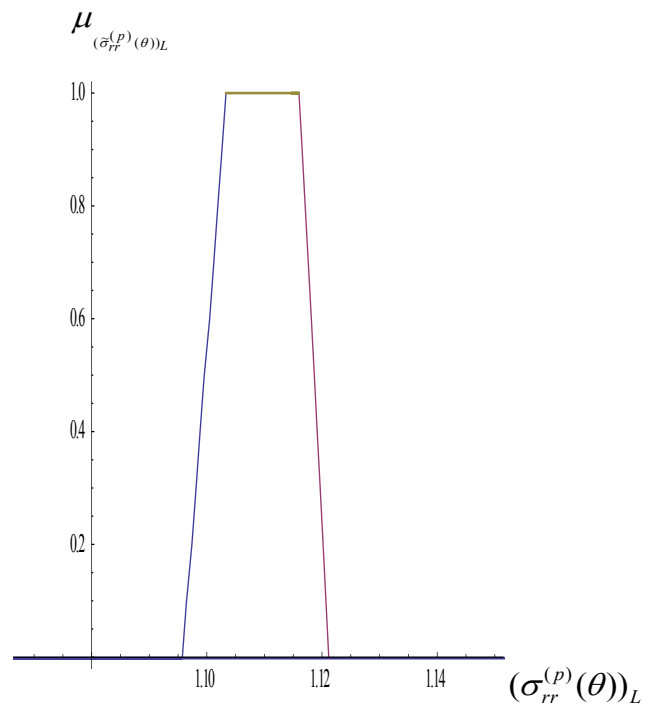


Рис. 3.6. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ при $\theta = 45^\circ$.

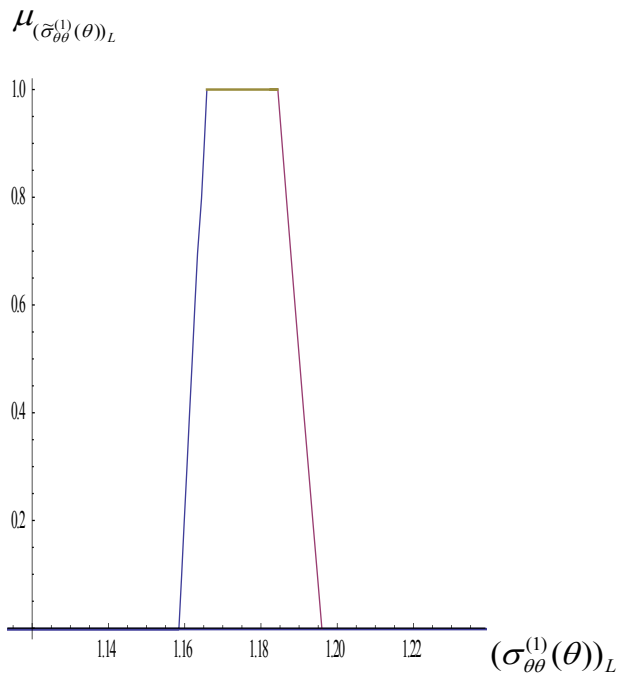


Рис. 3.7. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ при $\theta = 45^\circ$.

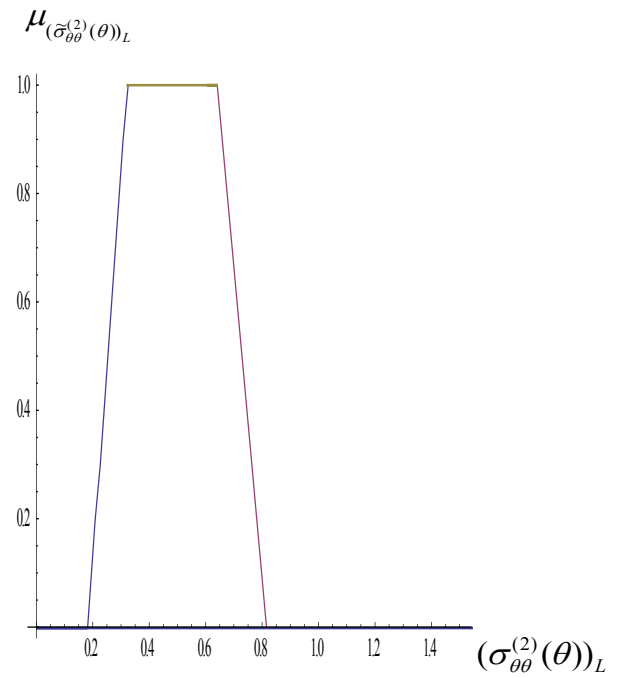


Рис. 3.8. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ при $\theta = 45^\circ$.

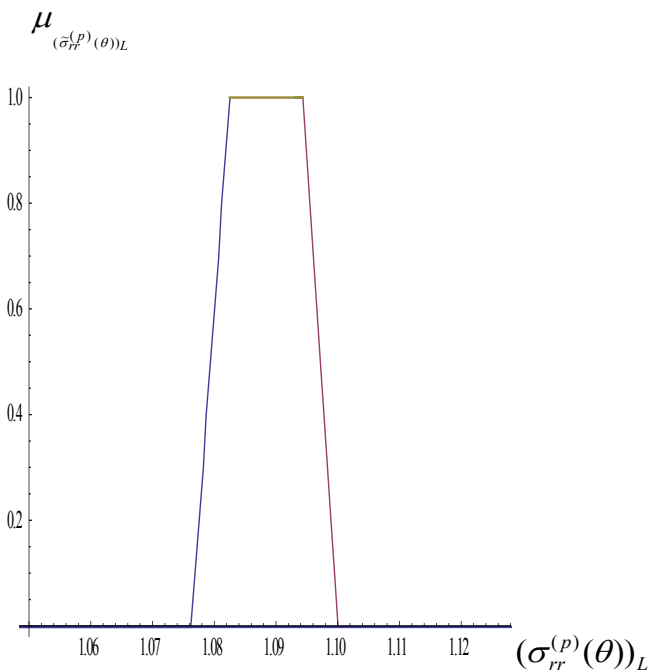


Рис. 3.9. Вид функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ при $\theta = 88^\circ$.

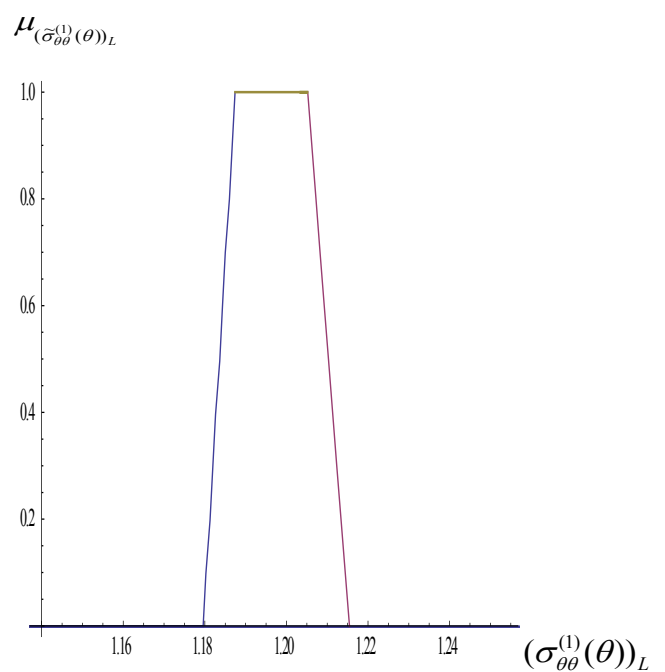


Рис. 3.10. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ при $\theta = 88^\circ$.

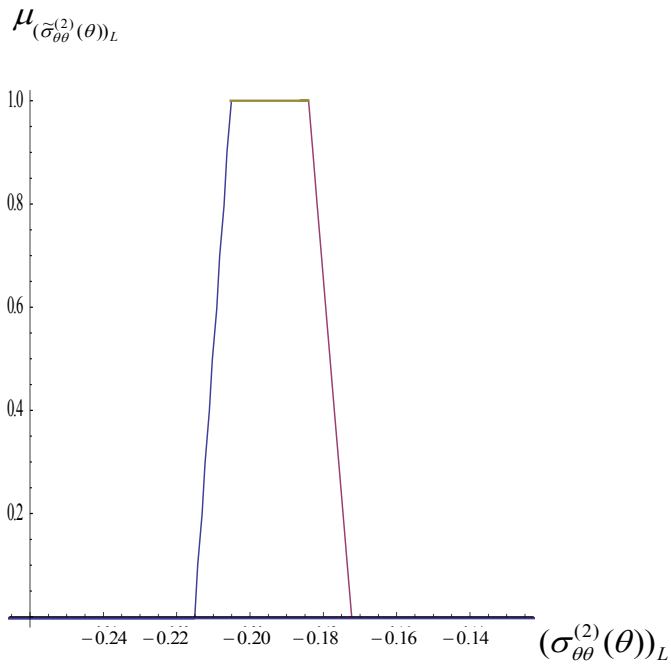


Рис. 3.11. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ при $\theta = 88^\circ$.

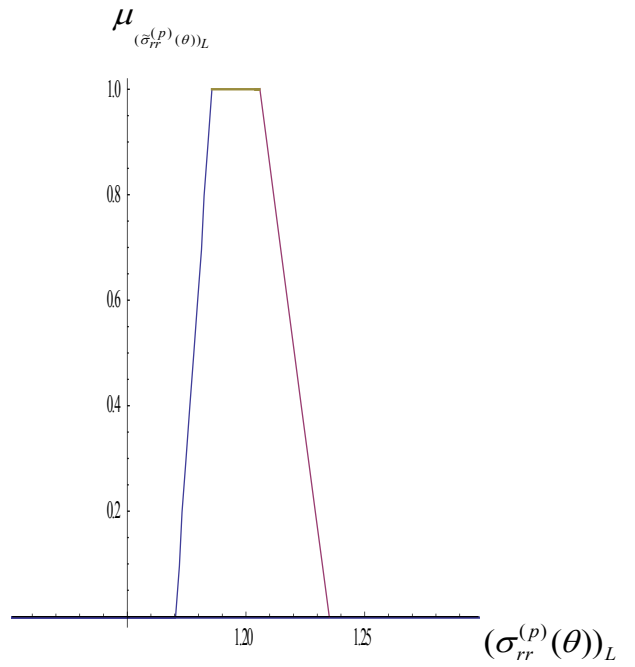


Рис. 3.12. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ при $\theta = 2^\circ$.

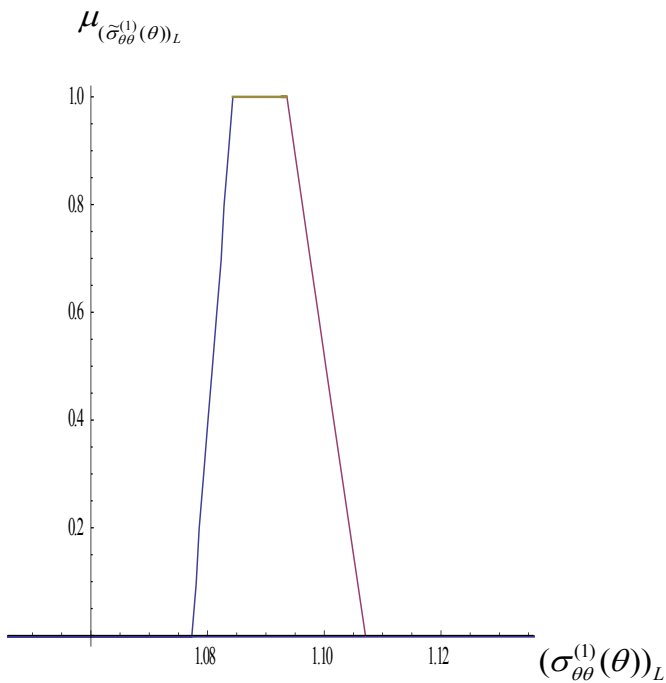


Рис. 3.13. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ при $\theta = 2^\circ$.

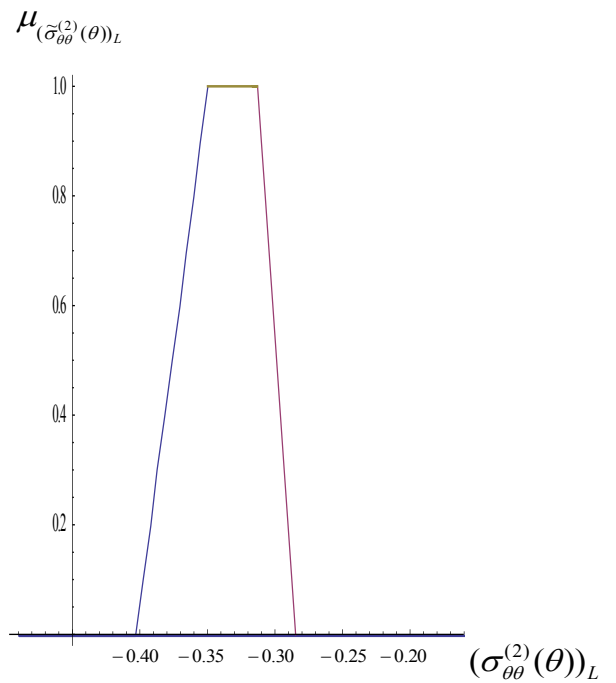


Рис. 3.14. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ при $\theta = 2^\circ$.

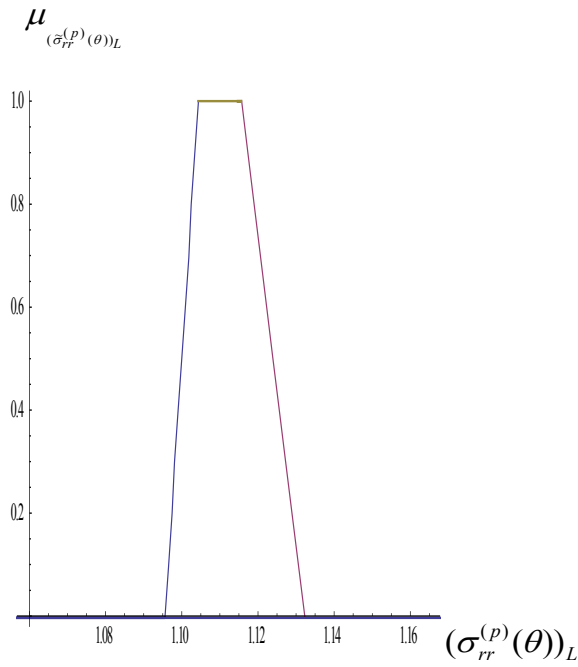


Рис. 3.15. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ при $\theta = 45^\circ$.

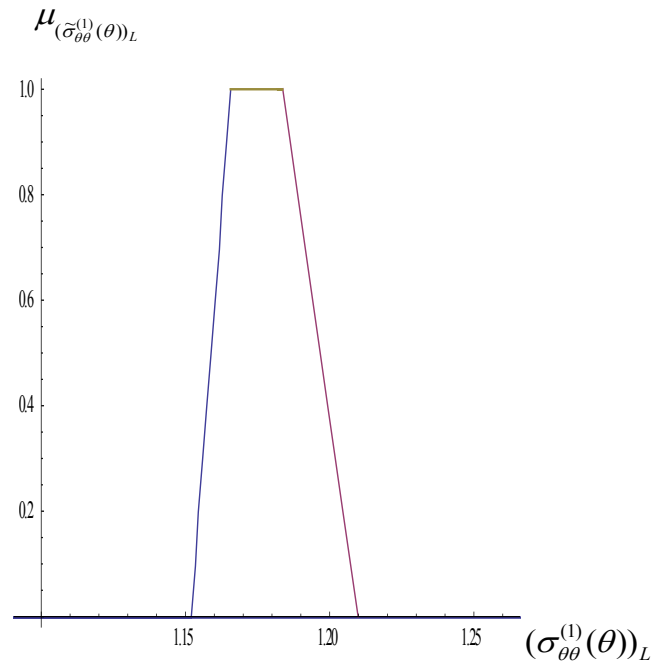


Рис. 3.16. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ при $\theta = 45^\circ$.

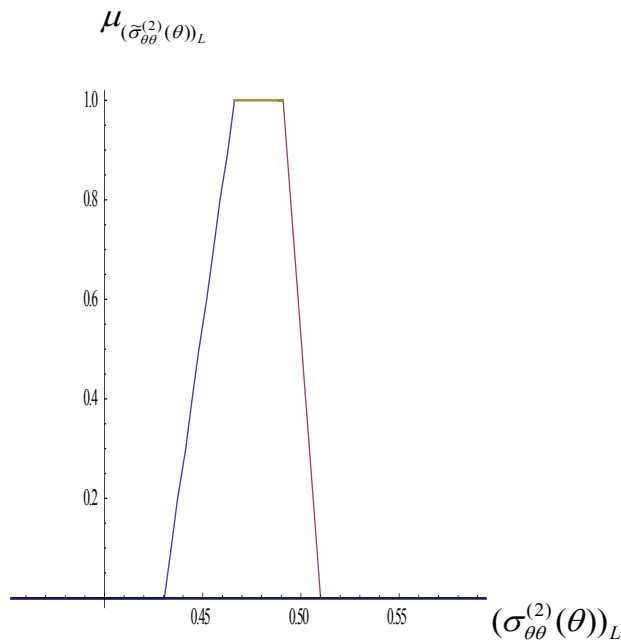


Рис. 3.17. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ при $\theta = 45^\circ$.

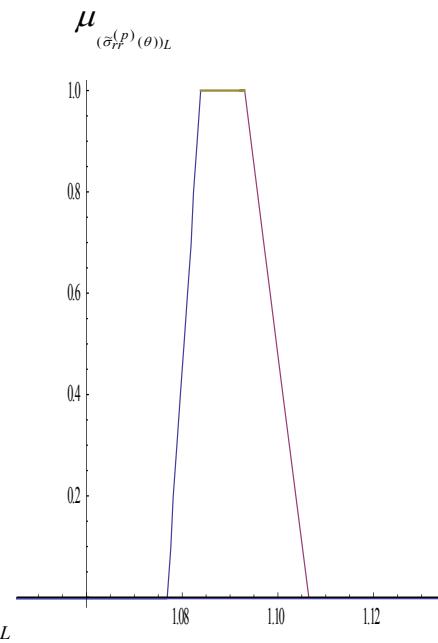


Рис. 3.18. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{rr}^{(p)}(\theta))_L$ при $\theta = 88^\circ$.

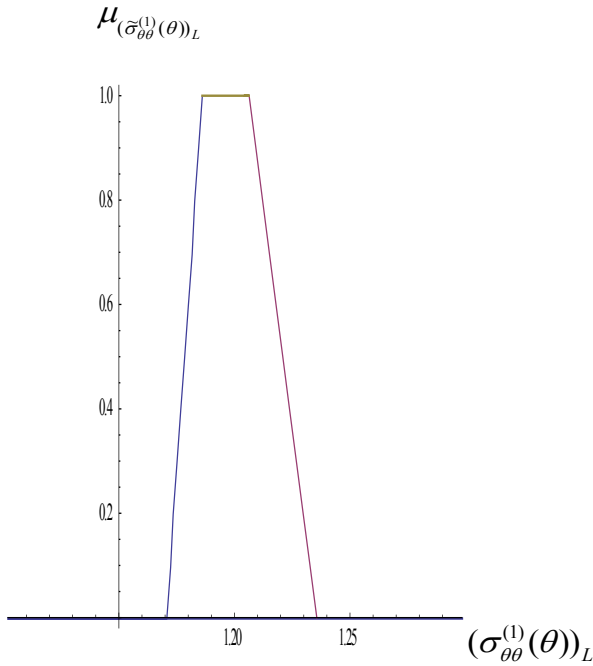


Рис. 3.19. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta))_L$ при $\theta = 88^\circ$.

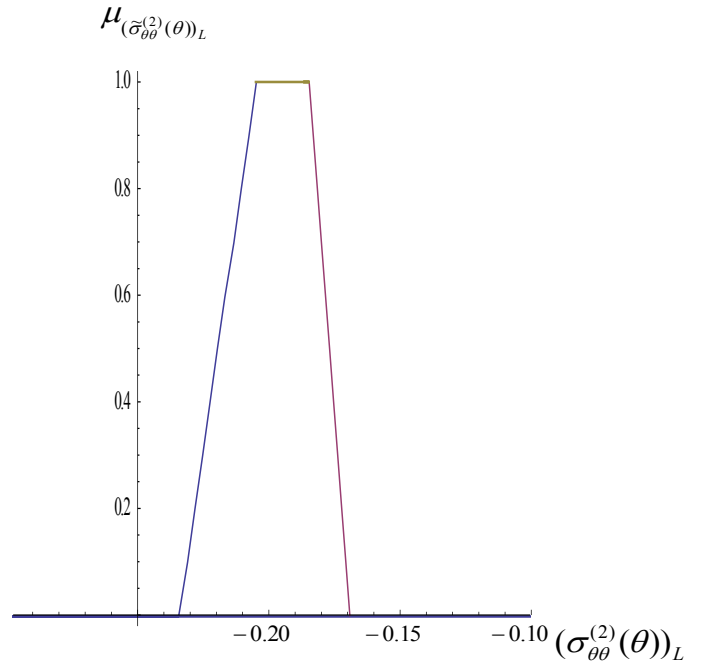


Рис. 3.20. Профиль функции принадлежности для $(\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)}(\theta))_L$ при $\theta = 88^\circ$.

3.3. Нечетко-множественный метод учета разбросов исходных параметров в задаче о двухстороннем растяжении пластины с впаянной жесткой круговой шайбой

В представленных в подразделе исследованиях подход к оцениванию неопределенности полей концентрации механических напряжений распространяется на задачу учета разброса исходных параметров при расчетах напряжений в изотропной пластине с подкрепленным жесткой круговой шайбой круговым отверстием при двухстороннем равномерном растяжении. Согласно представленному в работе [156] решению задачи в данной постановке, поля механических напряжений во внешности недеформируемого включения во введенных в пластине полярных координатах (r, θ) с полюсом в центре отверстия описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = F_{rr}(p_1, p_2, \mathcal{G}, R, r, \theta) = & ((p_1 + p_2)/2)(1 - (R^2/r^2)((1 - \mathcal{G})/2)) + \\ & + ((p_1 - p_2)/2)(1 + 4\mathcal{G}^{-1}(R^2/r^2) - 3\mathcal{G}^{-1}(R^4/r^4))\cos 2\theta, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= F_{\theta\theta}(p_1, p_2, \mathcal{G}, R, r, \theta) = ((p_1 + p_2)/2)(1 + (R^2/r^2))(1 - \mathcal{G}/2) - \\ &\quad - ((p_1 - p_2)/2)(1 - 2\mathcal{G}^{-1}(R^2/r^2) + 3\mathcal{G}^{-1}(R^4/r^4))\cos 2\theta, \\ \sigma_{r\theta} &= F_{r\theta}(p_1, p_2, \mathcal{G}, R, r, \theta) = \\ &= ((p_2 - p_1)/2)(1 - 2\mathcal{G}^{-1}(R^2/r^2) + 3\mathcal{G}^{-1}(R^4/r^4))\sin 2\theta,\end{aligned}$$

где p_1, p_2 – параметры интенсивностей растягивающих усилий; $\mathcal{G} = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu)$; λ, μ – параметры Ламе материала пластины; R – радиус подкрепленного отверстия.

В рамках предположения о существовании разбросов в значениях исходных параметров задачи $p_1, p_2, \lambda, \mu, R$ принимается гипотеза об эффективном описании указанных факторов неопределенности путем введения их описаний в виде трапецеидальных нормальных нечетких интервалов $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{R}$ с кортежами реперных точек разложениями по множествам α – уровня:

$$\begin{aligned}\tilde{p}_j &= (p_{j1}, p_{j2}, p_{j3}, p_{j4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{p}_{j\alpha}, \bar{p}_{j\alpha}], \underline{p}_{j\alpha} = (1 - \alpha)p_{j1} + \alpha p_{j2}, \bar{p}_{j\alpha} = \alpha p_{j3} + (1 - \alpha)p_{j4}; \\ \tilde{\lambda} &= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \underline{\lambda}_\alpha = (1 - \alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \bar{\lambda}_\alpha = \alpha\lambda_3 + (1 - \alpha)\lambda_4; \\ \tilde{\mu} &= (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \underline{\mu}_\alpha = (1 - \alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \bar{\mu}_\alpha = \alpha\mu_3 + (1 - \alpha)\mu_4; \\ \tilde{R} &= (R_1, R_2, R_3, R_4). \tilde{R} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \underline{R}_\alpha = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4.\end{aligned}$$

В этом случае параметр \mathcal{G} также имеет нечетко-интервальный аналог $\tilde{\mathcal{G}}$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}} &= (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4) = \\ &= ((\lambda_1 + 3\mu_1)/(\lambda_4 + \mu_4), (\lambda_2 + 3\mu_2)/(\lambda_3 + \mu_3), (\lambda_3 + 3\mu_3)/(\lambda_2 + \mu_2), (\lambda_4 + 3\mu_4)/(\lambda_1 + \mu_1)). \\ \tilde{\mathcal{G}} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mathcal{G}}_\alpha, \bar{\mathcal{G}}_\alpha], \underline{\mathcal{G}}_\alpha = (1 - \alpha)\mathcal{G}_1 + \alpha\mathcal{G}_2, \bar{\mathcal{G}}_\alpha = \alpha\mathcal{G}_3 + (1 - \alpha)\mathcal{G}_4.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Процесс получения двухпараметрических нечетко-множественных оценок $\tilde{\sigma}_{rr}(r, \theta)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(r, \theta)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}(r, \theta)$ реализуется путем перехода к нечетко-интервальным аргументам в функциональных зависимостях (3.20) на основе применения модифицированной α – уровневой формы эвристического принципа обобщения, в результате чего для искомым нечетко-множественных характеристик записываются представления вида

$$\tilde{\sigma}_{mn}(r, \theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{mn\alpha}(r, \theta), \overline{\sigma}_{mn\alpha}(r, \theta)] \quad (mn = rr, \theta\theta, r\theta), \quad (3.22)$$

$$\underline{\sigma}_{mn\alpha}(r, \theta) = \inf_{\substack{p_j \in [\underline{p}_{j\alpha}, \overline{p}_{j\alpha}] \\ \vartheta \in [\underline{\vartheta}_\alpha, \overline{\vartheta}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha]}} \{F_{mn}(p_1, p_2, \vartheta, R, r, \theta)\}, \quad \overline{\sigma}_{mn\alpha}(r, \theta) = \sup_{\substack{p_j \in [\underline{p}_{j\alpha}, \overline{p}_{j\alpha}] \\ \vartheta \in [\underline{\vartheta}_\alpha, \overline{\vartheta}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha]}} \{F_{mn}(p_1, p_2, \vartheta, R, r, \theta)\}.$$

Пример численной реализации описываемой методики представляется для случая задания неопределенных исходных параметров в виде

$$\tilde{p}_1 = (94p_*, 99p_*, 101p_*, 103p_*), \quad \tilde{p}_2 = (196p_*, 198p_*, 200p_*, 203p_*), \quad p_* = 10^2 [\text{н/м}] \quad (3.23)$$

$$\tilde{\lambda} = (2.95c_*, 2.99c_*, 3.01c_*, 3.06c_*), \quad \tilde{\mu} = (0.97c_*, 0.99c_*, 1.02c_*, 1.04c_*), \quad c_* = 10^{10} [\text{Па}];$$

а также предположения о точном значении параметра $R = 0.1R_*$, $R_* = 1[\text{м}]$. Рассчитываемые на основе соотношений (3.22) нечетко-множественные параметрические характеристики $\tilde{\sigma}_{rr}(0.1, \theta)$, $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(0.1, \theta)$, $\tilde{\sigma}_{r\theta}(0.1, \theta)$ соответственно описываются на рис. 3.21 – 3.23. Внешние линии на этих распределениях соответствуют уровням принадлежности $\mu = 0$, то есть ограничивают интервалы носителей $\tilde{\sigma}_{mn}(0.1, \theta)$, а внутренние отвечают уровням $\mu = 1$ и ограничивают модальные диапазоны наиболее достоверных значений $\sigma_{mn}(0.1, \theta)$ при рассматриваемых разбросах исходных параметров.

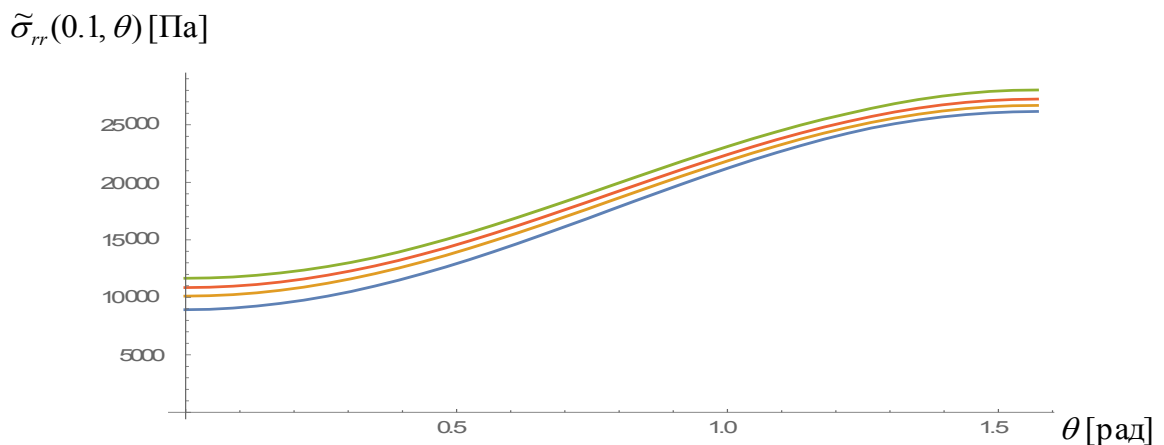


Рис. 3.21. Параметрические распределения показателей принадлежности для $\tilde{\sigma}_{rr}(0.1, \theta)$

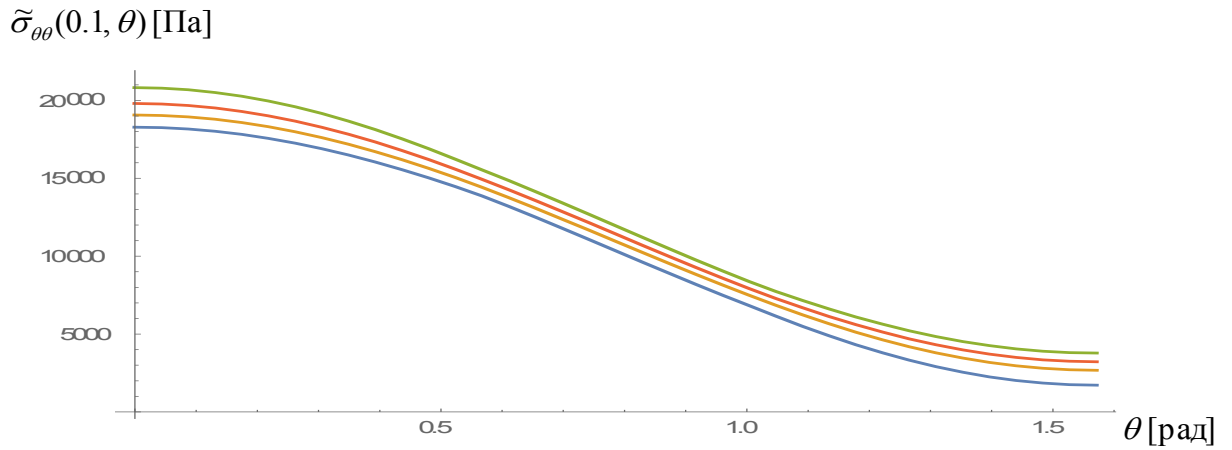


Рис. 3.22. Параметрические распределения показателей принадлежности для $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(0.1, \theta)$

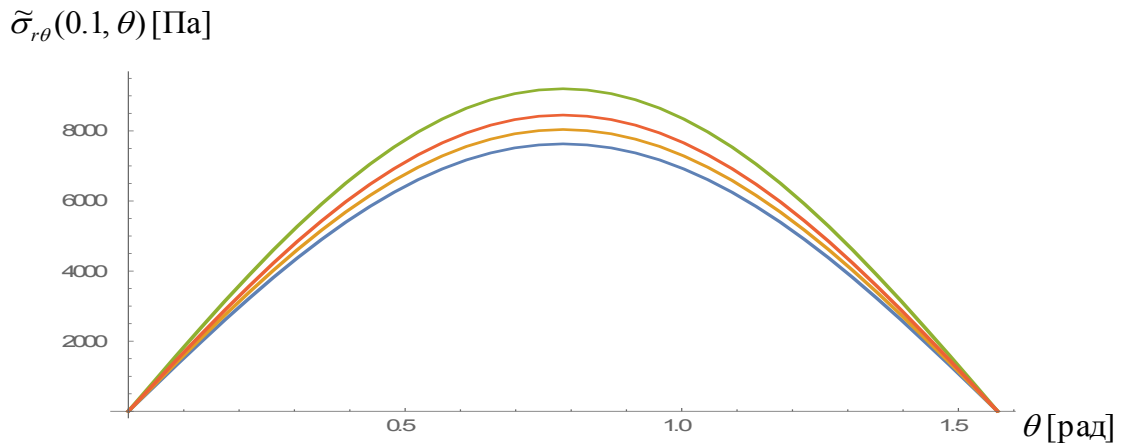


Рис. 3.23. Параметрические распределения показателей принадлежности для $\tilde{\sigma}_{r\theta}(0.1, \theta)$

3.4. Анализ нечеткой модели концентрации механических напряжений в тонких пластинах с многоугольными отверстиями неопределенной угловой кривизны

К важным факторам, обуславливающим неопределенности в описании концентрации механических напряжений вблизи отверстий многоугольной формы с закругленными вершинами в растягиваемых тонких пластинах относятся неконтрастные показатели кривизны контуров отверстий в угловых точках. В этой связи, исследования данного подраздела посвящены вопросам моделирования учета влияния нечеткости в описаниях формы контуров

многоугольных отверстий в растягиваемых тонких пластинах на эндогенные характеристики концентрации контурных механических напряжений и, прежде всего, оценкам влияния кривизны в закругленных угловых точках.

Одним из численно-аналитических подходов, применяемых для исследования феномена концентрации механических напряжений около многоугольных отверстий в тонких изотропных пластинах, являются методы теории функций комплексного переменного (методы комплексных потенциалов) [138–139, 157, 211, 325–326, 334]. При этом, к числу эффективных вариантов метода комплексных потенциалов, разработанных для анализа концентрации напряжений в окрестности угловых точек отверстий полигональной формы, относится методика, базирующаяся на использовании функций конформного отображения $z = \omega(\zeta)$ внешности рассматриваемого многоугольного отверстия в комплексной области $z = x_1 + ix_2$. на внутренность кругового контура единичного радиуса во вспомогательной комплексной плоскости $\zeta = r \exp(i\theta)$. Эффективные расчетные соотношения данной методики получены в работах [211, 326, 334] при использовании функций конформного отображения, являющихся простыми по структуре степенными аппроксимациями интегралов Кристоффеля-Шварца. Такие функции конформного отображения описывают геометрию полигональных отверстий с закруглениями в угловых точках, имеющими [211, 334] кривизну

$$k(\theta) = |\omega'(\sigma)|^{-3} \operatorname{Re}\{\overline{\omega'(\sigma)}[\sigma\omega''(\sigma) + \omega'(\sigma)]\}. \quad (3.24)$$

В выражении (3.24) $\sigma = \exp(i\theta)$ – значения комплексных переменной ζ на круговом контуре единичного радиуса. Так, при исследовании концентрации механических напряжений около квадратных отверстий с центрами в начале комплексной плоскости z и угловыми точками, лежащими на диагоналях квадрантов, используются приближенные функции конформного отображения

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta^{-1} - m\zeta^3), \quad (3.25)$$

с применением которых контуры закругленных в угловых точках $\theta_n^{(c)} = \pi/4 + (n-1)\pi/2$ ($n = \overline{1,4}$) квадратных отверстий с изменяющейся вдоль границ кривизной

$$k(\theta) = (1 - 6m \cdot \cos 4\theta - 27m^2)(1 + 6m \cdot \cos 4\theta + 9m^2)^{-3/2} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (3.26)$$

отображаются на контур круга единичного радиуса в области изменения комплексной переменной ζ . Кривизны k_c такого контура в угловых точках $\theta_n^{(c)}$ определяются выражением

$$k_c = (1 + 6m - 27m^2)(1 - 6m + 9m^2)^{-3/2}, \quad (3.27)$$

а значение параметра m при задании требуемой кривизны контура k_c в угловых точках отверстия определяется из кубического уравнения

$$27k_c m^3 - 27(k_c + 1)m^2 + (9k_c + 6)m + (1 - k_c) = 0 \quad (3.28)$$

и описывается следующим из формулы Кардано выражением

$$m = -(\alpha + \beta)/2 + i\sqrt{3}(\alpha - \beta)/2 + (k + 1)/(3k), \quad (3.29)$$

$$\alpha = (-q/2 + \delta^{1/2})^{1/3}, \quad \beta = (-q/2 - \delta^{1/2})^{1/3}, \quad \delta = (p/3)^3 + (q/2)^2,$$

$$p = -(4k + 3)/(9k^2), \quad q = -2(k + 1)^3/k^3 + (9k^2 + 15k + 6)/(81k^2) + (1 - k)/(27k).$$

Вид контура квадратного отверстия, который описывается при помощи конформного отображения (3.25) и имеет в закругленных вершинах кривизну $k = 4.5$ ($m = 0.44$), представлен на рис. 3.24

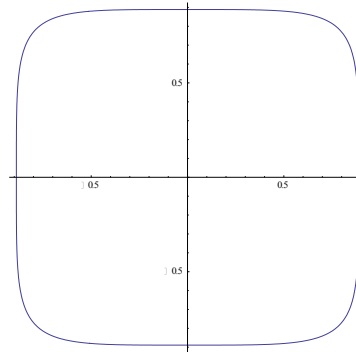


Рис. 3.24. Форма контура квадратного отверстия, описываемая с использованием отображающей функции (3.25) при $m = 0.44$.

Полученное методом интегралов Коши выражение для комплексного потенциала $\varphi(\zeta)$ при растяжении равномерными усилиями интенсивности P тонкой изотропной пластинки с отверстием рассматриваемой формы вдоль направления Ox_1 [211, 334] имеет вид

$$\varphi(\zeta) = (PR/4)(\zeta^{-1} + (2/(m+1))\zeta + m\zeta^3). \quad (3.30)$$

С использованием выражения (3.30) и формулы для контурных напряжений

$$\sigma_{\theta\theta} = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(\sigma)/\omega'(\sigma)] \quad (3.31)$$

записывается представление для функции распределения нормированных контурных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль границы отверстия

$$F_1(k, \theta) = (\sigma_{\theta\theta}/P) = -((3m+1)(3m-1) + (2(3m+1)/(m+1))\cos 2\theta)/(1+9m^2+6m\cos 4\theta). \quad (3.32)$$

Из формулы (3.32), в частности, следует соотношение связи показателя концентрации напряжений $(\sigma_{\theta\theta}^*/P)$ в угловых точках контура $\theta_n^{(c)}$ от параметра k_c кривизны его закругления

$$(\sigma_{\theta\theta}^*/P) = F_{1c}(k_c), \quad F_{1c}(k_c) = (3m+1)/(1-3m). \quad (3.33)$$

Полигональное отверстие в представленной на рис. 3.25 форме равносidedного треугольника описывается с использованием конформно отображающей функции [211, 334]

$$z = \omega(\zeta) = R(\zeta^{-1} - m\zeta^2) \quad (3.34)$$

и имеет в случае $m = -0.25$ кривизну в закругленных вершинах $k_c = 8$. Соответственно изменение кривизны вдоль контура отверстия такой формы описывается соотношением

$$k(\theta) = (1 - 2m \cdot \cos 3\theta - 8m^2)(1 + 4m \cdot \cos 3\theta + 4m^2)^{-3/2} \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.35)$$

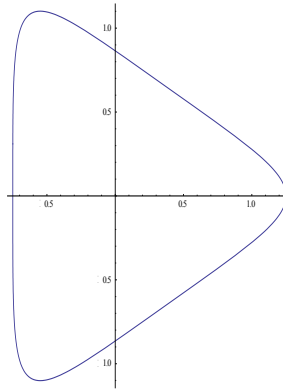


Рис. 3.25. Форма контура равносidedного треугольного отверстия, описываемая с использованием отображающей функции (3.34) при $m = -0.25$.

Кривизны задаваемого отображением (3.34) контура в угловых точках $\theta_n^{(c)} = 2n\pi/3$ ($n = \overline{0,2}$) имеют значения

$$k_c = (1 - 4m)/(1 + 2m)^2, \quad (3.36)$$

а значение параметра m при требуемой заданной кривизне контура k_c в угловых точках отверстия определяется по формуле

$$m = ((3k_c + 1)^{1/2} - k_c - 1)/(2k_c). \quad (3.37)$$

Выражение для комплексного потенциала $\varphi(\zeta)$ в случае растяжения равномерными усилиями интенсивности P тонкой изотропной пластинки с отверстием рассматриваемой формы вдоль координатного направления Ox_1 имеет вид

$$\varphi(\zeta) = (PR/4)(\zeta^{-1} + 2\zeta + (4m + 1)\zeta^2). \quad (3.38)$$

С использованием (3.31), (3.34), (3.38) записывается представление для функции распределения нормированных контурных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ вдоль границы треугольного отверстия с закруглениями в вершинах

$$F_2(k, \theta) = (\sigma_{\theta\theta} / P) = \quad (3.39)$$

$$= (1 - 2m(8m + 2) - 4m \cos \theta - 2 \cos 2\theta - (6m + 2) \cos 3\theta) / (1 + 4m^2 + 4m \cos 3\theta)$$

Соответственно соотношение зависимости показателя концентрации напряжений $(\sigma_{\theta\theta}^* / P)$ в угловой точке $\theta^{(c)} = 0$ контура рассматриваемого отверстия от параметра k_c кривизны закругления имеет вид

$$(\sigma_{\theta\theta}^* / P) = F_{2c}(k_c), \quad F_{2c}(k_c) = -(16m^2 + 14m + 3)/(2m + 1)^2. \quad (3.40)$$

Для решения задачи получения оценок влияния разбросов экзогенного параметра кривизны контура отверстия в угловой точке на соответствующие показатели максимальной концентрации напряжений вводится предположение о введении представления \tilde{k}_c неконтрастного экзогенного параметра кривизны k_c в виде нормального трапецеидального нечеткого интервала с кортежем реперных точек и разложением по множествам α -срезов

$$\tilde{k}_c = (k_1, k_2, k_3, k_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [k_\alpha, \bar{k}_\alpha], \quad k_\alpha = (1 - \alpha)k_1 + \alpha k_2, \quad \bar{k}_\alpha = \alpha k_3 + (1 - \alpha)k_4. \quad (3.41)$$

При этом для нечеткой оценки показателя концентрации напряжений в точке контура отверстия, соответствующей значению угловой координаты θ , записывается представление

$$\tilde{F}_j(\tilde{k}, \theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [F_{j\alpha}(\theta), \bar{F}_{j\alpha}(\theta)], \quad (3.42)$$

$$\underline{F}_{j\alpha}(\theta) = \inf_{k \in [(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, (1-\alpha)k_4 + \alpha k_3]} F_j(k, \theta), \quad \bar{F}_{j\alpha}(\theta) = \sup_{k \in [(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, (1-\alpha)k_4 + \alpha k_3]} F_j(k, \theta).$$

В угловых точках контура

$$\tilde{F}_{jc}(\tilde{k}_c) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{jc\alpha}, \bar{F}_{jc\alpha}], \quad (3.43)$$

$$\underline{F}_{jc\alpha} = \inf_{k_c \in [(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, (1-\alpha)k_4 + \alpha k_3]} F_{jc}(k_c), \quad \bar{F}_{jc\alpha} = \sup_{k_c \in [(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, (1-\alpha)k_4 + \alpha k_3]} F_{jc}(k_c).$$

В качестве примера числовой реализации описанного алгоритма рассмотрен случай получения нечеткой оценки для показателя концентрации напряжений при задании показателя кривизны контура квадратного отверстия в угловой точке нечетким интервалом с кортежем реперных точек $\tilde{k}_c : (9.4; 9.9; 10.2; 10.5)$. Результаты расчета функции принадлежности для нечетко-множественного показателя \tilde{F}_{1c} концентрации напряжений в угловой точке квадратного отверстия с неопределенной кривизной закругления для рассматриваемого варианта задания \tilde{k}_c представлены на рис. 3.26. Аналогичные результаты для нечетко-множественной характеристики показателя \tilde{F}_{2c} концентрации напряжений в угловой точке $\theta_0^{(c)}$ треугольного отверстия с неопределенной кривизной закругления, которые получены с использованием соотношений (7), (12), (23), (24) для варианта задания нечеткого параметра кривизны $\tilde{k}_c : (7.4; 7.9; 8.2; 8.5)$, представлены на рис. 3.27.

Представленные распределения свидетельствуют о том, что степени неопределенности показателей концентрации контурных напряжений в скругленных угловых точках рассматриваемых отверстий имеют более низкий относительный уровень по сравнению с показателями разбросов для экзогенных параметров кривизны контура в угловых точках. Полученные оценки позволяют сделать обоснованные выводы о диапазонах наиболее достоверных отклонений в

значениях анализируемых показателей концентрации напряжений при рассматриваемых разбросах кривизны закругленных вершин отверстий, а также о границах возможных значений показателей концентрации на минимальном уровне уверенности.

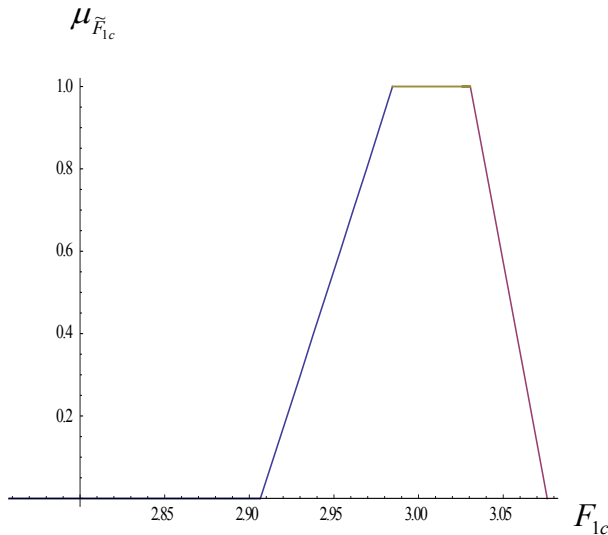


Рис. 3.26. Функция принадлежности для \tilde{F}_{1c} .

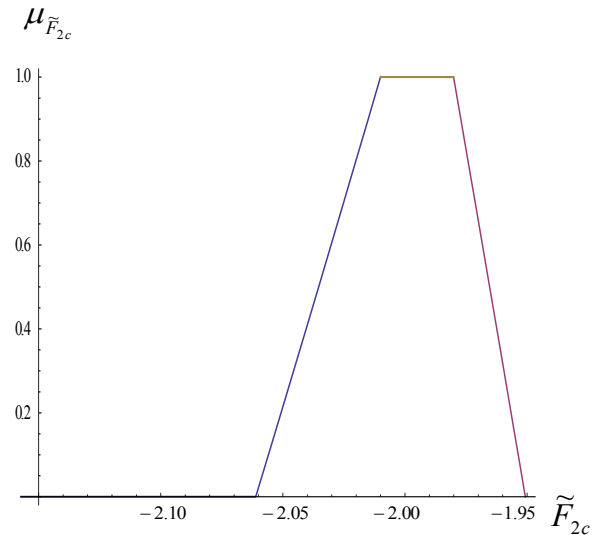


Рис. 3.27. Функция принадлежности для \tilde{F}_{2c} .

3.5. Электроупругое деформирование ослабленных отверстиями пьезоактивных пластин с неопределенными параметрами

В данном подразделе работы дано обобщение численно-аналитического нечетко-множественного метода учета разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров применительно к модели определения коэффициентов концентрации характеристик электроупругого деформирования на контуре эллиптического отверстия в тонкой пьезоэлектрической пластине из материала класса бтт гексагональной системы в случае ее обобщенного плоского напряженного состояния при сжатии-растяжении либо при задании порождающих сжатие-растяжение внешних воздействий электрической природы. Метод базируется на построенном в работах [119, 152] аналитическом решении задачи данного типа в классической детерминистической постановке и переходе в этом решении к нечетко-

множественным аргументам с применением эвристического принципа обобщения.

Рассматривается тонкая пластина неограниченных размеров из линейно поляризованной пьезокерамики, электромеханические свойства которой характеризуются коэффициентами деформации при постоянной индукции s_{ij}^D ; пьезомодулями при постоянных напряжениях и индукции $g_{ki}^{\sigma,D}$; коэффициентами диэлектрической восприимчивости при постоянных напряжениях β_{kl}^{σ} . В последующем изложении верхние индексы у перечисленных величин, характеризующие особенности измерения соответствующих постоянных, опускаются. В срединной плоскости пластины введены прямоугольные координаты Ox_1x_2 . Пластина содержит эллиптическое отверстие с центром в точке O , полуоси которого имеют значения a, b и ориентированы вдоль координатных осей Ox_j . Ось поляризации керамического материала пластины ориентирована вдоль Ox_2 . В этом случае свойства пластины при обобщенном плоском напряженном состоянии описываются подмножествами ненулевых физико-механических характеристик $\{s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}\}; \{g_{21}, g_{22}, g_{16}\}; \{\beta_{11}, \beta_{22}\}$. На контуре отверстия задаются однородные граничные условия для силовых и электрических характеристик. Пластина подвержена внешним воздействиям в виде прилагаемых на бесконечности равномерных растягивающих усилий $\sigma_{22}^{(\infty)} = p$; также может быть исследован случай задания на бесконечности постоянной функции напряженности электрического поля $E_2^{(\infty)} = e$.

В рамках описываемого в [119, 152] метода потенциалов обобщенных комплексных переменных, исследуемые характеристики деформационного механического и электрического полей в точках контура Γ_* эллиптического отверстия, имеющего во вводимых в плоскости Ox_1x_2 полярных координатах $Or\theta$ параметрическое описание $(x_1)_{\Gamma_*} = a \cdot \cos \theta$, $(x_2)_{\Gamma_*} = a \cdot \sin \theta$ $\theta \in [0, 2\pi]$, рассчитываются с использованием следующих представлений для характеристик электромеханического поля:

$$D_1(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{7k} \Phi'_k(z_k), \quad D_2(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{8k} \Phi'_k(z_k); \quad (3.44)$$

$$E_1(x_1, x_2) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi'_k(z_k), \quad E_2(x_1, x_2) = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \mu_k \gamma_k \Phi'_k(z_k);$$

$$u_1(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 p_k \Phi_k(z_k), \quad u_2(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 q_k \Phi_k(z_k); \quad \varphi(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \gamma_k \Phi_k(z_k);$$

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{1k} \Phi'_k(z_k), \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{2k} \Phi'_k(z_k), \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \lambda_{6k} \Phi'_k(z_k).$$

В представлениях (3.44)

$$\Phi_k(z_k) = \Gamma_k z_k + ((a_{k1} - \Gamma_k R_k m_k)/(2R_k m_k))(z_k \mp (z_k^2 - 4R_k m_k)^{1/2}), \quad (3.45)$$

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + ((a_{k1} - \Gamma_k R_k m_k)/(2R_k m_k))(1 \pm z_k (z_k^2 - 4R_k m_k)^{-1/2}),$$

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2, \quad R_k = (a - i\mu_k b)/2, \quad m_k = (a + i\mu_k b)/(a - i\mu_k b);$$

$$a_{11} = -\bar{r}_1 \bar{R}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{s}_2 \bar{R}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{e}_3 \bar{R}_3 \bar{\Gamma}_3, \quad a_{21} = -\bar{r}_2 \bar{R}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{s}_3 \bar{R}_3 \bar{\Gamma}_3 - \bar{e}_1 \bar{R}_1 \bar{\Gamma}_1,$$

$$a_{31} = -\bar{r}_3 \bar{R}_3 \bar{\Gamma}_3 - \bar{s}_1 \bar{R}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{e}_2 \bar{R}_2 \bar{\Gamma}_2;$$

$$\bar{r}_k = (\bar{\lambda}_{6k} M_{6k} + \bar{\lambda}_{2k} M_{2k} + \bar{\lambda}_{8k} M_{8k})/\Delta_k, \quad \bar{s}_1 = (\bar{\lambda}_{61} M_{63} + \bar{\lambda}_{21} M_{23} + \bar{\lambda}_{81} M_{83})/\Delta_3,$$

$$\bar{s}_2 = (\bar{\lambda}_{62} M_{61} + \bar{\lambda}_{22} M_{21} + \bar{\lambda}_{82} M_{81})/\Delta_1, \quad \bar{s}_3 = (\bar{\lambda}_{63} M_{62} + \bar{\lambda}_{23} M_{22} + \bar{\lambda}_{83} M_{82})/\Delta_2;$$

$$\bar{e}_1 = (\bar{\lambda}_{61} M_{62} + \bar{\lambda}_{21} M_{22} + \bar{\lambda}_{81} M_{82})/\Delta_2, \quad \bar{e}_2 = (\bar{\lambda}_{62} M_{63} + \bar{\lambda}_{22} M_{23} + \bar{\lambda}_{82} M_{83})/\Delta_3,$$

$$\bar{e}_3 = (\bar{\lambda}_{63} M_{61} + \bar{\lambda}_{23} M_{21} + \bar{\lambda}_{83} M_{81})/\Delta_1; \quad \Delta_k = \lambda_{6k} M_{6k} + \lambda_{2k} M_{2k} + \lambda_{8k} M_{8k};$$

$$M_{21} = \lambda_{63} \lambda_{82} - \lambda_{62} \lambda_{83}, \quad M_{22} = \lambda_{61} \lambda_{83} - \lambda_{63} \lambda_{81}, \quad M_{23} = \lambda_{62} \lambda_{81} - \lambda_{61} \lambda_{82};$$

$$M_{61} = \lambda_{83} \lambda_{22} - \lambda_{82} \lambda_{23}, \quad M_{62} = \lambda_{81} \lambda_{23} - \lambda_{83} \lambda_{21}, \quad M_{63} = \lambda_{82} \lambda_{21} - \lambda_{81} \lambda_{22};$$

$$M_{81} = \lambda_{23} \lambda_{62} - \lambda_{22} \lambda_{63}, \quad M_{82} = \lambda_{21} \lambda_{63} - \lambda_{23} \lambda_{61}, \quad M_{83} = \lambda_{22} \lambda_{61} - \lambda_{21} \lambda_{62};$$

$$\lambda_{1k} = \mu_k^2, \quad \lambda_{2k} = 1, \quad \lambda_{6k} = -\mu_k, \quad \lambda_{7k} = \nu_k \mu_k, \quad \lambda_{8k} = -\nu_k;$$

$$p_k = s_{11} \mu_k^2 - g_{21} \nu_k + s_{12}; \quad q_k = s_{12} \mu_k + s_{22} \mu_k^{-1} - g_{22} \nu_k \mu_k^{-1}; \quad \gamma_k = -g_{16} \mu_k - \beta_{11} \nu_k \mu_k;$$

μ_k ($k = \overline{1, 3}$) – различные по модулю корни бикубического уравнения

$$L_4(\mu)L_2(\mu) - L_3^2(\mu) = 0, \quad (3.46)$$

$$L_4(\mu) = s_{11} \mu^4 + (2s_{12} + s_{66}) \mu^2 + s_{22}, \quad L_2(\mu) = -\beta_{11} \mu^2 - \beta_{22}, \quad L_3(\mu) = -((g_{21} + g_{16}) \mu^2 + g_{22});$$

$$\nu_k = -L_3(\mu_k)/L_2(\mu_k).$$

Величины Γ_k в рассматриваемом случае определяются из системы линейных алгебраических уравнений, записываемой в комплексной форме:

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 (\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{6k}, -\gamma_k, -\mu_k \gamma_k, q_k - \mu_k p_k) \Gamma_k = (0, p, 0, 0, e, 0). \quad (3.47)$$

Непосредственно исследуемой в рассматриваемой модели характеристикой является контурное распределение окружного напряжения $(\sigma_{ss}(\theta))_{\Gamma_*}$ вдоль границы отверстия, задаваемое неявной функциональной зависимостью

$$\begin{aligned} (\sigma_{ss}(\theta))_{\Gamma_*} &= F_{ss}(\theta, p, e, a, b, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22}) = \\ &= (1/2)[(\sigma_{11}(\theta) + \sigma_{22}(\theta))_{\Gamma_*} + (\sigma_{22}(\theta) - \sigma_{11}(\theta))_{\Gamma_*} \Phi_1(\theta) - 2(\sigma_{12}(\theta))_{\Gamma_*} \Phi_2(\theta)]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Эта функциональная зависимость записывается с использованием представлений (3.44) – (3.46), а также выражений

$$\begin{aligned} (z_k(\theta))_{\Gamma_*} &= a \cdot \cos \theta + \mu_k b \cdot \sin \theta, \quad \Phi_1(\theta) = ((\varepsilon_*^2 + 1) \cos 2\theta + 2\varepsilon_*) (\varepsilon_*^2 + 2\varepsilon_* \cos 2\theta + 1)^{-1}, \\ \Phi_2(\theta) &= ((\varepsilon_*^2 + 1) \sin 2\theta) (\varepsilon_*^2 + 2\varepsilon_* \cos 2\theta + 1)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

В рамках представляемой методики в самом общем случае для полного набора аргументов функциональной зависимости (3.48) реализуется переход к нечетко-интервальным представлениям $\tilde{p}, \tilde{e}, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{22}, \tilde{s}_{12}, \tilde{s}_{66}, \tilde{g}_{21}, \tilde{g}_{22}, \tilde{g}_{16}, \tilde{\beta}_{11}, \tilde{\beta}_{22}$. Переход к нечетко-множественным представлениям на основе того или иного алгоритма фаззификации осуществляется только для параметров с существенной мерой неопределенности. Принимается концепция эффективного приближения неопределенных параметров с разбросами значений в рассматриваемой модели нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами, для которых, вводятся представления кортежами реперных значений и суперпозициями множеств α -уровня:

$$\tilde{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{p}_\alpha, \bar{p}_\alpha], \quad \underline{p}_\alpha = (1-\alpha)p_1 + \alpha p_2, \quad \bar{p}_\alpha = \alpha p_3 + (1-\alpha)p_4; \dots; \quad (3.50)$$

$$\tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \quad \underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \bar{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4;$$

$$\tilde{s}_{11} = (s_{111}, s_{112}, s_{113}, s_{114}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{s}_{11\alpha}, \bar{s}_{11\alpha}], \quad \underline{s}_{11\alpha} = (1-\alpha)s_{111} + \alpha s_{112}, \quad \bar{s}_{11\alpha} = \alpha s_{113} + (1-\alpha)s_{114}; \dots;$$

$$\tilde{s}_{66} = (s_{661}, s_{662}, s_{663}, s_{664}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{s}_{66\alpha}, \bar{s}_{66\alpha}], \quad \underline{s}_{66\alpha} = (1-\alpha)s_{661} + \alpha s_{662}, \quad \bar{s}_{66\alpha} = \alpha s_{663} + (1-\alpha)s_{664};$$

$$\tilde{g}_{21} = (g_{211}, g_{212}, g_{213}, g_{214}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [g_{21\alpha}, \bar{g}_{21\alpha}], \underline{g}_{21\alpha} = (1-\alpha)g_{211} + \alpha g_{212}, \bar{g}_{21\alpha} = \alpha g_{213} + (1-\alpha)g_{214};$$

$$\tilde{g}_{16} = (g_{161}, g_{162}, g_{163}, g_{164}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [g_{16\alpha}, \bar{g}_{16\alpha}], \underline{g}_{16\alpha} = (1-\alpha)g_{161} + \alpha g_{162}, \bar{g}_{16\alpha} = \alpha g_{163} + (1-\alpha)g_{164};$$

$$\tilde{\beta}_{11} = (\beta_{111}, \beta_{112}, \beta_{113}, \beta_{114}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\beta_{11\alpha}, \bar{\beta}_{11\alpha}], \underline{\beta}_{11\alpha} = (1-\alpha)\beta_{111} + \alpha\beta_{112}, \bar{\beta}_{11\alpha} = \alpha\beta_{113} + (1-\alpha)\beta_{114};$$

$$\tilde{\beta}_{22} = (\beta_{221}, \beta_{222}, \beta_{223}, \beta_{224}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\beta_{22\alpha}, \bar{\beta}_{22\alpha}], \underline{\beta}_{22\alpha} = (1-\alpha)\beta_{221} + \alpha\beta_{222}, \bar{\beta}_{22\alpha} = \alpha\beta_{223} + (1-\alpha)\beta_{224}.$$

При этом эндогенные нечетко-множественные параметры модели описываются расчетными соотношениями вида

$$(\tilde{\sigma}_{ss}(\theta))_{\Gamma_*} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{\Gamma_{ss\alpha}}(\theta), \bar{\sigma}_{\Gamma_{ss\alpha}}(\theta)], \underline{\sigma}_{\Gamma_{ss\alpha}}(\theta) = \inf_{\Pi \in \Omega_\alpha} F_{ss}(\theta, \Pi), \bar{\sigma}_{\Gamma_{ss\alpha}}(\theta) = \sup_{\Pi \in \Omega_\alpha} F_{ss}(\theta, \Pi). \quad (3.51)$$

Здесь $\Pi = (p, e, a, b, s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}, g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22})$ – кортеж из тринадцати физико-механических и геометрических экзогенных параметров рассматриваемой модели; Ω_α – тринадцатимерные подмножества изменения аргументов на α -уровне

$$\Omega_\alpha = [\underline{p}_\alpha, \bar{p}_\alpha] \times [\underline{e}_\alpha, \bar{e}_\alpha] \times [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \times [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \times [\underline{s}_{11\alpha}, \bar{s}_{11\alpha}] \times \dots \times [\underline{s}_{66\alpha}, \bar{s}_{66\alpha}] \times [\underline{g}_{21\alpha}, \bar{g}_{21\alpha}] \times \dots \times [\underline{g}_{16\alpha}, \bar{g}_{16\alpha}] \times [\underline{\beta}_{11\alpha}, \bar{\beta}_{11\alpha}] \times [\underline{\beta}_{22\alpha}, \bar{\beta}_{22\alpha}]. \quad (3.52)$$

В случае принятия гипотезы о несущественности влияния разбросов для части указанных экзогенных параметров, они исключаются из множества варьируемых в соотношениях (3.51) с соответствующей модификацией вида Ω_α и учитываются в расчетных формулах со своими точными значениями. Таким образом, расчетный алгоритм, базирующийся на использовании выражения (3.51), позволяет реализовывать цели описываемого исследования.

Представляемый частный пример расчетов на основе соотношений (3.44) – (3.51) относится к случаю пластины из пьезокерамики Ceramic В [289] с круговым отверстием, которая растягивается вдоль оси Ox_2 приложенными на бесконечности равномерно распределенными усилиями, при следующих вводимых нечетко-интервальных описаниях для обладающих разбросами исходных физико-механических и геометрических параметров модели:

$$\tilde{p} = (0.96p_*, 0.99p_*, 1.0p_*, 1.05p_*), \quad \tilde{a} = \tilde{b} = (0.49l_*, 0.5l_*, 0.51l_*, 0.53l_*),$$

$$\tilde{s}_{11} = (8.13s_*, 8.26s_*, 8.30s_*, 8.55s_*), \quad \tilde{s}_{22} = (6.89s_*, 7.0s_*, 7.04s_*, 7.14s_*),$$

$$\tilde{s}_{12} = (-1.93s_*, -1.91s_*, -1.90s_*, -1.86s_*), \quad \tilde{s}_{66} = (16.76s_*, 16.93s_*, 17.1s_*, 17.44s_*)$$

$$\tilde{g}_{21} = (-5.61g_*, -5.55g_*, -5.50g_*, -5.45g_*), \quad \tilde{g}_{22} = (13.82g_*, 14.10g_*, 14.17g_*, 14.31g_*),$$

$$\tilde{g}_{16} = (20.59g_*, 21.0g_*, 21.11g_*, 21.36g_*)$$

$$\tilde{\beta}_{11} = (85.18\beta_*, 86.55\beta_*, 86.92\beta_*, 88.66\beta_*), \quad \tilde{\beta}_{22} = (92.28\beta_*, 93.69\beta_*, 94.16\beta_*, 95.57\beta_*),$$

$$p_* = 10^5 [Па], \quad l_* = 1 [м], \quad s_* = 10^{-6} [МПа]^{-1}, \quad g_* = 10^{-3} [м^2 / МКл], \quad \beta_* = 10^5 [Мн \cdot м^2 / МКл^2].$$

Результаты расчетов по оцениванию показателей концентрации $(\sigma_{ss})_A$ применительно к варианту учета разбросов в значениях механических параметров $\tilde{s}_{11}, \tilde{s}_{22}, \tilde{s}_{12}, \tilde{s}_{66}$ и задания точных значений $p = 1.0p_*$, $a = b = 0.5l_*$, $g_{21} = -5.50g_*$, $g_{22} = 14.1g_*$, $g_{16} = 21.0g_*$, $\beta_{11} = 86.92\beta_*$, $\beta_{22} = 94.16\beta_*$, представлены на рисунках 3.28, 3.29. На них соответственно изображен вид рассчитанных функций принадлежности для нечетко-множественных оценок концентрации напряжений $(\sigma_{ssp})_A = (\sigma_{ss})_A / p$, $(\sigma_{ssp})_B = (\sigma_{ss})_B / p$ в двух точках контура $A: \{x_1 = a, x_2 = 0\}$ и $B: \{x_1 = 0, x_2 = b\}$. Аналогичные зависимости представлены на рисунках 3.30, 3.31 для случая учета разбросов в значениях характеристик $g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22}$ и точных значениях параметров $p = 1.0p_*$, $a = b = 0.5l_*$, $s_{11} = 8.30s_*$, $s_{22} = 7.0s_*$, $s_{12} = -1.90s_*$, $s_{66} = 17.1s_*$.

Сопоставление рассчитанных форм функций принадлежности указывает, в частности, на снижение уровней неопределенности эндогенных характеристик для случая учета разбросов пьезомодулей деформаций и

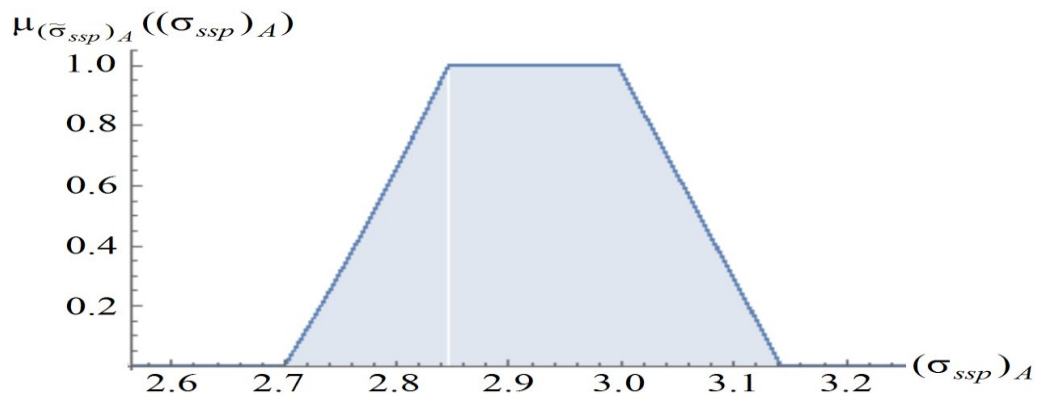


Рис. 3.28. Вид функции принадлежности $\mu_{((\sigma_{ssp})_A)}((\sigma_{ss})_A)$ в случае учета разбросов механических характеристик материала пластины.

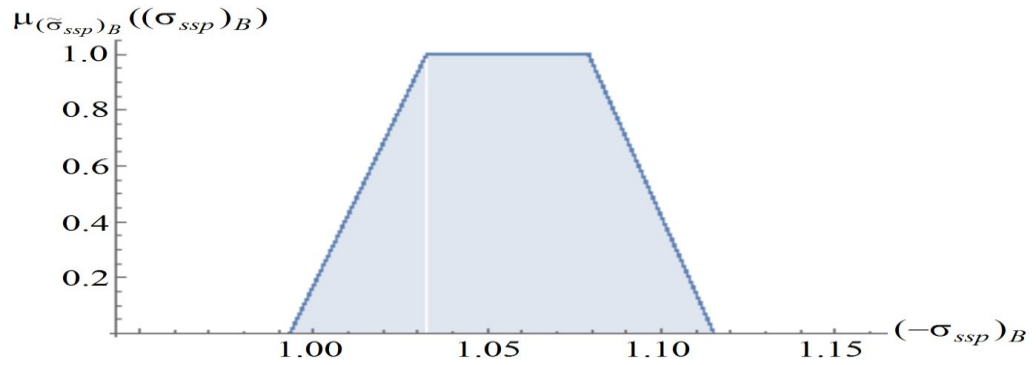


Рис. 3.29. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_B}((\sigma_{ssp})_B)$ в случае учета разбросов механических характеристик материала пластины

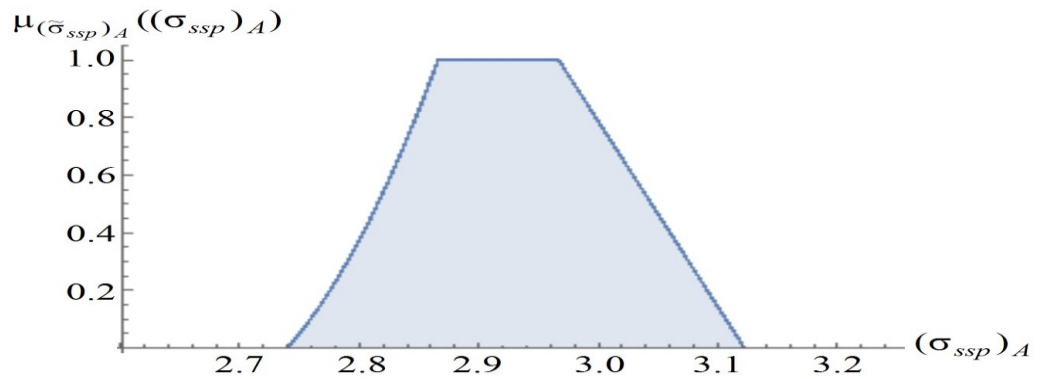


Рис. 3.30. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_A}((\sigma_{ssp})_A)$ в случае учета разбросов пьезомодулей и диэлектрических восприимчивостей

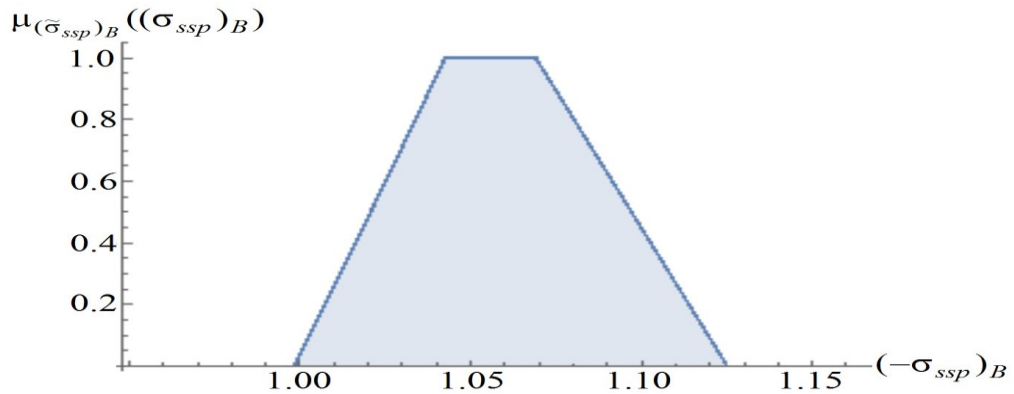


Рис. 3.31. Вид функции принадлежности $\mu_{(\tilde{\sigma}_{ssp})_B}((\sigma_{ssp})_B)$ в случае учета разбросов пьезомодулей и диэлектрических восприимчивостей

диэлектрических восприимчивостей $g_{21}, g_{22}, g_{16}, \beta_{11}, \beta_{22}$ в сравнении со случаем учета разбросов механических характеристик $s_{11}, s_{22}, s_{12}, s_{66}$. В большей мере это касается снижения интервалов разброса значений показателей концентрации на модальных интервалах, оцениваемых как наиболее достоверные.

3.6. Нечетко-множественное моделирование охватывающих пластических зон вокруг полостей и отверстий кругового и сферического очертания

При теоретическом исследовании напряженно-деформированного состояния материалов конструктивных элементов, сооружений и геомассивов в зонах около концентраторов механических напряжений в виде круговых отверстий либо туннельных цилиндрических полостей кругового сечения выделяют случаи действия высокоинтенсивных внешних нагрузжений, при которых в этих телах формируются прилегающие к концентраторам охватывающие зоны пластических деформаций [1, 14, 211–212, 217, 257, 259–260]. Модели таких деформационных полей для ряда вариантов внешних воздействий и условий текучести описываются аналитическими соотношениями, определяющими критические уровни нагружений и топологию зон пластического деформирования [211, 217, 212], и имеющими, в этой связи, важное практическое значение. Однако прикладное использование расчетных соотношений соответствующих моделей для прогнозирования механической прочности и надежности рассматриваемых конструкций может приводить к более адекватным оценкам при решении задачи учета в этих моделях неопределенности, связанной с наличием разбросов экспериментальных и технологических значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров. Для решения данной задачи применены подходы, базирующиеся на методах теории нечетки вычислений. Их особенностью является возможность их эффективного применения в тех случаях, когда исходная информация о неопределенных экзогенных параметрах не имеет строго выраженной статистической природы, не базируется на обработке частотных выборок достаточной мощности, формируется на основе субъективных экспертных заключений.

Таким образом, целью исследований в данном подразделе является получение нечетко-множественных обобщений для ряда моделей, описывающих параметры формирования охватывающих пластических зон вокруг полостей и отверстий кругового очертания при плоской деформации и обобщенном плоском напряженном состоянии.

Рассматриваемыми в работе являются три версии моделей формирования охватывающих пластических зон вокруг полостей и отверстий кругового очертания при плоской деформации изотропных геомассивов с туннельными сооружениями и обобщенном плоском напряженном состоянии тонких изотропных пластин с круговыми вырезами.

Первой из них является модель Г.П. Черепанова [211, 257], описывающая на базе критерия текучести Треска – Сен-Венана параметры границы охватывающей упругопластической области около кругового отверстия радиуса R в тонкой изотропной пластине при двухосном растяжении вдоль координатных направлений Ox_j ($j = \overline{1, 2}$) приложенными на удалении от неоднородности равномерными усилиями интенсивности q_j . В рамках данной модели граница упругопластической области в связанных с центром отверстия полярных координатах $Or\theta$, $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ представляет собой овал Γ , имеющий параметрическое описание вида

$$(x_1(\theta))_{\Gamma} = G_1(q_1, q_2, \eta, R) = \beta(1 - \vartheta^2)^{-1}((1 + 2\vartheta)\cos \theta + \vartheta^2 \cos 3\theta), \quad (3.53)$$

$$(x_2(\theta))_{\Gamma} = G_2(q_1, q_2, \eta, R) = \beta(1 - \vartheta^2)^{-1}((1 - 2\vartheta)\sin \theta + \vartheta^2 \sin 3\theta),$$

где $\beta = 2R\eta(4\eta - q_1 - q_2)$; ϑ – действительный корень кубического уравнения

$$\vartheta^3 + \vartheta + \Delta = 0, \quad \Delta = (q_1 - q_2)(4\eta - q_1 - q_2)^{-1}, \quad (3.54)$$

имеющий представление

$$\begin{aligned} \vartheta = G_{\vartheta}(\Delta) = & -[3 \cdot 2^{1/3} ((729\Delta^2 + 108)^{1/2} - 27\Delta)^{-1/3}] / 3 + \quad (3.55) \\ & + [3 \cdot 2^{1/3} ((729\Delta^2 + 108)^{1/2} - 27\Delta)^{-1/3}]^{-1}; \end{aligned}$$

η – константа в записываемом для величины максимального касательного напряжения τ_{\max} условии текучести Треска – Сен-Венана $\tau_{\max} = \eta$. Решение данного типа является корректным при выполнении комплекса ограничений

$$2\eta \leq q_1 + q_2 \leq 3\eta, \quad 0 \leq \vartheta \leq (q_1 + q_2 - 2\eta)(6\eta - q_1 - q_2)^{-1} < 1/3 \quad (3.56)$$

Структура данного решения показывает, что экзогенными параметрами рассматриваемой модели являются радиус отверстия R , интенсивности растягивающих усилий q_j и параметр условия текучести η .

Второй вариант модели формирования охватывающей пластической зоны вокруг отверстия кругового очертания в двухсторонне растягиваемой усилиями интенсивности q_j пластине описывает решение Л.А. Галина [217, 257], также базирующееся на использовании критерия текучести Треска – Сен-Венана. Согласно этой версии решения границей охватывающей отверстие пластической зоны является эллиптическая кривая с полуосями α_j , величины которых задаются соотношениями

$$\alpha_1 = Q_1(q_1, q_2, \eta) = \gamma(1 + \zeta), \quad \alpha_2 = Q_2(q_1, q_2, \eta) = \gamma(1 - \zeta), \quad (3.57)$$

в которых

$$\gamma = R(\exp[(q_1 + q_2)/(2\eta) - 1])^{1/2}, \quad \zeta = (q_2 - q_1)/(2\eta). \quad (3.58)$$

Данное решение также справедливо при ограничении вида $q_2 - q_1 \leq 0.342 \eta$, а экзогенными параметрами модели также являются радиус отверстия R , интенсивности растягивающих усилий q_j и параметр условия текучести η . Соответственно, очертания границы охватывающей пластической зоны при данных ограничениях описываются параметрическими зависимостями

$$(x_1(\zeta))_{\Gamma} = Q_1(q_1, q_2, \eta, R) = \gamma(1 + \zeta) \cos \theta, \quad (x_2(\zeta))_{\Gamma} = Q_2(q_1, q_2, \eta, R) = \gamma(1 - \zeta) \sin \theta. \quad (3.59)$$

Третьей из рассматриваемых моделей является описываемая в работе [173] модель формирования охватывающей пластической зоны кругового сечения вокруг подкрепленной круговой цилиндрической туннельной полости – горной выработки радиуса R , расположенной на глубине h в толще массива несжимаемой породы с плотностью ρ , углом внутреннего трения φ и находящейся в условиях всестороннего сжатия под действием горного давления интенсивности ρgh , где g – параметр ускорения свободного падения. В этой модели вводится предположение о свойстве уменьшения параметра предела прочности горной породы σ_p в пластической зоне от значения σ_p^* , свойственного нетронутому массиву на внешней границе пластической зоны и выражаемому через угол внутреннего трения и параметр C сцепления геоматериала

соотношением $\sigma_p^* = 2C \cos \varphi (1 - \sin \varphi)^{-1}$, до значения σ_p^{**} остаточной прочности на контуре полости согласно закону

$$\sigma_p(\tilde{r}) = \sigma_p^* (\delta - \lambda \tilde{r}^{-n}), \quad \lambda = (1 - \sigma_p^{**} / \sigma_p^*) / (1 - \tilde{r}_p^{-n}), \quad \delta = 1 + \lambda \tilde{r}_p^{-n}, \quad \tilde{r} = r / R, \quad (3.60)$$

в котором \tilde{r}_p – искомое значение приведенного радиуса пластической зоны, n – параметр модели с экспериментально устанавливаемым значением. В рамках данной модели подлежащая определению величина \tilde{r}_p описывается неявной зависимостью

$$\tilde{r}_p = F(\rho, h, \varphi, C, n, \sigma_p^{**}, q_0), \quad (3.61)$$

и определяется как корень уравнения

$$2(\rho gh - \delta \sigma_p^* (1 - \chi)^{-1}) + (2 - n) \lambda \sigma_p^* (1 - n - \chi)^{-1} \tilde{r}_p^{-n} - (1 + \chi) (\sigma_p^* (\lambda (1 - n - \chi)^{-1} - \delta (1 - \chi)) + q_0) \tilde{r}_p^{\chi-1} = 0, \quad (3.62)$$

в котором параметр q_0 является величиной отпора крепи,

$$\chi = (1 + \sin \varphi) / (1 - \sin \varphi). \quad (3.63)$$

В рамках представляемого в работе подхода, на первом этапе его реализации осуществляется выбор подмножеств экзогенных параметров описанных моделей, обладающих выраженной неопределенностью ввиду наличия существенных разбросов их экспериментальных либо конструктивных технологических значений. Указанные подмножества могут включать и полные наборы экзогенных параметров. Для отобранных параметров выполняется процедура фаззификации, базирующаяся в представляемом варианте разрабатываемой методики на допущении об эффективном описании неопределенных экзогенных параметров с разбросами на основе их интерпретации в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов с соответствующими кортежами реперных значений и представлениями в форме суперпозиций соответствующих множеств α – уровня. Так, для первой из рассматриваемых моделей полагается:

$$\tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \quad \underline{R}_\alpha = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \quad (3.64)$$

$$\tilde{q}_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}, q_{j4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{j\alpha}, \bar{q}_{j\alpha}], \quad \underline{q}_{j\alpha} = (1 - \alpha)q_{j1} + \alpha q_{j2}, \quad \bar{q}_{j\alpha} = \alpha q_{j3} + (1 - \alpha)q_{j4};$$

$$\tilde{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha], \quad \underline{\eta}_\alpha = (1-\alpha)\eta_1 + \alpha\eta_2, \quad \bar{\eta}_\alpha = \alpha\eta_3 + (1-\alpha)\eta_4.$$

Соответственно, обобщения функциональных зависимостей (3.53) для описания нечетко-множественных параметрических представлений $(\tilde{x}_j(\theta))_\Gamma$ ($j = \overline{1,2}$) формулируются на основе применения α – уровневой формы эвристического принципа расширения и имеют вид

$$(\tilde{x}_j(\theta))_\Gamma = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_{j\alpha}(\theta), \bar{x}_{j\alpha}(\theta)], \quad (3.65)$$

$$\underline{x}_{j\alpha}(\theta) = \inf_{\substack{q_1 \in [\underline{q}_{1\alpha}, \bar{q}_{1\alpha}] \\ q_2 \in [\underline{q}_{2\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ \eta \in [\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} G_j(q_1, q_2, \eta, R, \theta), \quad \bar{x}_{j\alpha}(\theta) = \sup_{\substack{q_1 \in [\underline{q}_{1\alpha}, \bar{q}_{1\alpha}] \\ q_2 \in [\underline{q}_{2\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ \eta \in [\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} G_j(q_1, q_2, \eta, R, \theta).$$

Аналогично, для второй рассматриваемой модели нечетко-множественное обобщения описаний (3.59) при задании неопределенных экзогенных параметров в форме (3.64) будет иметь вид

$$(\tilde{x}_j(\theta))_\Gamma = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}_{j\alpha}(\theta), \bar{x}_{j\alpha}(\theta)], \quad (3.66)$$

$$\underline{x}_{j\alpha}(\theta) = \inf_{\substack{q_1 \in [\underline{q}_{1\alpha}, \bar{q}_{1\alpha}] \\ q_2 \in [\underline{q}_{2\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ \eta \in [\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} Q_j(q_1, q_2, \eta, R, \theta), \quad \bar{x}_{j\alpha}(\theta) = \sup_{\substack{q_1 \in [\underline{q}_{1\alpha}, \bar{q}_{1\alpha}] \\ q_2 \in [\underline{q}_{2\alpha}, \bar{q}_{2\alpha}] \\ \eta \in [\underline{\eta}_\alpha, \bar{\eta}_\alpha] \\ R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha]}} Q_j(q_1, q_2, \eta, R, \theta).$$

При получении нечетко-множественного обобщения для третьей из рассматриваемых расчетных моделей описания в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов вводятся применительно к неопределенным экзогенным параметрам $\rho, h, \varphi, C, n, \sigma_p^{**}, q_0$:

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \bar{\rho}_\alpha = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4; \quad (3.67)$$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \quad \underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4;$$

$$\tilde{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha], \quad \underline{\varphi}_\alpha = (1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2, \quad \bar{\varphi}_\alpha = \alpha\varphi_3 + (1-\alpha)\varphi_4;$$

$$\tilde{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{C}_\alpha, \bar{C}_\alpha], \quad \underline{C}_\alpha = (1-\alpha)C_1 + \alpha C_2, \quad \bar{C}_\alpha = \alpha C_3 + (1-\alpha)C_4;$$

$$\tilde{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{n}_\alpha, \bar{n}_\alpha], \quad \underline{n}_\alpha = (1-\alpha)n_1 + \alpha n_2, \quad \bar{n}_\alpha = \alpha n_3 + (1-\alpha)n_4;$$

$$\tilde{\sigma}_p^{**} = (\sigma_{p1}^{**}, \sigma_{p2}^{**}, \sigma_{p3}^{**}, \sigma_{p4}^{**}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\sigma}_{p\alpha}^{**}, \overline{\sigma}_{p\alpha}^{**}],$$

$$\underline{\sigma}_{p\alpha}^{**} = (1-\alpha)\sigma_{p1}^{**} + \alpha\sigma_{p2}^{**}, \quad \overline{\sigma}_{p\alpha}^{**} = \alpha\sigma_{p3}^{**} + (1-\alpha)\sigma_{p4}^{**};$$

$$\tilde{q}_0 = (q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{0\alpha}, \overline{q}_{0\alpha}], \quad q_{0\alpha} = (1-\alpha)q_{01} + \alpha q_{02}, \quad \overline{q}_{0\alpha} = \alpha q_{03} + (1-\alpha)q_{04}.$$

При этом, описание нечетко-множественного эндогенного параметра \tilde{r}_p задается представлением

$$\tilde{r}_p = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\tilde{r}_{p\alpha}, \overline{\tilde{r}}_{p\alpha}] \quad (3.68)$$

$$\tilde{r}_{p\alpha} = \inf_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ \varphi \in [\underline{\varphi}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha] \\ C \in [\underline{C}_\alpha, \overline{C}_\alpha] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha] \\ \sigma_p^{**} \in [\underline{\sigma}_{p\alpha}^{**}, \overline{\sigma}_{p\alpha}^{**}] \\ q_0 \in [q_{0\alpha}, \overline{q}_{0\alpha}]}} F(\rho, h, \varphi, C, n, \sigma_p^{**}, q_0), \quad \overline{\tilde{r}}_{p\alpha} = \sup_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \overline{h}_\alpha] \\ \varphi \in [\underline{\varphi}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha] \\ C \in [\underline{C}_\alpha, \overline{C}_\alpha] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha] \\ \sigma_p^{**} \in [\underline{\sigma}_{p\alpha}^{**}, \overline{\sigma}_{p\alpha}^{**}] \\ q_0 \in [q_{0\alpha}, \overline{q}_{0\alpha}]}} F(\rho, h, \varphi, C, n, \sigma_p^{**}, q_0).$$

Соотношения (3.65), (3.66) и (3.68) позволяют реализовывать сформулированную цель исследования по оцениванию меры влияния неопределенности, связанной с наличием разбросов экспериментальных и технологических значений экзогенных физико-механических и геометрических параметров, на характеристики охватывающих пластических зон вокруг полостей и отверстий кругового очертания при плоской деформации изотропных геомассивив с туннельными сооружениями и при обобщенном плоском напряженном состоянии изотропных пластин с вырезами.

При этом ограничения на значения экзогенных параметров, установленные в первой и второй рассматриваемых моделях, при переходе в результате фазификации к нечетко-множественным расширениям соответствующих параметров, должны выполняться в рамках критериев сопоставления нормальных трапецеидальных нечетких интервалов [286, 310, 348, 354] при дополнительном условии отсутствия их непустого пересечения, а также на каждом из α – уровней.

Примеры реализации представленной методики даны применительно к следующим вариантам задания экзогенных параметров в рассматриваемых моделях формирования пластических зон. Расчеты для первого варианта модели

выполнены при задании нечетко-интервальных параметров вида, отвечающих характеристикам конструкций из алюминия [101, 257]

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= (58c_*, 59.5c_*, 60c_*, 62c_*), \quad \tilde{q}_2 = (63c_*, 64c_*, 65.5c_*, 67c_*), \\ \tilde{R} &= (0.029l_*, 0.03l_*, 0.031l_*, 0.0315l_*), \quad \tilde{\eta} = (48c_*, 49c_*, 50c_*, 53c_*), \\ c_* &= 1 [\text{Мпа}], \quad l_* = 1 [\text{м}]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Данный вариант описания неопределенных исходных данных относится к случаю фаззификации входных параметров, разброс в значениях которых по отношению к среднему значению на интервалах носителей, предположительно составляет не более 7.5%.

Результаты расчетов с использованием соотношений (3.65) в виде нечеткого описания очертаний внешней границы $\tilde{\Gamma} : \{\tilde{x}_1(\theta), \tilde{x}_2(\theta)\}$ охватывающей пластической зоны вокруг контура кругового отверстия L дано на рисунке 3.32. Внутренние линии 1 и 4 отвечают значениям уровней принадлежности $\mu_{\tilde{x}_j(\theta)}(x_j(\theta)) = 0$, а линии 2 и 3 – значениям уровней принадлежности $\mu_{\tilde{x}_j(\theta)}(x_j(\theta)) = 1$. Иными словами, граница пластической зоны согласно получаемым оценкам в случае учитываемых разбросов не может располагаться вне линии 4 и в области внутри линии 1, и с равной максимальной возможностью может находиться в области между линиями 2 и 3.

Аналогичные оценки применительно ко второй рассматриваемой модели, полученные на основе соотношений (3.66), представлены на рисунке 3.33 для случая задания нечетких параметров в виде (3.69).

Пример результатов исследования в рамках третьей модели в виде функции принадлежности для нечеткой эндогенной характеристики – неопределенного приведенного радиуса круговой охватывающей пластической области вокруг подкрепленной цилиндрической туннельной выработки в массиве алевролита [1, 221, 259–260] с нормированным единичным радиусом, представлен на рисунке 3.34 применительно к случаю, когда неопределенными нечетко-интервальными являются экзогенные параметры

$$\tilde{\eta} = (2., 2.8, 4.2, 6), \quad \tilde{q}_0 = (0.065c_*, 0.115c_*, q_{03} 0.165c_*, 0.215c_*), \quad c_* = 1 [\text{Мпа}], \quad (3.70)$$

а остальные исходные параметры рассматриваются как четкие величины и имеют значения $h = 1150 [м]$, $\rho = 2.72 \cdot 10^3 [кг/м^3]$, $\varphi = 30^\circ$, $C = 1.94c_*$, $\sigma_p^{**} = 30c_*$.

Анализ результатов расчетов позволяет сделать выводы о параметрах разбросов эндогенных нечетко-множественных характеристик моделей формирования охватывающих пластических зон. Так, в первой из рассматриваемых моделей разброс оценок на всем интервале носителя составляет порядка 22% по отношению к среднему значению на этом интервале; в рамках второй из рассматриваемых моделей разброс имеет меньший уровень и составляет порядка 12% от среднего значения на интервале носителя. Оценка разброса при следовании третьей из рассматриваемых моделей при учете неопределенности для меньшего числа исходных параметров но в ситуации существенно более протяженной цепочки нечетких вычислений составляет порядка 3.3%.

Реализовано также исследование модели упругопластического деформирования полого изотропного шара под действием равномерно распределенного внутреннего давления с неопределенной, имеющей разбросы значения интенсивностью, осуществляемое на основе нечетко-множественного и стохастического [153] подходов.

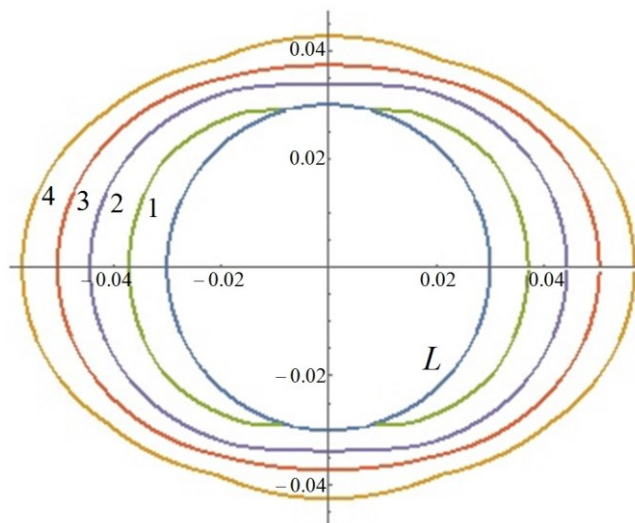


Рис.3.32. Нечеткие оценки топологических свойств охватывающей пластической зоны в рамках первой модели.

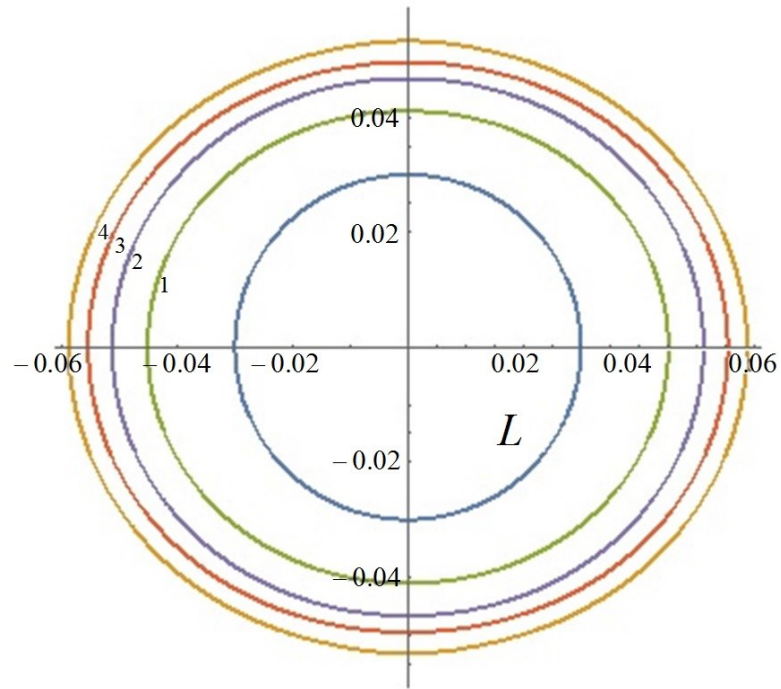


Рис.3.33. Нечеткие оценки топологических свойств охватывающей пластической зоны в рамках второй модели.

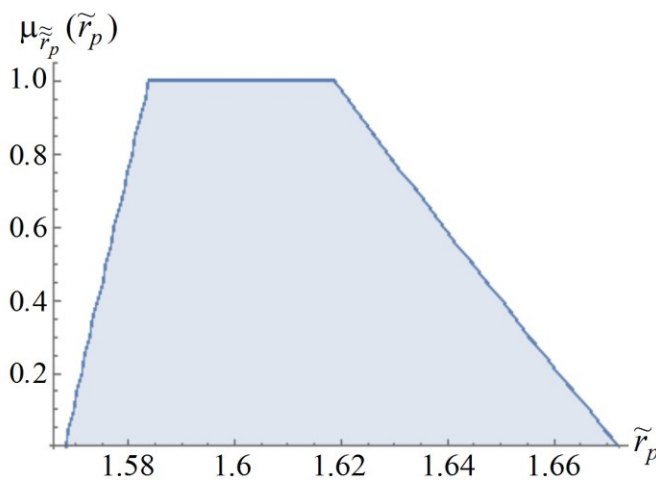


Рис. 3.34. Функция принадлежности \tilde{r}_p

Рассматриваемый шар имеет внутренний радиус a и внешний радиус b ; к поверхности его внутренней полости приложено удовлетворяющее условию $q_0 < q < q_s$ равномерно распределенное давление интенсивности q . В области упругого деформирования в стенке шара радиальные σ_r и тангенциальные σ_θ напряжения описываются соотношениями

$$\sigma_r = q_1(1 - b^3/r^3), \quad \sigma_\theta = q_1(1 + b^3/(2r^3)), \quad (3.71)$$

а в пластической области – соотношениями

$$\sigma_r = 2\sigma_s \ln(r/a) - q, \quad \sigma_\theta = 2\sigma_s \ln(r/a) - q + \sigma_s. \quad (3.72)$$

В вышеприведенных выражениях

$$q_0 = (2/3)\sigma_s(1 - a^3/b^3), \quad q_s = 2\sigma_s \ln(b/a), \quad q_1 = (q - 2\sigma_s \ln(\rho/a))(1 - \rho^3/b^3); \quad (3.73)$$

σ_s – предел текучести материала шара; $\rho \in [a, b]$ – радиус границы между областями упругого и пластического деформирования, определяемый из уравнения вида

$$F(\rho, a, b, \sigma_s, q) = q - 2\sigma_s (\ln(\rho/a) + (1/3)(1 - \rho^3/b^3)) = 0. \quad (3.74)$$

Из параметров рассматриваемой задачи в качестве характеризующегося неопределённостью, соответственно [153], рассматривается только параметр равномерно распределенного давления q , приложенного к границе внутренней полости шара. В этом случае при постановке задачи описания неопределенных значений радиуса границы между областями упругого и пластического деформирования в рамках применения нечетко-множественного подхода исходным соотношением является следующая из (3.74) неявная функциональная зависимость

$$\rho = G(a, b, \sigma_s, q), \quad (3.75)$$

к которой, в предположении об описании неопределенной характеристики q выпуклым нечетким множеством \tilde{q} с разложением по множеству альфа-срезов вида

$$\tilde{q} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_\alpha, \bar{q}_\alpha], \quad (3.76)$$

применяется модифицированная форма эвристического принципа обобщения, и искомое представление для неопределенной нечетко-множественной величины $\tilde{\rho}$ записывается в виде

$$\tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q), \bar{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q)] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]. \quad (3.77)$$

Для получения представлений $\underline{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q)$, $\bar{G}_\alpha(a, b, \sigma_s, q)$ с использованием формулы (3.74) находится выражение для частной производной

$$\partial\rho/\partial q = (2\sigma_s \rho^{-1}(1-\rho^3/b^3))^{-1}, \quad (3.78)$$

на основе которого и соответственно физическим соображениям о характере зависимости ρ от q , формулируется оценка

$$\partial\rho/\partial q \geq 0. \quad (3.79)$$

С учетом (3.79) записываются представления

$$\underline{\rho}_\alpha = G(a, b, \sigma_s, \underline{q}_\alpha), \quad \bar{\rho}_\alpha = G(a, b, \sigma_s, \bar{q}_\alpha). \quad (3.80)$$

В частном случае описания \tilde{q} симметричным нечетким гауссовым числом [311]

$$\underline{q}_\alpha = m_* - \sigma_*(\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \bar{q}_\alpha = m_* + \sigma_*(\ln \alpha^{-2})^{1/2},$$

и величины $\underline{\rho}_\alpha$, $\bar{\rho}_\alpha$ соответственно численно определяются из уравнения (3.74)

при

$$q = \underline{q}_\alpha, \quad q = \bar{q}_\alpha. \quad (3.81)$$

Результатом реализации описанного расчетного алгоритма является получение функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\rho}$, позволяющей делать заключения о степени уверенности в том, что радиус зоны пластического деформирования принимает определенные значения из области носителя нечеткого множества $\tilde{\rho}$ при заданном нечетком описании \tilde{q} интенсивности нормального внутреннего давления.

В рамках применения к анализу рассматриваемой модели вероятностно-стохастического подхода, описываемого в работе [153], полагается, что нормальное давление q является случайной величиной с плотностью распределения вероятностей $\varphi(q)$. В этом случае, согласно [153], функция распределения $\Phi(\rho)$ для случайного параметра ρ радиуса границы между областями упругого и пластического деформирования с использованием представления (3.74) может быть записана в виде

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < a; \\ \int_{-\infty}^{q(\rho)} \varphi(q) dq, & a \leq \rho \leq b; \\ 1, & \rho > b. \end{cases} \quad (3.82)$$

В случае задания закона нормального распределения давления q

$$\varphi(q) = (q_\sigma (2\pi)^{1/2})^{-1} \exp(-(q - q_0)^2 / (2q_\sigma^2)), \quad (3.83)$$

в котором q_0 – среднее значение (математическое ожидание) и q_σ – среднеквадратическое отклонение (дисперсия), для $\Phi(\rho)$, соответственно, можно записать представление

$$\Phi(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < a; \\ \Psi((q(\rho) - q_0) / q_\sigma) + 1/2, & a \leq \rho \leq b; \\ 1, & \rho > b. \end{cases} \quad (3.84)$$

в котором фигурирует функция Гаусса

$$\Psi(z) = (2\pi)^{1/2} \int_0^z \exp(-t^2/2) dt. \quad (3.85)$$

В рамках вероятностного подхода в [153] получены описания для вероятностей событий, которые заключается в прохождении границы раздела упругой и пластической зон деформирования в области

$$a \leq r_1 < \rho < r_2 \leq b \quad (3.86)$$

либо в области

$$a < \rho < r_2 \leq b. \quad (3.87)$$

При рассматриваемом варианте распределения q

$$P \{a \leq r_1 < \rho < r_2 \leq b\} = \int_{q(r_1)}^{q(r_2)} \varphi(q) dq = \Psi((q(r_2) - q_0) / q_\sigma) - \Psi((q(r_1) - q_0) / q_\sigma), \quad (3.88)$$

$$P \{a < \rho < r_2 \leq b\} = \int_{-\infty}^{q(r_2)} \varphi(q) dq = \Psi((q(r_2) - q_0) / q_\sigma) + 1/2. \quad (3.89)$$

Также, в [153] представлено статистическое обоснование выбора параметра

$$\beta = b / a, \quad (3.90)$$

обеспечивающего не возникновение предельного состояния в рамках требования о выполнении условия

$$q < q_s = 2\sigma_s \ln \beta \quad (3.91)$$

с заданной вероятностью P_0 , соответственно которому

$$P_0 = P\{q < q_s\} = \int_{-\infty}^{q_s} \varphi(q) dq. \quad (3.92)$$

Как показано в [153], при нормальном распределении q вида (3.83) в этом случае можно найти

$$\beta = \exp((q_0 + k(P_0)q_\sigma)/(2\sigma_s)), \quad (3.93)$$

а зависимость $k(P_0)$ устанавливается из соотношения

$$\Psi(k(P_0)) = P_0 - 1/2. \quad (3.94)$$

Расчеты с применением соотношений, полученных в рамках двух рассматриваемых методик, осуществлены для конструкции виде полого шара с приведенными физико-механическим и геометрическим параметрами

$$a = 1.0 \cdot l_*, \quad b = 3.0 \cdot l_*, \quad \sigma_s = 10.0 \cdot p_*,$$

а также параметрами неконтрастного задания интенсивности внутреннего давления

$$m_* = q_0 = 12.0 \cdot p_*, \quad \sigma_* = q_\sigma = 0.02 \cdot p_*,$$

где l_* , p_* – нормирующие параметры соответствующей физической размерности. Результаты расчетов с применением нечетко-множественной методики на основе соотношения (3.77) представлены на рисунке 3.35 в виде графика функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики радиуса зоны пластических деформаций $\tilde{\rho}$. Модальным значением для характеристики $\tilde{\rho}$ является величина $\rho = 1.34546$, интервалом на носителе, границы которого характеризуются показателем принадлежности 0.01, является интервал [1.341, 1.350].

Результаты расчетов по вероятностно-стохастической методике отражены на рисунке 3.36 в виде картины значений приведенного показателя вероятности $\bar{P}\{r = \rho\}$ для нормально распределенной случайной характеристики ρ радиуса пластической зоны. Среднее (математическое ожидание) для данной случайной величины имеет расчетное значение $\rho_0 = 1.34515$, а областью определения $\bar{P}\{r = \rho\}$ является интервал [1.342, 1.348].

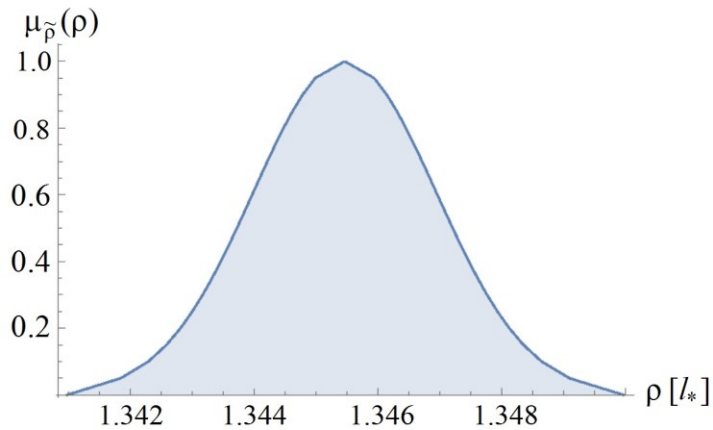


Рис. 3.35. Вид функции принадлежности $\mu_{\tilde{\rho}}(\rho)$.

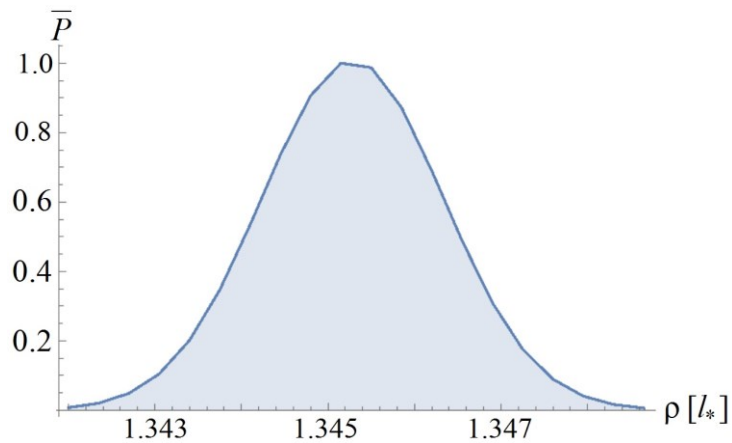


Рис. 3.36. Распределение приведенного показателя $\bar{P}\{r=\rho\}$

Сопоставляя и характеризуя представленные расчетные результаты можно сделать вывод о самой высокой степени их идентичности в случае анализа рассматриваемой модели с применением нечетко-множественной и вероятностно-стохастической методик. Оценки для модального значения для $\tilde{\rho}$ и среднего для случайной величины радиуса пластической зоны при сходных описаниях неконтрастного экзогенного параметра интенсивности внутреннего давления различаются на величину порядка 0.02%; интервал носителя для нечетко-множественной оценки $\tilde{\rho}$ на крайне незначительную величину несущественно шире расчетного интервала области определения $\bar{P}\{r=\rho\}$. Таким образом, в рассмотренной ситуации возможного применения к модели учета неопределенности экзогенных параметров в модели упругопластического

деформирования нагруженного внутренним давлением полого шара применение обоих рассматриваемых подходов приводит к практически идентичным результатам.

Можно сделать вывод о том, что в ситуации возможного применения указанных подходов к учету неконтрастности экзогенных параметров модели деформирования, при сходных способах задания неопределенных исходных характеристик, оба подхода приводят к эквивалентным верифицированным результатам с незначительным относительным расширением прогнозируемой области разброса значений результирующих параметров в случае применения методов теории нечетких множеств.

3.7. Выводы по разделу 3

1. Разработан нечетко-множественный метод анализа эффектов влияния разбросов физико-механических и геометрических параметров при исследовании контурной концентрации механических напряжений в тонких растягиваемых пластинах с жесткими круговыми включениями, эллиптическими отверстиями и эллиптическими упругими включениями.

2. Разработан метод анализа нечеткой модели концентрации напряжений в растягиваемых тонких пластинах с треугольными и квадратными отверстиями неопределенной угловой кривизны.

3. Разработан нечетко-множественный метод анализа модели электроупругого деформирования ослабленных отверстиями пьезоактивных пластин с неопределенными физико-механическими параметрами.

4. Разработан метод нечетко-множественного моделирования процессов формирования охватывающих пластических зон в деформируемых телах вокруг туннельных цилиндрических полостей и отверстий с круговыми граничными контурами.

5. Реализован сопоставительный анализ применения методов нечетко-множественного и вероятностного моделирования в задаче определения радиуса зоны пластичности при осесимметричном деформировании толстостенной

сферической конструкции под действием характеризующегося разбросами значений интенсивного внутреннего давления, дающий основание для заключения о высокой степени соответствия получаемых оценок для эндогенного параметра рассматриваемой модели.

6. Разработан и апробирован комплекс программных приложений для расчетного анализа всех представленных в разделе нечетко-множественных двумерных моделей концентрации механических напряжений и формирования зон пластических деформаций около отверстий и выработок.

РАЗДЕЛ 4. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ, ДИСПЕРСИИ И ТРАНСФОРМАЦИИ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ УПРУГИХ ВОЛН

4.1. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций в изотропных, анизотропных и пьезоактивных средах

К задачам прикладного математического моделирования в волновой механике деформируемых сред при учете неопределенности значений физико-механических постоянных в первую очередь относятся вопросы оценки разброса для характеристик объемных упругих волн, используемых в технологиях волнового зондирования, геоакустике и ультразвуковой дефектоскопии. К числу подобных характеристик принадлежат фазовые и групповые скорости упругих волн, волновые сопротивления (импедансы), длительности задержки при распространении диагностических волновых импульсов.

Первым рассматриваемым вопросом является получение нечетких оценок фазовых скоростей и импедансов для объемных упругих волн в изотропных упругих средах в рамках интерпретации нечетких значений некоторых параметров рассматриваемых моделей нормальные трапецеидальными нечеткими интервалами, частными случаями которых являются нормальные треугольные нечеткие числа.

Фазовые и групповые скорости бездисперсных объемных волн продольного (P) типа v_{fp}, v_{gp} и сдвигового (S) типа v_{fs}, v_{gs} в изотропных идеально упругих средах, а также соответствующие волновые сопротивления (импедансы) n_p, n_s имеют известные [98, 106, 278] аналитические представления

$$v_{fp} = v_{gp} = ((\lambda + 2\mu)/\rho)^{1/2}, \quad v_{fs} = v_{gs} = (\mu/\rho)^{1/2} \quad (4.1)$$

$$n_p = ((\lambda + 2\mu)\rho)^{1/2}, \quad n_s = (\mu\rho)^{1/2} \quad (4.2)$$

в которых λ, μ – модули упругости Ламе ρ – параметр плотности. Нечеткие оценки для указанных характеристик объемных упругих волн, а также для ряда

рассматриваемых ниже характеристик, формируются путем применения эвристического принципа обобщения в версии Заде, и следующих из него правил неидемпотентной арифметики трапецеидальных нечетких интервалов. Для получения искомым нечетких оценок полагается, что нечетко заданные упругие постоянные $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ и плотность $\tilde{\rho}$ рассматриваемой изотропной упругой среды описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами с реперными точками $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, $\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$. В этом случае нечеткие оценки для фазовых скоростей $v_{\text{ф}}, v_{\text{б}}$ соответственно представляются нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{\text{vs}} = \mu_{\text{vs}}^{1/2}$, $\mu_{\text{vp}} = \mu_{\text{vp}}^{1/2}$, где $\mu_{\text{vs}}, \mu_{\text{vp}}$ – соответственно функции принадлежности для трапецеидальных нечетких множеств с кортежами реперных точек $(\mu_1 / \rho_4, \mu_2 / \rho_3, \mu_3 / \rho_2, \mu_4 / \rho_1), ((\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_4, (\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho_3, (\lambda_3 + 2\mu_3) / \rho_2, (\lambda_4 + 2\mu_4) / \rho_1)$. Таким образом,

$$\mu_{\text{vs}}(v_{\text{б}}) = \{0, v_{\text{б}} \leq (\mu_1 / \rho_4)^{1/2}; \quad (4.3)$$

$$((v_{\text{б}} - \mu_1 / \rho_4) / (\mu_2 / \rho_3 - \mu_1 / \rho_4))^{1/2}, (\mu_1 / \rho_4)^{1/2} \leq v_{\text{б}} \leq (\mu_2 / \rho_3)^{1/2};$$

$$1, (\mu_2 / \rho_3)^{1/2} \leq v_{\text{б}} \leq (\mu_3 / \rho_2)^{1/2};$$

$$(\mu_4 / \rho_1 - v_{\text{б}}) / (\mu_4 / \rho_1 - \mu_3 / \rho_2)^{1/2}, (\mu_3 / \rho_2)^{1/2} \leq v_{\text{б}} \leq (\mu_4 / \rho_1)^{1/2};$$

$$0, v_{\text{б}} \geq (\mu_4 / \rho_1)^{1/2}\};$$

$$\mu_{\text{vp}}(v_{\text{ф}}) = \{0, v_{\text{ф}} \leq ((\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_4)^{1/2}; \quad (4.4)$$

$$((v_{\text{ф}} - (\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_4) / ((\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho_3 - (\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_4))^{1/2},$$

$$((\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_4)^{1/2} \leq v_{\text{ф}} \leq ((\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho_3)^{1/2};$$

$$1, ((\lambda_2 + 2\mu_2) / \rho_3)^{1/2} \leq v_{\text{ф}} \leq ((\lambda_3 + 2\mu_3) / \rho_2)^{1/2};$$

$$((\lambda_4 + 2\mu_4) / \rho_1 - v_{\text{ф}}) / ((\lambda_4 + 2\mu_4) / \rho_1 - (\lambda_3 + 2\mu_3) / \rho_2)^{1/2},$$

$$((\lambda_3 + 2\mu_3) / \rho_2)^{1/2} \leq v_{\text{ф}} \leq ((\lambda_4 + 2\mu_4) / \rho_1)^{1/2};$$

$$0, v_{\text{ф}} \geq ((\lambda_4 + 2\mu_4) / \rho_1)^{1/2}\}.$$

Нечеткие оценки для импедансов n_s , n_p соответственно описываются нечеткими множествами с функциями принадлежности $\mu_{Is} = \mu_{*Is}^{1/2}$, $\mu_{Ip} = \mu_{*Ip}^{1/2}$, где μ_{*Is} , μ_{*Ip} – функции принадлежности для трапецеидальных нечетких множеств с кортежами реперных точек $(\mu_1\rho_1, \mu_2\rho_2, \mu_3\rho_3, \mu_4\rho_4)$ и $((\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1, (\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2, (\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3, (\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4)$. В результате искомые функции принадлежности имеют представления

$$\mu_{Ip}(n_p) = \{0, n_p \leq ((\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1)^{1/2}; \quad (4.5)$$

$$((n_p - (\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1)/((\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2 - (\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1))^{1/2},$$

$$((\lambda_1 + 2\mu_1)\rho_1)^{1/2} \leq n_p \leq ((\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2)^{1/2};$$

$$1, ((\lambda_2 + 2\mu_2)\rho_2)^{1/2} \leq n_p \leq ((\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3)^{1/2};$$

$$((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4 - n_p)/((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4 - (\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3)^{1/2},$$

$$((\lambda_3 + 2\mu_3)\rho_3)^{1/2} \leq n_p \leq ((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4)^{1/2};$$

$$0, n_p \geq ((\lambda_4 + 2\mu_4)\rho_4)^{1/2}\};$$

$$\mu_{Is}(n_s) = \{0, n_s \leq (\mu_1\rho_1)^{1/2}; \quad (4.6)$$

$$((n_s - \mu_1\rho_1)/(\mu_2\rho_2 - \mu_1\rho_1))^{1/2}, (\mu_1\rho_1)^{1/2} \leq n_s \leq (\mu_2\rho_2)^{1/2};$$

$$1, (\mu_2\rho_2)^{1/2} \leq n_s \leq (\mu_3\rho_3)^{1/2};$$

$$(\mu_4\rho_4 - n_s)/(\mu_4\rho_4 - \mu_3\rho_3)^{1/2}, (\mu_3\rho_3)^{1/2} \leq n_s \leq (\mu_4\rho_4)^{1/2};$$

$$0, n_s \geq (\mu_4\rho_4)^{1/2}\}.$$

В частных случаях $\lambda_2 = \lambda_3, \mu_2 = \mu_3, \rho_2 = \rho_3$ приведенные оценки относятся к вариантам задания нечетких физико-механических постоянных изотропных материалов нормальными треугольными нечеткими числами.

В качестве примера использования полученных расчетных соотношений представлены нечеткие оценки фазовых скоростей продольных и поперечных объемных упругих волн для угольного массива с усредненными характеристиками [165]

$$E=0.28 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \nu=0.30, \rho = 1.69 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

имеющими 30% разброс экспериментально определяемых значений. Исходя из соотношений связи механических параметров $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $\mu = E / (2(1 + \nu))$ для угля находятся осредненные оценки $\lambda = 0.149 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\mu = 0.109 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Соответствующие реперные величины для нормальных треугольных нечетких чисел, описывающих физико-механические постоянные $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\rho}$ угля, с учетом уровней разброса экспериментальных данных имеют значения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.104 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0.149 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \lambda_4 = 0.194 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ \mu_1 &= 0.076 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \mu_2 = \mu_3 = 0.109 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \mu_4 = 0.142 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \\ \rho_1 &= 1.169 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = \rho_3 = 1.69 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \rho_4 = 2.197 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

С использованием представленной в работе методики, для реперных значений нечетких множеств (нормальных треугольных нечетких чисел), описывающих величины фазовых скоростей объемных упругих волн продольного и сдвигового типа в рассматриваемом угольном массиве, получены оценки:

$$\begin{aligned} v_{1\text{ф}} &= 1079 \text{ м/сек}, v_{2\text{ф}} = v_{3\text{ф}} = 1473 \text{ м/сек}, v_{4\text{ф}} = 2022 \text{ м/сек}; \\ v_{1\text{с}} &= 588 \text{ м/сек}, v_{2\text{с}} = v_{3\text{с}} = 803 \text{ м/сек}, v_{4\text{с}} = 1102 \text{ м/сек}. \end{aligned}$$

Приведенные значения ограничивают интервалы, вне которых оцениваемые значения рассматриваемых скоростей имеют нулевую достоверность, а также представляют их наиболее достоверную величину.

Для ряда современных высокотехнологичных научно-технических отраслей, в частности при создании компонентов акустоэлектронных устройств важное значение имеют численно-аналитические теоретические методики учета влияния погрешностей разброса в экспериментальных значениях исходных параметров при исследовании характеристик распространения объемных электроупругих волн в анизотропных пьезокристаллических и пьезокерамических средах на основе моделей, учитывающих связанные деформационные механические и электромагнитные взаимодействия. Это связано с тем, что при создании

компонентов акустоэлектронных устройств требуется получение в максимальной степени достоверных высокоточных оценок для скоростей и показателей амплитудного затухания волновых информационных сигналов. При использовании нечетко-множественных методов данная задача решается путем поэтапного фрагментированного применения методов нечетко-интервальной арифметики и использования альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения.

В контексте указанной проблемы, в частности, представляют интерес данные о скоростях и показателях энергетического рассеяния ультразвуковых волновых сигналов, полученные без использования гипотезы о квазистатическом приближении при описании электрического поля в связанных электроупругих волнах и с учетом факторов неопределенности экзогенных параметров, обусловленных разбросами в значениях физико-механических характеристик. В этой связи, проблема учета неопределенности рассмотрена применительно к процессам распространения стационарных связанных электроупругих объемных волн по направлениям, коллинеарным оси Ox_1 симметрии физико-механических свойств обладающего пьезоэлектрическими свойствами и относящегося классу $42m$ тетрагональной системы монокристалла ADP. В рассматриваемой модели учитываются магнитные свойства и электропроводность пьезоактивной среды с конечной проводимостью, а также эффекты дисперсии электромеханических волн и параметрического частотного затухания их амплитуд.

В качестве первого типа подобных волн, находящих применение в конструкциях акустоэлектронных устройств с компонентами из монокристаллов рассматриваемого вида, исследуются связанные сдвиговые стационарные электроупругие волны с круговой частотой ω , характеризующиеся компонентой $u_2(x_1, t)$ вектора колебательных упругих перемещений и компонентой $E_3(x_1, t)$ вектора напряженности для сопряженного электрического поля. Полученные в [16–18, 282] представления для коэффициента амплитудного затухания $\mathcal{G}_f^{(j)}$ и параметра фазовой скорости $V_f^{(j)}$ рассматриваемых волн имеют представления

$$V_f^{(j)} = F_V^{(j)}(\omega, \rho, \mu_0, \sigma, c, e, \varepsilon) = [\operatorname{Re} k_j]^{-1} \omega, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{G}_f^{(j)} = F_g^{(j)}(\omega, \rho, \mu_0, \sigma, c, e, \varepsilon) = \operatorname{Im} k_j, \quad (4.8)$$

$$k_j = (\omega / \sqrt{2}) [(\rho c^{-1} + \mu_0 \varepsilon + \mu_0 e^2 c^{-1} - i \sigma \mu_0 \omega^{-1}) + (-1)^j [(\rho c^{-1} + \mu_0 \varepsilon + \mu_0 e^2 c^{-1} - i \sigma \mu_0 \omega^{-1})^2 - 4 \rho c^{-1} (\mu_0 \varepsilon - i \sigma \mu_0 \omega^{-1})]^{1/2}]^{1/2}. \quad (4.9)$$

Параметрами соотношений (4.7) – (4.9) являются отдельные компоненты матриц упругих адиабатических постоянных $c_{66} = c$, пьезомодулей $e_{63} = e$, диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_{33} = \varepsilon$, а также постоянные плотности кристалла ρ , электрической проводимости σ и магнитной проницаемости для рассматриваемой пьезоэлектрической среды.

Еще одним анализируемым видом сопряженных электромеханических волн являются связанные поперечные электроупругие волны с направлением распространения Ox_1 , характеризующиеся компонентой $E_2(x_1, t)$ вектора напряженности электрического поля и компонентой $u_3(x_1, t)$ вектора волновых колебательных смещений. Для волн данного типа представления эндогенных характеристик коэффициента затухания $\mathcal{G}_f^{(j)}$ и фазовой скорости $V_f^{(j)}$ также имеют вид (4.7)–(4.9) при замене параметров $c = c_{44}$, $e = e_{14}$, $\varepsilon = \varepsilon_{11}$.

Разрабатываемый метод нечетко-множественного исследования описанных моделей волновых процессов в средах с пьезоэлектрическими свойствами, на исходном этапе заключается в приведении выражений (4.7), (4.8) к виду

$$V_f^{(j)} = F_{V^*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \sqrt{2} [\operatorname{Re} [(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i \omega^{-1} \delta_4) + (-1)^j [(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i \omega^{-1} \delta_4)^2 - 4 \delta_1 (\delta_2 - i \omega^{-1} \delta_4)]^{1/2}]^{1/2}]^{-1}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{G}_f^{(j)} = F_{g^*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = (\omega / \sqrt{2}) \operatorname{Im} [(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i \omega^{-1} \delta_4) + (-1)^j [(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - i \omega^{-1} \delta_4)^2 - 4 \delta_1 (\delta_2 - i \omega^{-1} \delta_4)]^{1/2}]^{1/2}, \quad (4.11)$$

$$\delta_1 = \rho c^{-1}, \delta_2 = \mu_0 \varepsilon, \delta_3 = \mu_0 e^2 c^{-1}, \delta_4 = \mu_0 \sigma. \quad (4.12)$$

Для обладающих разбросами значений, неконтрастных экзогенных параметров $\rho, \mu_0, \sigma, c, e, \varepsilon$ рассматриваемой модели в процессе разработки метода записываются нечетко-множественные представления $\tilde{\rho}, \tilde{\mu}_0, \tilde{\sigma}, \tilde{c}, \tilde{e}, \tilde{\varepsilon}$ в виде

трапецеидальных нормальных нечетких интервалов с кортежами реперных значений

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{\mu}_0 = (\mu_{01}, \mu_{02}, \mu_{03}, \mu_{04}), \quad \tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \quad (4.13)$$

$$\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4), \quad \tilde{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4),$$

после чего, на основе применения аппарата арифметики нечетких трапецеидальных интервалов, в соответствии с (4.12) находятся выражения $\tilde{\delta}_p$

$$\tilde{\delta}_1 = (\rho_1 c_4^{-1}, \rho_2 c_3^{-1}, \rho_3 c_2^{-1}, \rho_4 c_1^{-1}), \quad \tilde{\delta}_2 = (\mu_{01} \varepsilon_1, \mu_{02} \varepsilon_2, \mu_{03} \varepsilon_3, \mu_{04} \varepsilon_4), \quad (4.14)$$

$$\tilde{\delta}_3 = (\mu_{01} e_1^2 c_4^{-1}, \mu_{02} e_2^2 c_3^{-1}, \mu_{03} e_3^2 c_2^{-1}, \mu_{04} e_4^2 c_1^{-1}), \quad \tilde{\delta}_4 = (\mu_{01} \sigma_1, \mu_{02} \sigma_2, \mu_{03} \sigma_3, \mu_{04} \sigma_4);$$

$$\tilde{\delta}_p = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\delta}_{p\alpha}, \bar{\delta}_{p\alpha}], \quad (4.15)$$

$$\underline{\delta}_{1\alpha} = (1-\alpha)\rho_1 c_4^{-1} + \alpha \rho_2 c_3^{-1}, \quad \bar{\delta}_{1\alpha} = \alpha \rho_3 c_2^{-1} + (1-\alpha)\rho_4 c_1^{-1};$$

$$\underline{\delta}_{2\alpha} = (1-\alpha)\mu_{01} \varepsilon_1 + \alpha \mu_{02} \varepsilon_2, \quad \bar{\delta}_{2\alpha} = \alpha \mu_{03} \varepsilon_3 + (1-\alpha)\mu_{04} \varepsilon_4;$$

$$\underline{\delta}_{3\alpha} = (1-\alpha)\mu_{01} e_1^2 c_4^{-1} + \alpha \mu_{02} e_2^2 c_3^{-1}, \quad \bar{\delta}_{3\alpha} = \alpha \mu_{03} e_3^2 c_2^{-1} + (1-\alpha)\mu_{04} e_4^2 c_1^{-1};$$

$$\underline{\delta}_{4\alpha} = (1-\alpha)\mu_{01} \sigma_1 + \alpha \mu_{02} \sigma_2, \quad \bar{\delta}_{4\alpha} = \alpha \mu_{03} \sigma_3 + (1-\alpha)\mu_{04} \sigma_4.$$

С использованием представлений (4.14), (4.15) и α -уровневой модификации эвристического принципа расширения, для искомым нечетко-множественных эндогенных характеристик модели на основе соотношений (4.14), (4.15) записываются представления $\tilde{V}_f^{(j)}(\omega)$, $\tilde{g}_f^{(j)}(\omega)$ вида

$$\tilde{V}_f^{(j)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{j\alpha}(\omega), \bar{V}_{j\alpha}(\omega)], \quad \tilde{g}_f^{(j)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{g}_{j\alpha}(\omega), \bar{g}_{j\alpha}(\omega)], \quad (4.16)$$

$$\underline{V}_{j\alpha}(\omega) = \inf \{F_{V^*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\},$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &\in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 &\in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 &\in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 &\in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}] \end{aligned}$$

$$\bar{V}_{j\alpha}(\omega) = \sup \{F_{V^*}^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\},$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &\in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 &\in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 &\in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 &\in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}] \end{aligned}$$

$$\underline{g}_{j\alpha}(\omega) = \inf \{F_g^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\}$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &\in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 &\in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 &\in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 &\in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}] \end{aligned}$$

$$\bar{g}_{j\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\delta_1 \in [\underline{\delta}_{1\alpha}, \bar{\delta}_{1\alpha}] \\ \delta_2 \in [\underline{\delta}_{2\alpha}, \bar{\delta}_{2\alpha}] \\ \delta_3 \in [\underline{\delta}_{3\alpha}, \bar{\delta}_{3\alpha}] \\ \delta_4 \in [\underline{\delta}_{4\alpha}, \bar{\delta}_{4\alpha}]}} \{F_g^{(j)}(\omega, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)\}.$$

Представленный метод компьютерно реализован в разработанном программном приложении, с использованием которого осуществлен представляемый вычислительный эксперимент, относящийся к исследованию модели распространения связанных сдвиговых электроупругих волн с колебательными упругими смещениями $u_2(x_1, t)$ и компонентой вектора напряженности электрического поля $E_3(x_1, t)$. Нечетко-интервальные описания для обладающих разбросами экспериментальных значений исходных физико-механических параметров [350] исследуемой модели задаются в виде

$$\tilde{\rho} = (1.79\rho_*, 1.803\rho_*, 1.805\rho_*, 1.809\rho_*), \quad \tilde{\mu}_0 = (1.18\mu_*, 1.24\mu_*, 1.27\mu_*, 1.32\mu_*), \quad (4.16)$$

$$\tilde{e} = (9.44e_*, 9.52e_*, 9.57e_*, 9.64e_*), \quad \varepsilon = (14.8\varepsilon_*, 15.4\varepsilon_*, 15.6\varepsilon_*, 16.1\varepsilon_*),$$

$$\tilde{\sigma} = (0.15\sigma_*, 0.2\sigma_*, 0.22\sigma_*, 0.26\sigma_*), \quad \tilde{c} = (0.582c_*, 0.59c_*, 0.596c_*, 0.599c_*),$$

$$\rho_* = 10^3[\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}], \mu_* = 10^{-6}[\text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}], \sigma_* = 10^{-9}[\text{ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}], c_* = 10^{10}[\text{Па}],$$

$$\varepsilon_* = 8.85 \cdot 10^{-12}[\text{Ф} \cdot \text{м}^{-1}], e_* = 1[\text{Кл} \cdot \text{м}]$$

Рассчитываемые на основе соотношений (4.16) параметрические зависимости охарактеризованы на рисунках 4.1 и 4.2, описывающих, в частности, диапазоны значений нечетко-множественных эндогенных величин $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega)$, $\tilde{g}_f^{(2)}(\omega)$ для различных уровней частотного параметра, в том числе границы $\mu=0$ области носителя и границы $\mu=1$ модальной области вариации значений для в наибольшей мере достоверных величин параметров $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega)$, $\tilde{g}_f^{(2)}(\omega)$. На представленном тонированном изображении более светлым тонам соответствует снижение показателя принадлежности (меры достоверности достижения эндогенным параметром соответствующего значения). Расчеты свидетельствуют о крайне несущественной для рассматриваемой области задания параметров частотной зависимости получаемых оценок.

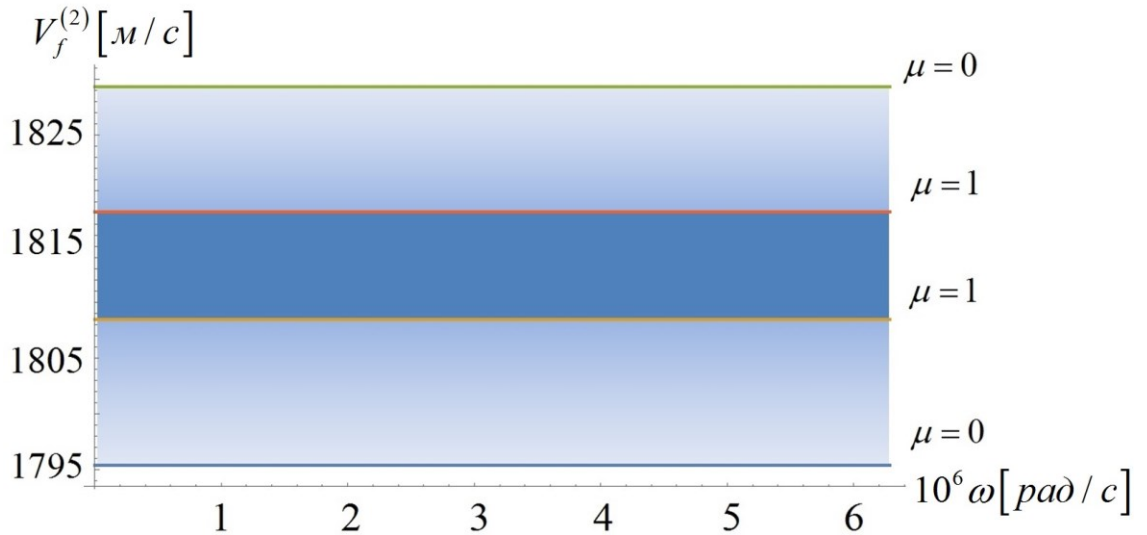


Рис. 4.1. Параметрическое нечетко-множественное описание возможных значений фазовых скоростей $V_f^{(2)}(\omega)$.

Профиль функций принадлежности нечетко-множественных экзогенных характеристик $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega)$, $\tilde{\mathcal{G}}_f^{(2)}(\omega)$ для значения $\omega = \omega_{\max}$ из отраженного на рисунках 4.1, 4.2 диапазона варьирования частотного параметра изображен на рисунках 4.3 и 4.4.

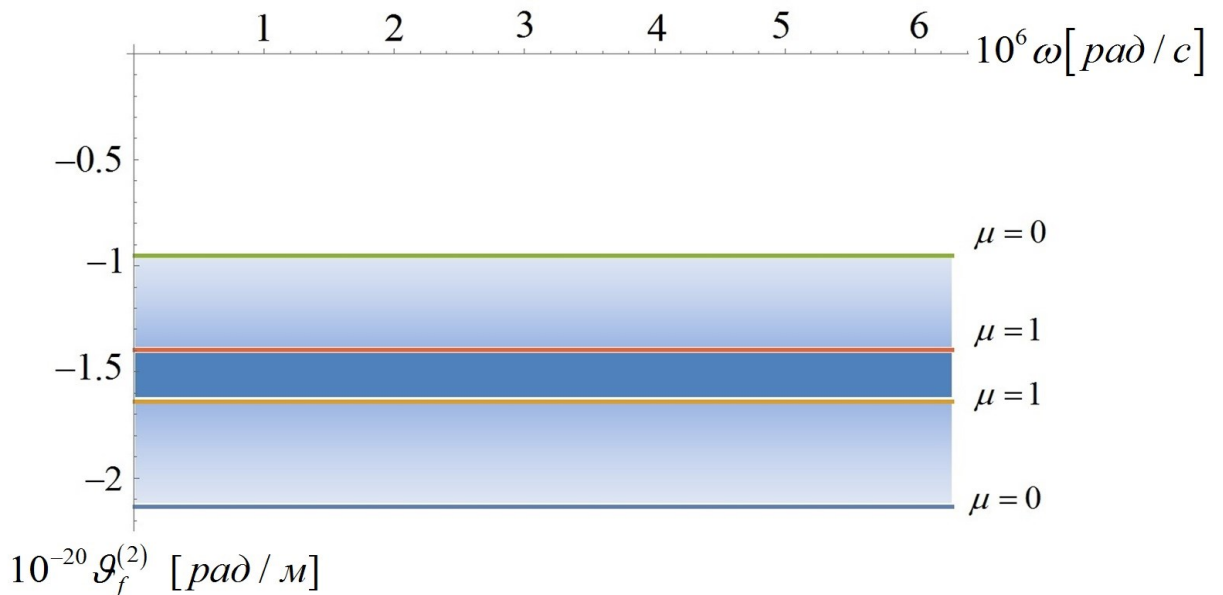
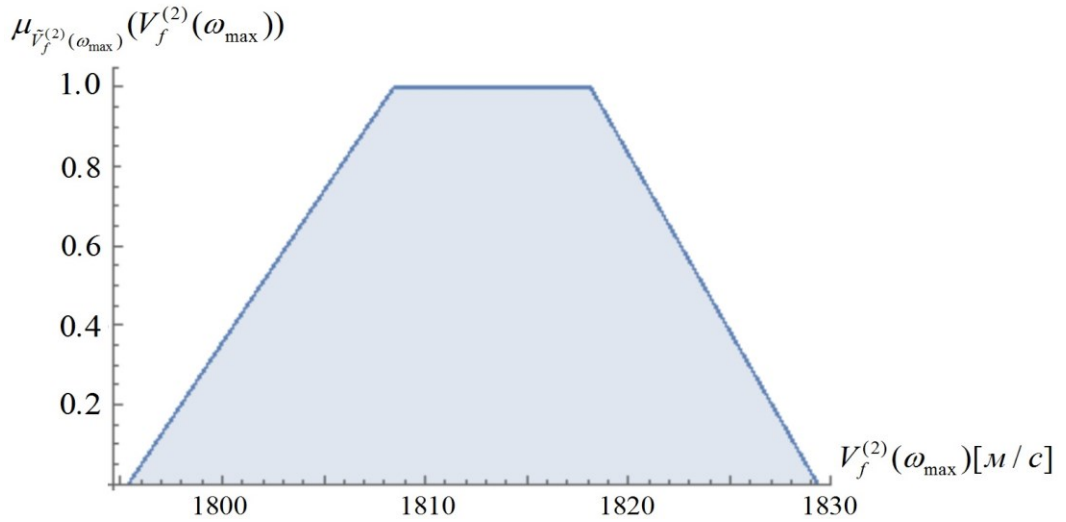
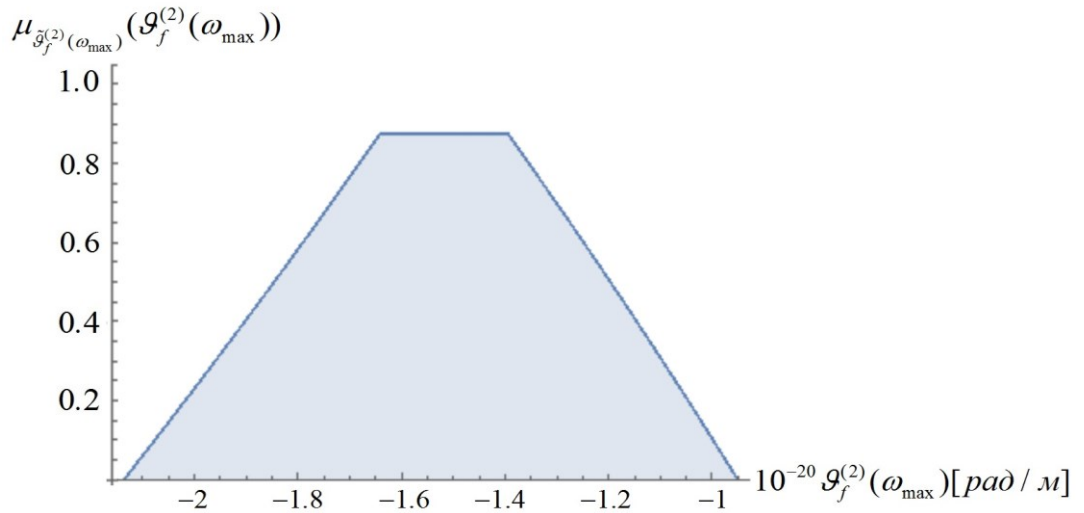


Рис. 4.2. Параметрическое нечетко-множественное описание возможных значений параметра затухания $\mathcal{G}_f^{(2)}(\omega)$.

Рис. 4.3. Профиль функции принадлежности $\tilde{V}_f^{(2)}(\omega_{\max})$ Рис. 4.4. Профиль функции принадлежности $\tilde{g}_f^{(2)}(\omega_{\max})$

В рассматриваемой далее модели распространяющихся без дисперсии и энергетического рассеяния продольных связанных электроупругих стационарных волн циклической частоты ω с компонентой $E_3(x_1, t)$ вектора напряженности электрического поля и компонентой $u_1(x_1, t)$ вектора колебательных упругих смещений вдоль направления Ox_1 , ориентированного в плоскости изотропии диэлектрической пьезокерамической магнитно-изотропной среде класса *6mm* гексагональной системы, эндогенный параметр фазовой скорости, согласно [18], описывается выражением

$$V_f^{(j)} = R_V^{(j)}(\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0) = \sqrt{2}[\mu_0 \varepsilon_{33}(1 + e_{31}^2 c_{11}^{-1} \varepsilon_{33}^{-1}) + \rho c_{11}^{-1}] \quad (4.17)$$

$$+ (-1)^j (\mu_0 \varepsilon_{33} (1 + e_{31}^2 c_{11}^{-1} \varepsilon_{33}^{-1})) - 4 \rho c_{11}^{-1} \mu_0 \varepsilon_{33}^{1/2}]^{-1/2} \quad (j = \overline{1,2})$$

Входными параметрами $\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0$ расчетного соотношения (4.17) соответственно являются плотность, модуль упругости, пьезоэлектрическая постоянная, постоянные диэлектрической и магнитной проницаемости пьезокерамической среды. Ось поляризации в рассматриваемой среде ориентировании по координатному направлению Ox_3 .

Аналогично случаю вышерассмотренной модели сдвиговых волн, при нечетко-интервальном описании обладающих разбросами значений неконтрастных исходных параметров и на базе перехода в (4.17) к нечетко-множественным аргументам путем применения α -уровневой версии эвристического принципа обобщения, для искомого нечетко-множественного эндогенного параметра фазовой скорости волны получено представление

$$\tilde{V}_f^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{j\alpha}, \bar{V}_{j\alpha}] \quad (j = \overline{1,2}), \quad (4.18)$$

$$V_{j\alpha} = \inf_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}] \\ e_{31} \in [\underline{e}_{31\alpha}, \bar{e}_{31\alpha}] \\ \varepsilon_{33} \in [\underline{\varepsilon}_{33\alpha}, \bar{\varepsilon}_{33\alpha}] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}]}} \{R_V^{(j)}(\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0)\},$$

$$\bar{V}_{j\alpha} = \sup_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}] \\ e_{31} \in [\underline{e}_{31\alpha}, \bar{e}_{31\alpha}] \\ \varepsilon_{33} \in [\underline{\varepsilon}_{33\alpha}, \bar{\varepsilon}_{33\alpha}] \\ \mu_0 \in [\underline{\mu}_{0\alpha}, \bar{\mu}_{0\alpha}]}} \{R_V^{(j)}(\rho, c_{11}, e_{31}, \varepsilon_{33}, \mu_0)\};$$

$$\underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \bar{\rho}_\alpha = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4; \quad (4.20)$$

$$\underline{c}_{11\alpha} = (1-\alpha)c_{111} + \alpha c_{112}, \quad \bar{c}_{11\alpha} = \alpha c_{113} + (1-\alpha)c_{114};$$

$$\underline{e}_{31\alpha} = (1-\alpha)e_{311} + \alpha e_{312}, \quad \bar{e}_{31\alpha} = \alpha e_{313} + (1-\alpha)e_{314};$$

$$\underline{\varepsilon}_{33\alpha} = (1-\alpha)\varepsilon_{331} + \alpha \varepsilon_{332}, \quad \bar{\varepsilon}_{33\alpha} = \alpha \varepsilon_{333} + (1-\alpha)\varepsilon_{334};$$

$$\underline{\mu}_{0\alpha} = (1-\alpha)\mu_{01} + \alpha \mu_{02}, \quad \bar{\mu}_{0\alpha} = \alpha \mu_{03} + (1-\alpha)\mu_{04}.$$

Прикладной интерес представляет также модель распространения стационарных связанных электроупругих ультразвуковых волн в охарактеризованной выше пьезокерамической среде вдоль лежащего в

вертикальной плоскости Ox_1x_3 направления, составляющего с осью поляризации угол θ . Параметрические представления для фазовых скоростей в данном случае имеют вид [18]

$$V_f^{(j)}(\theta) = (2\rho)^{-1/2}(q_j + q_{11} + q_{22})^{1/2} \quad (j = \overline{1,2}), \quad V_f^{(3)}(\theta) = \rho^{-1/2}(l^2((c_{11} - c_{12})/2) + n^2 c_{44})^{1/2}, \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} q_j &= (-1)^j [(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2]^{1/2}, \\ q_{11} &= l^2 c_{11} + n^2 c_{44} + (l^2 n^2 (e_{31} + e_{15})^2 / (l^2 \varepsilon_{11} + n^2 \varepsilon_{33})), \\ q_{12} &= l \cdot n (c_{13} + c_{44} + ((e_{31} + e_{15})(l^2 e_{15} + n^2 e_{33}) / (l^2 \varepsilon_{11} + n^2 \varepsilon_{33}))), \\ q_{22} &= l^2 c_{44} + n^2 c_{33} + ((l^2 e_{15} + n^2 e_{33})^2 / (l^2 \varepsilon_{11} + n^2 \varepsilon_{33})), \quad l = \sin \theta, \quad n = \cos \theta. \end{aligned}$$

В число экзогенных параметров соотношений (4.21) входят упругие постоянные $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$, пьезомодули e_{15}, e_{31}, e_{33} , диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ и плотность ρ рассматриваемой пьезокерамической среды; угловой параметр направления распространения изменяется в диапазоне $\theta \in [0, \pi/2]$.

При получении нечетко-множественных оценок для значений фазовых скоростей связанных электроупругих волн в пьезокерамической среде, в случае интерпретации углового параметра распространения $\theta \in [0, \pi/2]$ как точно задаваемой контрастной величины, реализуемое исследование включает этапы:

– анализа знакоопределенности для частных производных по отдельно взятым аргументам от функций

$$\begin{aligned} V_f^{(j)}(\theta) &= G_j(\theta, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}, e_{15}, e_{31}, e_{33}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}) = \\ &= G_j(\theta, \rho, q_1, q_2, q_{11}, q_{22}, q_{12}), \quad V_f^{(3)}(\theta) = G_3(\theta, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}), \end{aligned} \quad (4.22)$$

в областях их определения с устанавливаемыми свойствами

$$\partial G_3 / \partial \rho < 0, \quad \partial G_3 / \partial c_{11} > 0, \quad \partial G_3 / \partial c_{12} < 0, \quad \partial G_3 / \partial c_{44} > 0, \quad \partial G_j / \partial \rho < 0; \quad (4.24)$$

– поэтапное определение нечетко-множественных характеристик $\tilde{q}_1(\theta), \tilde{q}_2(\theta), \tilde{q}_{11}(\theta), \tilde{q}_{22}(\theta), \tilde{q}_{12}(\theta)$ в выражении (4.21) на базе использования представлений кортежами $\tilde{c}_{11} = (c_{111}, c_{112}, c_{113}, c_{114}), \quad \tilde{c}_{12} = (c_{121}, c_{122}, c_{123}, c_{124}),$
 $\dots, \tilde{e}_{15} = (e_{151}, e_{152}, e_{153}, e_{154}), \dots, \tilde{\varepsilon}_{11} = (\varepsilon_{111}, \varepsilon_{112}, \varepsilon_{113}, \varepsilon_{114}), \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = (\varepsilon_{331}, \varepsilon_{332}, \varepsilon_{333}, \varepsilon_{334})$ для экзогенных

нечетко-интервальных параметров $\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{13}, \tilde{c}_{33}, \tilde{c}_{44}, \tilde{e}_{15}, \tilde{e}_{31}, \tilde{e}_{33}, \tilde{e}_{11}, \tilde{e}_{33}$ и применения аппарата арифметики нечетких трапецеидальных интервалов;

– получение представлений для рассчитанных нечетко-интервальных величин $\tilde{q}_1(\theta), \tilde{q}_2(\theta), \tilde{q}_{11}(\theta), \tilde{q}_{22}(\theta), \tilde{q}_{12}(\theta)$ суперпозициями множеств α – уровня;

– применение α – уровневой модификации эвристического принципа расширения для получения нечетко-множественных параметрических описаний эндогенных характеристик фазовых скоростей $V_f^{(j)}(\theta)$ ($j = \overline{1,2}$), $V_f^{(3)}(\theta)$

$$\tilde{V}_f^{(j)}(\theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{j\alpha}(\theta), \overline{V}_{j\alpha}(\theta)], \quad V_f^{(3)}(\theta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{3\alpha}(\theta), \overline{V}_{3\alpha}(\theta)], \quad (4.25)$$

$$\underline{V}_{j\alpha}(\theta) = \inf_{\substack{q_1 \in [q_{1\alpha}, \overline{q}_{2\alpha}] \\ q_2 \in [q_{2\alpha}, \overline{q}_{2\alpha}] \\ q_{11} \in [q_{11\alpha}, \overline{q}_{11\alpha}] \\ q_{22} \in [q_{22\alpha}, \overline{q}_{22\alpha}] \\ q_{12} \in [q_{12\alpha}, \overline{q}_{12\alpha}]}} \{G_j(\theta, \overline{\rho}_\alpha, q_1, q_2, q_{11}, q_{22}, q_{12})\}, \quad (4.26)$$

$$\overline{V}_{j\alpha}(\theta) = \sup_{\substack{q_1 \in [q_{1\alpha}, \overline{q}_{2\alpha}] \\ q_2 \in [q_{2\alpha}, \overline{q}_{2\alpha}] \\ q_{11} \in [q_{11\alpha}, \overline{q}_{11\alpha}] \\ q_{22} \in [q_{22\alpha}, \overline{q}_{22\alpha}] \\ q_{12} \in [q_{12\alpha}, \overline{q}_{12\alpha}]}} \{G_j(\theta, \underline{\rho}_\alpha, q_1, q_2, q_{11}, q_{22}, q_{12})\}$$

$$\underline{V}_{3\alpha}(\theta) = G_3(\theta, \overline{\rho}_\alpha, \underline{c}_{11\alpha}, \overline{c}_{12\alpha}, \underline{c}_{44\alpha}), \quad \overline{V}_{3\alpha}(\theta) = G_3(\theta, \underline{\rho}_\alpha, \overline{c}_{11\alpha}, \underline{c}_{12\alpha}, \overline{c}_{44\alpha}). \quad (4.27)$$

В численном эксперименте по расчету нечетко-множественных характеристик фазовых скоростей связанных электроупругих волн $\tilde{V}_f^{(3)}(\theta)$ в пьезокерамической среде с неконтрастными, имеющими ошибки разбросов экспериментальными значениями физико-механических параметров, реализованном с применением разработанного программного приложения, рассмотрен случай материала в виде пьезокерамики $BaTiO_3$, [350] для параметров которой при формировании их нечетко-интервальных описаний учтены задаваемые в справочных материалах уровни разбросов данных о физико-механических свойствах:

$$\tilde{\rho} = (1.79\rho_*, 1.803\rho_*, 1.805\rho_*, 1.809\rho_*), \quad \tilde{c}_{11} = (16.52c_*, 16.6c_*, 16.67c_*, 16.78c_*), \quad (4.28)$$

$$\tilde{c}_{12} = (7.54c_*, 7.62c_*, 7.66c_*, 7.72c_*), \quad \tilde{c}_{44} = (4.26c_*, 4.29c_*, 4.31c_*, 4.38c_*).$$

Результаты расчета нечетко-множественной параметрической

характеристики $\tilde{V}_f^{(3)}(\theta)$ $\theta \in [0, \pi/2]$ для описанного выше варианта задания неконтрастных физико-механических экзогенных параметров даны на рисунке 4.5 в форме распределений границ $\mu=1$ модальной области и границ $\mu=0$ носителя нечетко-множественной величины $\tilde{V}_f^{(3)}(\theta)$ для каждого значения углового параметра распространения в рассматриваемом интервале. Также на рисунках. 4.6 и 4.7 представлены результаты расчета профилей функций принадлежности для нечетко-множественных оценок $\tilde{V}_f^{(3)}(0)$ и $\tilde{V}_f^{(3)}(\pi/2)$. Получаемые на основе применения метода оценки характеризуют диапазоны предельно возможных отклонений в значениях исследуемых волновых характеристик при задаваемых разбросах значений неконтрастных экзогенных параметров и описывают границы интервалов в максимальной степени достоверных значений эндогенных параметров.

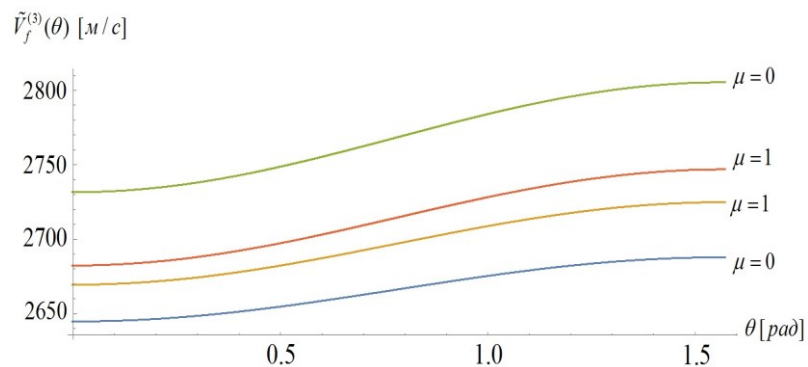


Рис. 4.5. Параметрическое нечетко-множественное описание диапазонов возможных значений фазовых скоростей $V_f^{(3)}(\theta)$.

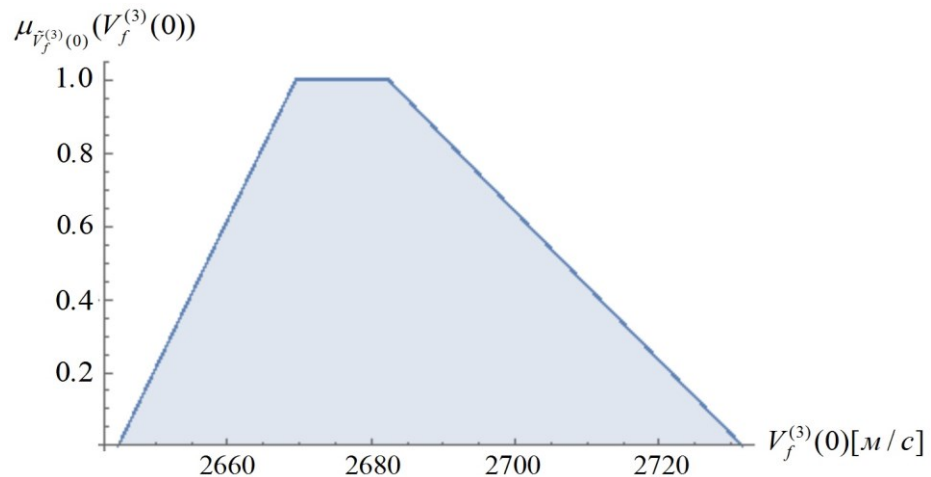


Рис. 4.6. Профиль функции принадлежности $\tilde{V}_f^{(3)}(0)$.

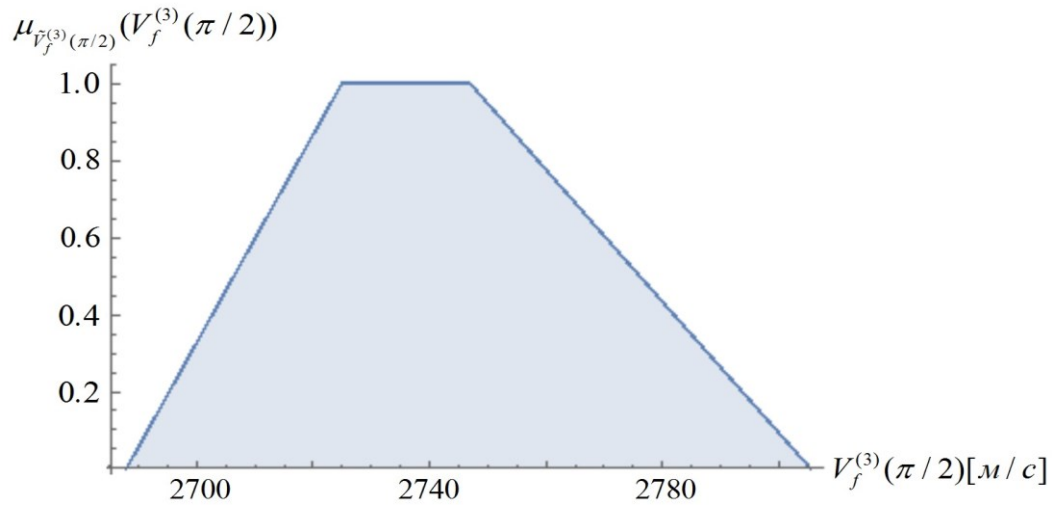


Рис. 4.7. Профиль функции принадлежности $\tilde{V}_f^{(3)}(\pi/2)$.

Еще одной задачей для процессов распространения объемных волн деформаций является идентификация расстояния h , которое проходит фронт волны по нечетким экспериментальным данным о времени его задержки. В предположении, что экспериментально устанавливаемое время задержки диагностического импульса $\Delta \tilde{t}$ с разбросами значений описывается нормальной трапецеидальной нечетко-интервальной величиной с реперными точками $(\Delta t_{1F}, \Delta t_{1M}, \Delta t_{2M}, \Delta t_{2F})$, расстояние, проходимое фронтом продольной объемной волны в изотропной среде с нечеткими физико-механическими параметрами, описывается нечетко-множественной величиной

$$\begin{aligned} \tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} & ((1-\alpha)((\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_4^{(-)})^{1/2} + \\ & + \alpha((\lambda_2 + 2\mu_2)/\rho_3)^{1/2})(\alpha\Delta t_{1M} + (1-\alpha)\Delta t_{1F}), (\alpha((\lambda_3 + 2\mu_3)/\rho_2)^{1/2} + \\ & + (1-\alpha)((\lambda_4 + 2\mu_4)/\rho_1)^{1/2})(\alpha\Delta t_{2M} + (1-\alpha)\Delta t_{2F}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Направлением реализованных исследований является также применение нечетко-множественного подхода при теоретическом анализе закономерностей распространения объемных волн деформаций в упруго-пористых водонасыщенных средах с учетом неопределенности значений экзогенных параметров моделируемых процессов. Результаты такого исследования в рамках применения модификаций теории многокомпонентных сред Био [355], как базы

для описания параметров дисперсии упругих волн в геоматериалах, являются одним из важных элементов научной базы прикладных исследований в области сейсмоакустического прогнозирования и контроля состояний разрабатываемых геомассивов [1, 14, 133, 165, 173, 175]. Наряду с моделями, представленными в вышеуказанных публикациях по рассматриваемой проблематике, в качестве основы для эффективного описания дисперсионных свойств упругих волн в сатурированных горных породах применима представленная в [355] модель длинноволнового динамического деформирования насыщенной жидкостью статистически изотропной упругой среды. В качестве гипотез модели вводятся предположения об интерпретации породного каркаса как составленного из несжимаемых частиц идеально упругого пористого континуума; о сплошности пор; о сжимаемости жидкости и применимости закона Дарси для описания движения жидкости в порах; о пренебрежении температурными эффектами в рассматриваемых процессах; о превышении длинами рассматриваемых волн деформаций максимального размера пор. При введении в рассматриваемой пористо-упругой насыщенной многокомпонентной среде безразмерных отнесенных к нормирующему параметру R_* прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3$ характеристиками ее волнового деформирования являются векторы смещений $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ для пористого каркаса и смещений $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ для жидкости в порах; параметр пористости n ; параметр давления жидкости в порах u_w ; параметр объемной сжимаемости жидкости E_w ; параметры плотности материала каркаса ρ_s и жидкости ρ_w соответственно; параметры Ламе изотропного материала каркаса λ, μ ; параметр проницаемости k . Система соотношений рассматриваемой модели [355], во-первых, включает уравнение неразрывности для жидкости в порах

$$n \cdot \operatorname{div} \dot{\vec{u}} + (1 - n) \cdot \operatorname{div} \dot{\vec{w}} - n \dot{u}_w / E_w = 0. \quad (4.30)$$

Выделятся два варианта учета инерционных свойств жидкостного заполнения [355]. Согласно первому, на основании предположения о равномерности распределения направлений пролегания участков пор по пространственной ориентации, только треть массы жидкости в единице объема

насыщенной среды движется с микроскопическим ускорением, ориентированным вдоль вектора перемещения поровой жидкости, а две трети объема имеют ускорение скелета. Во втором варианте материал каркасного скелета и заполняющая поры жидкость являются континуальными сплошными средами с параметрами плотности $\rho_1 = (1-n)\rho_s$ и $\rho_2 = n\rho_w$ соответственно, а их ускорения не зависят друг от друга.

В рамках первого предположения уравнения движения для каркаса и жидкости в порах имеют тензорную запись вида

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + (u_w)_{,i} &= (\rho_1 + (2/3)\rho_2)\dot{w}_i + (1/3)\rho_2\ddot{u}_i, \\ (u_w)_{,i} - b(\dot{u}_i - \dot{w}_i) &= (2/3)\rho_2\dot{w}_i + (1/3)\rho_2\ddot{u}_i;\end{aligned}\quad (4.31)$$

в рамках второго предположения

$$\sigma_{ij,j} + (u_w)_{,i} = \rho_1\dot{w}_i + \rho_2\ddot{u}_i, \quad (u_w)_{,i} - b(\dot{u}_i - \dot{w}_i) = \rho_2\ddot{u}_i, \quad (4.32)$$

где $b = n\rho_w g/k$, g – ускорение свободного падения.

Уравнения (4.30), (4.31) с учетом представления $\sigma_{ij} = 2\mu(w_{i,j} + w_{j,i}) + \lambda\delta_{ij}\text{div}\vec{w}$ преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\mu\nabla^2\vec{w} + (\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div}\vec{w}) + \text{grad}(\vec{u}_w) &= (\rho_1 + (2/3)\rho_2)\dot{\vec{w}} + (1/3)\rho_2\ddot{\vec{u}}, \\ \text{grad}(u_w) - b(\dot{\vec{u}} - \dot{\vec{w}}) &= (2/3)\rho_2\dot{\vec{w}} + (1/3)\rho_2\ddot{\vec{u}},\end{aligned}\quad (4.33)$$

и на базе введения выражений через волновые потенциалы

$$\vec{w} = \text{grad}\varphi_1 + \text{rot}\psi_1, \quad \vec{u} = \text{grad}\varphi_2 + \text{rot}\psi_2, \quad \text{div}\psi_1 = \text{div}\psi_2 = 0, \quad (4.34)$$

сводятся к системам волновых уравнений, описывающих распространение P и S волн в рассматриваемой многокомпонентной насыщенной среде в рамках первой гипотезы формирования сил инерции

$$\nabla^2\dot{\varphi}_1 = (n/(1-n))(-\nabla^2\varphi_2 + \dot{u}_w/E_w), \quad \nabla_{*P}^2\varphi_1 = (\lambda + 2\mu)^{-1}(-u_w + (1/3)\rho_2\dot{\varphi}_2), \quad (4.35)$$

$$u_w + b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = (2/3)\rho_2\dot{\varphi}_1 + (1/3)\rho_2\dot{\varphi}_2, \quad \nabla_{*q}^2 = \nabla^2 - v_q^{-2}\partial^2/\partial t^2,$$

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2; \quad \nabla_{*S}^2\psi_1 = (\rho_2/3\mu)\psi_2, \quad b(\dot{\psi}_1 - \dot{\psi}_2) = (2/3)\rho_2\dot{\psi}_1 + (1/3)\rho_2\dot{\psi}_2;$$

v_q ($q = P, S$) – фазовые скорости объемных гармонических упругих волн в материале каркаса. Далее, с введением для потенциалов P – волн в сатурированной среде представлений

$$\varphi_j = A_j \exp[-i(\beta \vec{r} \cdot \vec{n}_\beta - \omega t)], \quad (4.36)$$

и для потенциалов S – волн в сатурированной среде представлений

$$\psi_j = B_j \exp[-i(\beta \vec{r} \cdot \vec{n}_\beta - \omega t)], \quad (4.37)$$

в которых A_j, B_j – амплитудные коэффициенты; β – волновые числа; \vec{r} – радиус-вектор; \vec{n}_β – вектор нормали к фронту волны; ω – циклическая частота волны; формулируются искомые представления для фазовых скоростей V_q и коэффициентов затухания Q_q исследуемых волн. Для волн S – типа

$$\begin{aligned} V_S &= \Phi_S(\omega, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k) = & (4.38) \\ &= [\text{Re}[\{(\rho_1 \rho_2^2 \omega^2 (9b^2)^{-1} + \rho_1 + \rho_2 + i \rho_2^2 \omega (3b)^{-1}) / (\mu(1 + \rho_2^2 \omega^2 (9b^2)^{-1}))\}^{1/2}]]^{-1}, \\ Q_S &= \Psi_S(\omega, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k) = \\ &= \omega [\text{Im}[\{(\rho_1 \rho_2^2 \omega^2 (9b^2)^{-1} + \rho_1 + \rho_2 + i \rho_2^2 \omega (3b)^{-1}) / (\mu(1 + \rho_2^2 \omega^2 (9b^2)^{-1}))\}^{1/2}]]^{-1}; \end{aligned}$$

для волн P – типа

$$\begin{aligned} V_{P1} &= \Phi_{P1}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) = [\text{Re}\{(-\eta + (\eta^2 - 4\tau\zeta)^{1/2}) / (2\zeta)\}^{1/2}]^{-1}, & (4.39) \\ Q_{P1} &= \Psi_{P1}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) = \omega [\text{Im}\{(-\eta + (\eta^2 - 4\tau\zeta)^{1/2}) / (2\zeta)\}^{1/2}]^{-1}; \\ V_{P2} &= \Phi_{P2}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) = [\text{Re}\{(-\eta - (\eta^2 - 4\tau\zeta)^{1/2}) / (2\zeta)\}^{1/2}]^{-1}, \\ Q_{P2} &= \Psi_{P2}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) = \omega [\text{Im}\{(-\eta - (\eta^2 - 4\tau\zeta)^{1/2}) / (2\zeta)\}^{1/2}]^{-1}; \\ \zeta &= (\lambda + 2\mu)\omega / b, \quad \tau = (\rho_1 \rho_2 \omega (3b)^{-1} + i(\rho_1 + \rho_2)) / E_w, \\ \eta &= -[(\rho_1 + (\lambda + 2\mu)\rho_2 (3E_w)^{-1})(\omega / b) + i(n^{-1} + (\lambda + 2\mu) / E_w)]. \end{aligned}$$

На базе соотношений (4.38) – (4.39) в работе [355] описываются некоторые приближенные способы идентификации отдельных характеристик рассматриваемой многокомпонентной сатурированной среды по данным экспериментальных измерений скоростей продольных и поперечных волн. Описанные приемы могут быть в рамках рассматриваемой версии детерминистической модели также дополнены алгоритмом определения идентифицируемых характеристик с использованием экспериментальных данных замеров описываемых представлением (4.38) величин $V_S^{(j)}$ скоростей сдвиговых

волн при нескольких значениях частотного параметра ω_j . Для этого соотношения (4.38) записываются в форме

$$(V_S^{(j)})^2 = \mu(1 + m\omega_j^2)(\rho_1(1 + m\omega_j^2) + \rho_2)^{-1}, \quad m = \rho_2^2 / (9b^2) = (n^2 \rho_w^2 / (9n^2 \rho_w^2 g^2 k^{-2})) = k^2 / (9g^2),$$

а затем преобразуются к виду

$$\mu(1 + m\omega_j^2) = (\rho_1(1 + m\omega_j^2) + \rho_2)(V_S^{(j)})^2, \quad \mu = (\rho_1 + \rho_2(1 + m\omega_j^2)^{-1})(V_S^{(j)})^2. \quad (4.40)$$

Далее вводится предположение о возможности экспериментального измерения скоростей $V_S^{(j)}$ ($j = \overline{1,4}$) для четырех волн сдвигового типа с соответствующими частотами ω_j ($j = \overline{1,4}$) в рассматриваемой многокомпонентной сатурированной среде, а также о возможности экспериментального измерения параметра плотности многокомпонентной среды $\rho_e = \rho_1 + \rho_2$ и экспериментального измерения параметра плотности для заполняющей жидкости ρ_{we} . С использованием представления (4.40) записывается выражение

$$(\rho_1 + \rho_2(1 + m\omega_1^2)^{-1})(V_S^{(1)})^2 = (\rho_1 + \rho_2(1 + m\omega_2^2)^{-1})(V_S^{(2)})^2,$$

из которого, в свою очередь, может быть получено соотношение

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \mathcal{G}(m, \omega_1, \omega_2, V_S^{(1)}, V_S^{(2)})\rho_1, \quad \mathcal{G}(m, \omega_1, \omega_2, V_S^{(1)}, V_S^{(2)}) = \\ &= ((V_S^{(2)})^2 - (V_S^{(1)})^2)(1 + m\omega_1^2)(1 + m\omega_2^2)(m(\omega_2^2(V_S^{(1)})^2 - \omega_1^2(V_S^{(2)})^2) + (V_S^{(1)})^2 + (V_S^{(2)})^2)^{-1} \end{aligned}$$

Затем для волны частоты ω_4 из (4.40) следует

$$\mu = \chi(m, \omega_1, \omega_2, \omega_4, V_S^{(1)}, V_S^{(2)}, V_S^{(4)})\rho_1, \quad (4.41)$$

$$\chi(m, \omega_1, \omega_2, \omega_4, V_S^{(1)}, V_S^{(2)}, V_S^{(4)}) = (1 + \mathcal{G}(m, \omega_1, \omega_2, V_S^{(1)}, V_S^{(2)})(1 + m\omega_4^2)^{-1})(V_S^{(4)})^2,$$

и далее с использованием соотношения (4.41), записываемого для случая волн с частотами ω_1 и ω_3 , формулируется алгебраическое уравнение для нахождения значения параметра $m = F_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, V_S^{(1)}, V_S^{(2)}, V_S^{(3)})$

$$(1 + \mathcal{G}(m)(1 + m\omega_1^2)^{-1})(V_S^{(1)})^2 = (1 + \mathcal{G}(m)(1 + m\omega_3^2)^{-1})(V_S^{(3)})^2, \quad (4.42)$$

принимаящее после преобразований вид полиномиального кубического уравнения с корнями, определяемыми по формулам Кардана.

После нахождения значения параметра m с учетом условия $\rho_e = (1-n)\rho_s + n\rho_{we}$ и соотношения $\mathcal{G}(m)(1-n)\rho_s = n\rho_{we}$, для величин ρ_s и n могут быть записаны представления

$$\rho_s = F_\rho(\rho_e, \rho_{we}, m), \quad n = F_n(\rho_e, \rho_{we}, m), \quad (4.43)$$

следующие из квадратного уравнения

$$\rho_{we}\rho_s^2 + [\mathcal{G}(m)(\rho_e - \rho_{we}) - \rho_{we}(\rho_e + \rho_{we})]\rho_s + \rho_e\rho_{we}^2 = 0 \quad (4.44)$$

и из выражения

$$n = (\rho_e - \rho_s)/(\rho_{we} - \rho_s). \quad (4.45)$$

Расчетные соотношения детерминистической версии рассмотренной модели являются основой для получения оценок влияния разбросов в значениях экзогенных параметров на исследуемые геоакустические характеристики на основе перехода в указанных соотношениях к нечетко-множественным аргументам с применением модифицированной α – уровневой версии эвристического принципа обобщения. При получении нечетких оценок в модели анализа дисперсионных свойств геоакустических волн в многокомпонентной сатурированной среде для совокупности исходных параметров $\lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w$ осуществляется переход к нечетко-интервальным описаниям $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\rho}_s, \tilde{\rho}_w, \tilde{n}, \tilde{k}, \tilde{E}_w$ с заданием соответствующих кортежей границ носителей и модальных значений, а также разложений по альфа-срезам

$$\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad \tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \quad \underline{\lambda}_\alpha = (1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \quad \bar{\lambda}_\alpha = \alpha\lambda_3 + (1-\alpha)\lambda_4; \quad (4.46)$$

$$\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \quad \underline{\mu}_\alpha = (1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \quad \bar{\mu}_\alpha = \alpha\mu_3 + (1-\alpha)\mu_4;$$

$$\tilde{\rho}_s = (\rho_{s1}, \rho_{s2}, \rho_{s3}, \rho_{s4}), \quad \tilde{\rho}_s = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{s\alpha}, \bar{\rho}_{s\alpha}], \quad \underline{\rho}_{s\alpha} = (1-\alpha)\rho_{s1} + \alpha\rho_{s2}, \quad \bar{\rho}_{s\alpha} = \alpha\rho_{s3} + (1-\alpha)\rho_{s4};$$

$$\tilde{\rho}_w = (\rho_{w1}, \rho_{w2}, \rho_{w3}, \rho_{w4}), \quad \tilde{\rho}_w = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{w\alpha}, \bar{\rho}_{w\alpha}], \quad \underline{\rho}_{w\alpha} = (1-\alpha)\rho_{w1} + \alpha\rho_{w2}, \quad \bar{\rho}_{w\alpha} = \alpha\rho_{w3} + (1-\alpha)\rho_{w4};$$

$$\tilde{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4), \quad \tilde{n} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{n}_\alpha, \bar{n}_\alpha], \quad \underline{n}_\alpha = (1-\alpha)n_1 + \alpha n_2, \quad \bar{n}_\alpha = \alpha n_3 + (1-\alpha)n_4;$$

$$\tilde{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4), \quad \tilde{k} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{k}_\alpha, \bar{k}_\alpha], \quad \underline{k}_\alpha = (1-\alpha)k_1 + \alpha k_2, \quad \bar{k}_\alpha = \alpha k_3 + (1-\alpha)k_4;$$

$$\tilde{E}_w = (E_{w1}, E_{w2}, E_{w3}, E_{w4}), \quad \tilde{E}_w = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{E}_{w\alpha}, \bar{E}_{w\alpha}], \quad \underline{E}_{w\alpha} = (1-\alpha)E_{w1} + \alpha E_{w2}, \quad \bar{E}_{w\alpha} = \alpha E_{w3} + (1-\alpha)E_{w4}.$$

Далее с применением операций неидемпотентной арифметики нечетких интервалов формируются нечетко-интервальные представления характеристик ρ_1, ρ_2 :

$$\tilde{\rho}_1 = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}), \quad \tilde{\rho}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{1\alpha}, \bar{\rho}_{1\alpha}], \quad \underline{\rho}_{1\alpha} = (1-\alpha)\rho_{11} + \alpha\rho_{12}, \quad \bar{\rho}_{1\alpha} = \alpha\rho_{13} + (1-\alpha)\rho_{14}, \quad (4.47)$$

$$\rho_{11} = (1-n_4)\rho_{s1}, \quad \rho_{21} = (1-n_3)\rho_{s2}, \quad \rho_{31} = (1-n_2)\rho_{s3}, \quad \rho_{41} = (1-n_1)\rho_{s4};$$

$$\tilde{\rho}_2 = (\rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{23}, \rho_{24}), \quad \tilde{\rho}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{2\alpha}, \bar{\rho}_{2\alpha}], \quad \underline{\rho}_{2\alpha} = (1-\alpha)\rho_{21} + \alpha\rho_{22}, \quad \bar{\rho}_{2\alpha} = \alpha\rho_{23} + (1-\alpha)\rho_{24},$$

$$\rho_{21} = n_1\rho_{w1}, \quad \rho_{22} = n_2\rho_{w2}, \quad \rho_{23} = n_3\rho_{w3}, \quad \rho_{24} = n_4\rho_{w4}.$$

Применение модифицированной α – уровневой версии эвристического принципа обобщения в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в представлении

$$V_s(\omega) = \Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k) = (\mu(1 + (k^2/9g^2)\omega^2)(\rho_1(1 + (k^2/9g^2)\omega^2) + \rho_2)^{-1})^{1/2} \quad (4.48)$$

с учетом справедливых во всей области определения $\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)$ свойств

$$\partial\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)/\partial\mu > 0, \quad \partial\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)/\partial\rho_1 < 0, \quad (4.49)$$

$$\partial\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)/\partial\rho_2 < 0, \quad \partial\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)/\partial k > 0,$$

позволяет получить в рассматриваемом случае нечетко-множественную оценку вида

$$\tilde{V}_s(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{s\alpha}(\omega), \bar{V}_{s\alpha}(\omega)], \quad (4.50)$$

$$\underline{V}_{s\alpha}(\omega) = (\underline{\mu}_\alpha(1 + (\underline{k}_\alpha^2/9g^2)\omega^2)(\bar{\rho}_{1\alpha}(1 + (\underline{k}_\alpha^2/9g^2)\omega^2) + \bar{\rho}_{2\alpha})^{-1})^{1/2},$$

$$\bar{V}_{s\alpha}(\omega) = (\bar{\mu}_\alpha(1 + (\bar{k}_\alpha^2/9g^2)\omega_j^2)(\underline{\rho}_{1\alpha}(1 + (\bar{k}_\alpha^2/9g^2)\omega_j^2) + \underline{\rho}_{2\alpha})^{-1})^{1/2}.$$

Аналогично, для частотного параметрического показателя затухания

$$Q_s(\omega) = \Psi_s^*(\omega, \rho_1, \rho_2, k) = \omega(\rho_2\omega(k/3g)(\rho_1(1 + (k^2/9g^2)\omega^2) + \rho_2)^{-1})^{1/2} \quad (4.51)$$

с учетом

$$\partial\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)/\partial\rho_1 < 0, \quad \partial\Phi_s^*(\omega, \mu, \rho_1, \rho_2, k)/\partial\rho_2 > 0,$$

получена нечетко-множественная оценка, описываемая соотношением

$$\tilde{Q}_s(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{Q}_{s\alpha}(\omega), \overline{Q}_{s\alpha}(\omega)], \quad (4.52)$$

$$\underline{Q}_{s\alpha}(\omega) = \inf_{k \in [\underline{k}_\alpha, \overline{k}_\alpha]} \{ \omega(\underline{\rho}_{2\alpha} \omega(k/3g)(\overline{\rho}_{1\alpha}(1+(k^2/9g^2)\omega^2) + \underline{\rho}_{2\alpha})^{-1})^{1/2} \},$$

$$\overline{Q}_{s\alpha}(\omega) = \sup_{k \in [\underline{k}_\alpha, \overline{k}_\alpha]} \{ \omega(\overline{\rho}_{2\alpha} \omega(k/3g)(\underline{\rho}_{1\alpha}(1+(k^2/9g^2)\omega^2) + \overline{\rho}_{2\alpha})^{-1})^{1/2} \}.$$

Для волн P - типа записываются параметрические нечетко-множественные оценки следующего вида:

$$\tilde{V}_{Pj}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{Pj\alpha}(\omega), \overline{V}_{Pj\alpha}(\omega)] \quad (j = \overline{1,2}), \quad (4.53)$$

$$\underline{V}_{Pj\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ \rho_s \in [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}] \\ \rho_w \in [\underline{\rho}_{w\alpha}, \overline{\rho}_{w\alpha}] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha] \\ k \in [\underline{k}_\alpha, \overline{k}_\alpha] \\ E_w \in [\underline{E}_{w\alpha}, \overline{E}_{w\alpha}]}} \{ \Phi_{Pj}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) \},$$

$$\overline{V}_{Pj\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ \rho_s \in [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}] \\ \rho_w \in [\underline{\rho}_{w\alpha}, \overline{\rho}_{w\alpha}] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha] \\ k \in [\underline{k}_\alpha, \overline{k}_\alpha] \\ E_w \in [\underline{E}_{w\alpha}, \overline{E}_{w\alpha}]}} \{ \Phi_{Pj}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) \};$$

$$\tilde{Q}_{Pj}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{Q}_{Pj\alpha}(\omega), \overline{Q}_{Pj\alpha}(\omega)] \quad (j = \overline{1,2}),$$

$$\underline{Q}_{Pj\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ \rho_s \in [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}] \\ \rho_w \in [\underline{\rho}_{w\alpha}, \overline{\rho}_{w\alpha}] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha] \\ k \in [\underline{k}_\alpha, \overline{k}_\alpha] \\ E_w \in [\underline{E}_{w\alpha}, \overline{E}_{w\alpha}]}} \{ \Psi_{Pj}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) \},$$

$$\overline{Q}_{Pj\alpha}(\omega) = \sup_{\substack{\lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] \\ \rho_s \in [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}] \\ \rho_w \in [\underline{\rho}_{w\alpha}, \overline{\rho}_{w\alpha}] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha] \\ k \in [\underline{k}_\alpha, \overline{k}_\alpha] \\ E_w \in [\underline{E}_{w\alpha}, \overline{E}_{w\alpha}]}} \{ \Psi_{Pj}(\omega, \lambda, \mu, \rho_s, \rho_w, n, k, E_w) \}.$$

При получении нечетко-множественных оценок в случае реализации алгоритма геоакустической идентификации физико-механических характеристик

многокомпонентного сатурированного массива на первом этапе формируются нечетко-интервальные описания экзогенных экспериментальных физических параметров ρ_e, ρ_{we} :

$$\tilde{\rho}_e = (\rho_{e1}, \rho_{e2}, \rho_{e3}, \rho_{e4}), \tilde{\rho}_{e\alpha} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{e\alpha}, \overline{\rho}_{e\alpha}], \underline{\rho}_{e\alpha} = (1-\alpha)\rho_{e1} + \alpha\rho_{e2}, \overline{\rho}_{e\alpha} = \alpha\rho_{e3} + (1-\alpha)\rho_{e4}; \quad (4.54)$$

$$\tilde{\rho}_{we} = (\rho_{we1}, \rho_{we2}, \rho_{we3}, \rho_{we4}), \tilde{\rho}_{we\alpha} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{we\alpha}, \overline{\rho}_{we\alpha}], \underline{\rho}_{we\alpha} = (1-\alpha)\rho_{we1} + \alpha\rho_{we2}, \overline{\rho}_{we\alpha} = \alpha\rho_{we3} + (1-\alpha)\rho_{we4};$$

а также параметров геоакустических измерений ω_j ($j = \overline{1,4}$), $V_S^{(j)}$ ($j = \overline{1,4}$):

$$\tilde{\omega}_j = (\omega_{j1}, \omega_{j2}, \omega_{j3}, \omega_{j4}), \quad (4.55)$$

$$\tilde{\omega}_j = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{j\alpha}, \overline{\omega}_{j\alpha}], \underline{\omega}_{j\alpha} = (1-\alpha)\omega_{j1} + \alpha\omega_{j2}, \overline{\omega}_{j\alpha} = \alpha\omega_{j3} + (1-\alpha)\omega_{j4};$$

$$\tilde{V}_S^{(j)} = (V_{S1}^{(j)}, V_{S2}^{(j)}, V_{S3}^{(j)}, V_{S4}^{(j)}), \tilde{V}_{S\alpha}^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{S\alpha}^{(j)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(j)}], \underline{V}_{S\alpha}^{(j)} = (1-\alpha)V_{S1}^{(j)} + \alpha V_{S2}^{(j)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(j)} = \alpha V_{S3}^{(j)} + (1-\alpha)V_{S4}^{(j)}.$$

Последующие этапы теоретического алгоритма получения нечетко-множественных оценок физико-механических параметров сатурированной среды включают получение нечетко-множественной оценки \tilde{m} с представлением вида

$$\tilde{m} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha], \quad (4.56)$$

$$\underline{m}_\alpha = \inf_{\substack{\omega_1 \in [\underline{\omega}_{1\alpha}, \overline{\omega}_{1\alpha}] \\ \omega_2 \in [\underline{\omega}_{2\alpha}, \overline{\omega}_{2\alpha}] \\ \omega_3 \in [\underline{\omega}_{3\alpha}, \overline{\omega}_{3\alpha}] \\ V_S^{(1)} \in [\underline{V}_{S\alpha}^{(1)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(1)}] \\ V_S^{(2)} \in [\underline{V}_{S\alpha}^{(2)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(2)}] \\ V_S^{(3)} \in [\underline{V}_{S\alpha}^{(3)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(3)}]}} \{F_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, V_S^{(1)}, V_S^{(2)}, V_S^{(3)})\}, \quad \overline{m}_\alpha = \sup_{\substack{\omega_1 \in [\underline{\omega}_{1\alpha}, \overline{\omega}_{1\alpha}] \\ \omega_2 \in [\underline{\omega}_{2\alpha}, \overline{\omega}_{2\alpha}] \\ \omega_3 \in [\underline{\omega}_{3\alpha}, \overline{\omega}_{3\alpha}] \\ V_S^{(1)} \in [\underline{V}_{S\alpha}^{(1)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(1)}] \\ V_S^{(2)} \in [\underline{V}_{S\alpha}^{(2)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(2)}] \\ V_S^{(3)} \in [\underline{V}_{S\alpha}^{(3)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(3)}]}} \{F_m(\omega_1, \omega_2, \omega_3, V_S^{(1)}, V_S^{(2)}, V_S^{(3)})\};$$

получение нечетко-множественной оценки $\tilde{\rho}_s$ с представлением вида

$$\tilde{\rho}_s = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}], \quad (4.57)$$

$$\underline{\rho}_{s\alpha}(\omega) = \inf_{\substack{\rho_e \in [\underline{\rho}_{e\alpha}, \overline{\rho}_{e\alpha}] \\ \rho_{we} \in [\underline{\rho}_{we\alpha}, \overline{\rho}_{we\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]}} \{F_\rho(\rho_e, \rho_{we}, m)\}, \quad \overline{\rho}_{s\alpha} = \sup_{\substack{\rho_e \in [\underline{\rho}_{e\alpha}, \overline{\rho}_{e\alpha}] \\ \rho_{we} \in [\underline{\rho}_{we\alpha}, \overline{\rho}_{we\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]}} \{F_\rho(\rho_e, \rho_{we}, m)\};$$

получение нечетко-множественной оценки \tilde{n} с представлением вида

$$\tilde{n} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha], \quad \underline{n}_\alpha = (\underline{\rho}_{e\alpha} - \underline{\rho}_{s\alpha}) / (\overline{\rho}_{we\alpha} - \underline{\rho}_{s\alpha}), \quad \overline{n}_\alpha = (\overline{\rho}_{e\alpha} - \overline{\rho}_{s\alpha}) / (\underline{\rho}_{we\alpha} - \overline{\rho}_{s\alpha}); \quad (4.58)$$

получение нечетко-множественной оценки $\tilde{\mu}$ с представлением вида

$$\tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha] , \quad (4.59)$$

$$\underline{\mu}_\alpha = \inf_{\substack{\omega_1 \in [\underline{\omega}_{1\alpha}, \overline{\omega}_{1\alpha}] \\ \omega_2 \in [\underline{\omega}_{2\alpha}, \overline{\omega}_{2\alpha}] \\ \omega_3 \in [\underline{\omega}_{3\alpha}, \overline{\omega}_{3\alpha}] \\ V_S^{(1)} \in [L_{S\alpha}^{(1)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(1)}] \\ V_S^{(2)} \in [L_{S\alpha}^{(2)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(2)}] \\ V_S^{(3)} \in [L_{S\alpha}^{(3)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(3)}] \\ \rho_s \in [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha]}} \{(1-n)\rho_s(1 + \mathcal{G}(m, \omega_1, \omega_2, V_S^{(1)}, V_S^{(2)})(1 + m\omega_4^2)^{-1})(V_S^{(4)})\} ,$$

$$\overline{\mu}_\alpha = \sup_{\substack{\omega_1 \in [\underline{\omega}_{1\alpha}, \overline{\omega}_{1\alpha}] \\ \omega_2 \in [\underline{\omega}_{2\alpha}, \overline{\omega}_{2\alpha}] \\ \omega_3 \in [\underline{\omega}_{3\alpha}, \overline{\omega}_{3\alpha}] \\ V_S^{(1)} \in [L_{S\alpha}^{(1)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(1)}] \\ V_S^{(2)} \in [L_{S\alpha}^{(2)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(2)}] \\ V_S^{(3)} \in [L_{S\alpha}^{(3)}, \overline{V}_{S\alpha}^{(3)}] \\ \rho_s \in [\underline{\rho}_{s\alpha}, \overline{\rho}_{s\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha] \\ n \in [\underline{n}_\alpha, \overline{n}_\alpha]}} \{(1-n)\rho_s(1 + \mathcal{G}(m, \omega_1, \omega_2, V_S^{(1)}, V_S^{(2)})(1 + m\omega_4^2)^{-1})(V_S^{(4)})\} .$$

Таким образом, представленный теоретический алгоритм позволяет получить оценки показателей возможности того, что соответствующие физико-механические параметры рассматриваемого многокомпонентного сатурированного массива будут принимать соответствующие значения из диапазонов на интервалах носителей получаемых нечетких множеств.

4.2. Нечеткие оценки для скоростей поверхностных волн релеевского и сдвигового типа в упругом полупространстве

Проблема учета факторов неопределенности в виде разброса экспериментальных значений физико-механических характеристик деформируемых сред имеет весьма высокую степень актуальности применительно к исследованиям комплекса свойств поверхностных упругих волн обобщенного релеевского типа, локализующихся у граничной поверхности упругого полупространства. Так, оценки значений фазовых скоростей поверхностных волн релеевского типа в условиях неопределенности характеристик материалов полупространств представляют интерес для практических приложений в сейсмологии, горной сейсмодиагностике, ультразвуковой дефектоскопии и акустоэлектронике, а одним из подходов к

решению задач этого типа является использование аппарата теории нечетких множеств. В этой связи в данном подразделе работы представлено построение нечетко-множественных оценок для фазовых скоростей ультразвуковых поверхностных упругих волн релеевского типа в изотропных и трансверсально-изотропных полупространствах со свободной граничной поверхностью из материалов с разбросом в экспериментально определяемых значениях физико-механических постоянных.

Фазовая скорость ϑ распространения бездисперсных поверхностных акустических волн (ПАВ) Релея в характеризуемом постоянными Ламе λ , μ и параметром плотности ρ изотропном упругом полупространстве со свободной границей, занимающем координатную подобласть $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 \leq 0\}$, в рамках детерминистического подхода [98, 106, 278] может быть определена из трансцендентного уравнения

$$(2 - \eta)^2 - 4((1 - \eta)(1 - \gamma\eta))^{1/2} = 0, \quad (4.60)$$

в котором $\eta = (\rho/\mu)\vartheta^2$, $\gamma = \mu/(\lambda + 2\mu)$. На основе преобразования (4.60) в полиномиальное уравнение

$$\eta^3 - 8\eta^2 + (24 - 16\gamma)\eta + 16(\gamma - 1) = 0 \quad (4.61)$$

и использования квадратурных формул для корней кубического уравнения (4.61) записываются в явном виде три ветви явных представлений для ϑ

$$\vartheta = \vartheta_1(\rho, \lambda, \mu) = [(\mu/\rho)((8/3) - (8 - 48\gamma)/(6\varphi(\lambda, \mu)) + (2/3)\varphi(\lambda, \mu))]^{1/2} \quad (4.62)$$

$$\vartheta = \vartheta_2(\rho, \lambda, \mu) =$$

$$= [(\mu/\rho)((8/3) + (1 + i\sqrt{3})(8 - 48\gamma)/(12\varphi(\lambda, \mu)) - (1/3)(1 - i\sqrt{3})(\varphi(\lambda, \mu))]^{1/2},$$

$$\vartheta = \vartheta_3(\rho, \lambda, \mu) =$$

$$= [(\mu/\rho)((8/3) + (1 - i\sqrt{3})(8 - 48\gamma)/(12\varphi(\lambda, \mu)) - (1/3)(1 + i\sqrt{3})(\varphi(\lambda, \mu))]^{1/2},$$

где

$$\varphi(\lambda, \mu) = [45\gamma - 17 + 3(3(11 - 62\gamma + 107\gamma^2 - 64\gamma^3))^{1/2}]^{1/3}. \quad (4.63)$$

В рамках задачи описания разброса значений скоростей волн Релея при нечетко заданных экспериментальных значениях физико-механических параметров среды полагается, что упругие постоянные λ, μ материала полупространства и его плотность ρ описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\rho}$

$$\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad \tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \alpha\lambda_3 + (1-\alpha)\lambda_4),$$

$$\tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\mu_1 + \alpha\mu_2, \alpha\mu_3 + (1-\alpha)\mu_4),$$

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4).$$

Неопределенные значения скоростей ПАВ Релея соответственно описываются нечетким множеством $\tilde{\mathfrak{G}}$, также представляемым в форме разложения по α - срезам и имеющим вид

$$\tilde{\mathfrak{G}} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mathfrak{G}}_\alpha, \bar{\mathfrak{G}}_\alpha], \quad (4.64)$$

$$\underline{\mathfrak{G}}_\alpha = \inf_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} \mathfrak{G}(\rho, \lambda, \mu), \quad \bar{\mathfrak{G}}_\alpha = \sup_{\substack{\rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} \mathfrak{G}(\rho, \lambda, \mu).$$

Представление (4.64) непосредственно используется для формирования вычислительного алгоритма.

В случае, когда материал полупространства является трансверсально-изотропным, имеет ориентированную вдоль координатного направления Ox_3 ось изотропии и характеризуется набором физико-механических постоянных $\rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$, дисперсионное уравнение для ПАВ релеевского типа, локализованных у свободной границы $x_3 = 0$ полупространства, может быть записано в форме [20]

$$(4.65)$$

$$\begin{aligned}
R(\mathcal{G}, \rho, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}) &= (c_{13}/c_{44})\alpha_2^{-1}(1-\zeta)(1-\theta\zeta) + \\
&+ 2\alpha_1(\theta\alpha_2)^{-1}(1-\theta\zeta) - (\theta\alpha_2)^{-1}(1-\theta\zeta)(\alpha_2 + \theta)\zeta + \theta^{-1}(1-\theta\zeta)(\alpha_4 - \theta^{-1}(1-\theta\zeta)) + \\
&+ \delta_1\delta_2[\theta^{-1}(1-\theta\zeta) - (c_{13}/c_{44})(\alpha_4 - \theta^{-1}(1-\theta\zeta))], \\
\zeta &= (\rho/c_{44})\mathfrak{G}^2, \quad \theta = c_{44}/c_{11}, \quad \alpha_1 = (2c_{11}c_{44})^{-1}(c_{11}c_{33} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})), \\
\alpha_2 &= c_{33}/c_{11}, \quad \alpha_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12}), \quad \alpha_4 = c_{13}(c_{13} + c_{44})/(c_{33}c_{44}), \\
\delta_j &= (\alpha_2)^{-1/2}[\alpha_1 - (\alpha_2 + \theta)\zeta/2 + (-1)^{j+1} \times \\
&\times ((\alpha_1 - (\alpha_2 + \theta)\zeta/2)^2 - \alpha_2(1-\zeta)(1-\theta\zeta))^{1/2}] \quad (j=1,2).
\end{aligned}$$

В данном случае для получения нечетких оценок скорости ПАВ подлежит использованию алгоритм применения эвристического принципа обобщения для неявных функциональных зависимостей. В предположении о том, что упругие постоянные c_{ij} материала трансверсально-изотропного полупространства и его плотность ρ описываются нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами \tilde{c}_{ij} , $\tilde{\rho}$ с реперными точками $\tilde{c}_{ij} = (c_{1ij}, c_{2ij}, c_{3ij}, c_{4ij})$, $\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ и представляются разложениями по множествам α - срезов

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{ij} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{ij\alpha}, \bar{c}_{ij\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)c_{1ij} + \alpha c_{2ij}, \alpha c_{3ij} + (1-\alpha)c_{4ij}), \\
\tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4),
\end{aligned}$$

нечеткая оценка параметра фазовой скорости ПАВ $\tilde{\mathfrak{G}}$ имеет вид $\tilde{\mathfrak{G}} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mathfrak{G}}_\alpha, \bar{\mathfrak{G}}_\alpha]$, где величины $\underline{\mathfrak{G}}_\alpha$ и $\bar{\mathfrak{G}}_\alpha$ при каждом $\alpha \in [0,1]$ в данном случае соответственно определяются как наименьшее и наибольшее значения корней трансцендентных уравнений (4.65) с параметрами c_{ij} , ρ , варьируемыми в пределах $\underline{c}_{ij\alpha} \leq c_{ij} \leq \bar{c}_{ij\alpha}$, $\underline{\rho}_\alpha \leq \rho \leq \bar{\rho}_\alpha$. При численной реализации количество рассматриваемых для этого α - уровней выбирается из соображений обеспечения необходимой точности вычислений.

Примером реализации описываемой методики является получение нечеткой оценки для скорости ультразвуковых поверхностных волн Релея,

локализующихся у свободной плоской поверхности конструкционного элемента из титана. Исходя из усредненных данных экспериментальных измерений [276, 278], согласно которым $\lambda \approx 7.360 \cdot n^*$, $\mu \approx 4.140 \cdot n^*$, $\rho \approx 4.505 \cdot \rho^*$, а также в рамках гипотезы о разбросе $\pm 2\%$ для в максимальной степени возможных значений физико-механических характеристик и о разбросе $\pm 5\%$ для предельно возможных отклонений в указанных значениях, для реперных точек нечетких трапецеидальных интервалов, описывающих физико-механические характеристики титана, задаются величины

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6.992 \cdot n^*, \lambda_2 = 7.213 \cdot n^*, \lambda_3 = 7.507 \cdot n^*, \lambda_4 = 7.728 \cdot n^*, \\ \mu_1 &= 3.933 \cdot n^*, \mu_2 = 4.057 \cdot n^*, \mu_3 = 4.223 \cdot n^*, \mu_4 = 4.347 \cdot n^*, \\ \rho_1 &= 4.280 \cdot \rho^*, \rho_2 = 4.415 \cdot \rho^*, \rho_3 = 4.595 \cdot \rho^*, \rho_4 = 4.730 \cdot \rho^*, \\ n^* &= 10^{10} \text{ н/м}^2, \rho^* = 10^3 \text{ кг/м}^3 \end{aligned}$$

В соответствии с алгоритмом формирования нечетких оценок для фазовой скорости исследуемых ПАВ в рассматриваемом случае получена оценка \mathfrak{V} в виде нечеткого множества $\tilde{\mathfrak{V}}$ с функцией принадлежности, представленной на рисунке 4.8 и описывающей степень возможности принятия различных значений функцией \mathfrak{V} при задаваемом характере разброса в экспериментальных значениях физико-механических параметров среды.

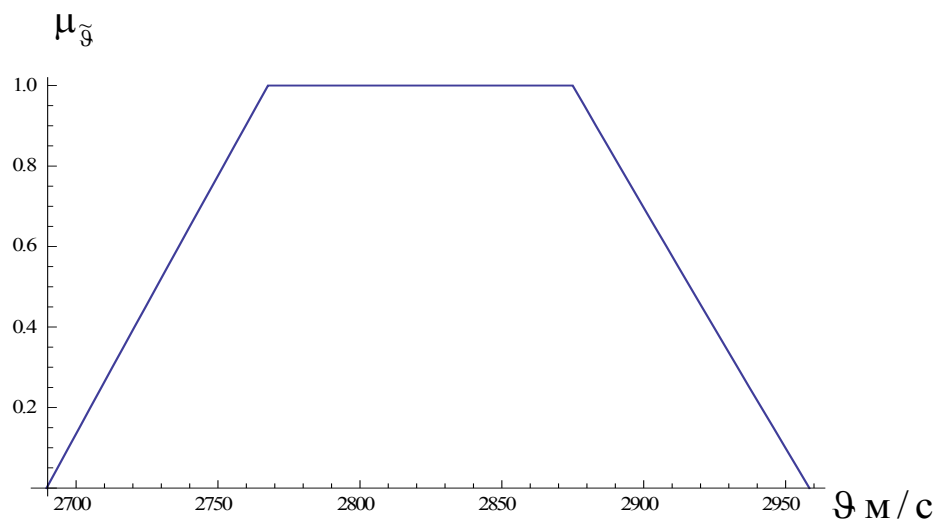


Рис. 4.8. Функция принадлежности для $\tilde{\mathfrak{V}}$

При реализации алгоритма в контексте необходимости выбора действительной ветви представлений (4.32) в рассматриваемом диапазоне изменения параметров использовалась ветвь $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2(\rho, \lambda, \mu)$. Анализируя полученную нечеткую оценку можно отметить, что по отношению к значению $\mathfrak{F}_{\text{средн}}$, получаемому для усредненных экспериментальных значений физико-механических постоянных, разброс для в предельно наибольшей степени возможных значений нечеткой фазовой скорости $\tilde{\mathfrak{F}}$ составляет $\pm 1.9\% \cdot \mathfrak{F}_{\text{средн}}$, а предельно возможные отклонения в значениях получаемой оценки для нечеткой характеристики $\tilde{\mathfrak{F}}$ от $\mathfrak{F}_{\text{средн}}$ лежат в диапазоне $[-4.6\% \cdot \mathfrak{F}_{\text{средн}}, 4.9\% \cdot \mathfrak{F}_{\text{средн}}]$.

Еще одной анализируемой моделью из рассматриваемой предметной области является модель распространения поверхностной сдвиговой электроакустической волны Гуляева-Блюстейна в полупространстве пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной системы, поверхность которого $x_3 = 0$ граничит без акустического контакта с не обладающим пьезоэлектрическими свойствами диэлектриком, имеющим показатель проницаемости ε_0 . Описывающее скорость рассматриваемой волны вдоль направления Ox_1 соотношение, в котором фигурируют ранее введенные характеристики пьезоактивной среды, имеют вид [18, 56, 106]:

$$v_f = (c_{44} / \rho)^{1/2} (1 + \zeta)^{1/2} (1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{1/2}.$$

В процессе применения к данному соотношению α - уровневой формы принципа обобщения при дополнительном предположении об описании неопределенной характеристики ε_0 нечетким трапецеидальным интервалом $\tilde{\varepsilon}_0$ с кортежем реперных точек $\tilde{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_0^{(1)}, \varepsilon_0^{(2)}, \varepsilon_0^{(3)}, \varepsilon_0^{(4)})$ могут быть использованы оценки вида

$$\begin{aligned} \partial v_f / \partial \rho = -(1/(2\rho)) \cdot v_f \leq 0, \quad \partial v_f / \partial \varepsilon_0 = v_f (1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{-1} \cdot \\ \cdot (\zeta^2 / (1 + \zeta)^2) (-(\varepsilon_0^2 \varepsilon_{11} + \varepsilon_0 \varepsilon_{11}^2) / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})^4) \leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial v_f / \partial c_{44} = v_f (c_{44}(1 + \zeta))^{-1} ((1/2) + (1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{-1} \cdot \\ \cdot (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11}))^2 \zeta (1 + \zeta)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

$$\partial v_f / \partial e_{15} = v_f (2e_{15})^{-1} (\zeta / (1 + \zeta)) (1 + 2(1 - (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 + \varepsilon_{11})))^2 (\zeta / (1 + \zeta))^2)^{-1} (1 + \zeta)^{-1} \geq 0.$$

С их учетом для характеристик $\underline{v}_{f\alpha}$, $\bar{v}_{f\alpha}$ записываются представления

$$\underline{v}_{f\alpha} = \inf_{\varepsilon_{11} \in [\underline{\varepsilon}_{11\alpha}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}]} (\underline{c}_{44\alpha} / \underline{\rho}_{\alpha})^{1/2} (1 + \underline{\zeta}_{\alpha})^{1/2} \cdot (1 - (\bar{\varepsilon}_{0\alpha} / (\bar{\varepsilon}_{0\alpha} + \varepsilon_{11\alpha})))^2 (\underline{\zeta}_{\alpha} / (1 + \underline{\zeta}_{\alpha}))^2)^{1/2},$$

$$\bar{v}_{f\alpha} = \sup_{e_{15} \in [e_{15\alpha}, \bar{e}_{15\alpha}]} (\bar{c}_{44\alpha} / \bar{\rho}_{\alpha})^{1/2} (1 + \bar{\zeta}_{\alpha})^{1/2} \cdot$$

$$\cdot (1 - (\underline{\varepsilon}_{0\alpha} / (\underline{\varepsilon}_{0\alpha} + \varepsilon_{11\alpha})))^2 (\bar{\zeta}_{\alpha} / (1 + \bar{\zeta}_{\alpha}))^2)^{1/2},$$

$$\underline{\zeta}_{\alpha} = 4\pi e_{15} \varepsilon_{11\alpha}^{-1} \underline{c}_{44\alpha}^{-1}, \quad \bar{\zeta}_{\alpha} = 4\pi \bar{e}_{15} \varepsilon_{11\alpha}^{-1} \bar{c}_{44\alpha}^{-1}.$$

4.3. Нечеткие оценки некоторых характеристик процессов отражения и преломления волн деформаций

Важным аспектом учета факторов неопределенности при описании волновых деформационных процессов является получение нечетких оценок для характеристик процессов отражения-преломления объемных волн с плоским фронтом у границ раздела разнородных упругих полупространств, описание коэффициентов отражения и преломления упругих волн в составных телах. В первом из рассматриваемых случаев нечеткие оценки формируются применительно к задаче о нормальном падении продольных гармонических объемных волн с плоским фронтом на границу идеального механического контакта разнородных изотропных полупространств с физико-механическими постоянными $\rho^{(+)}, \lambda^{(+)}, \mu^{(+)}$ и $\rho^{(-)}, \lambda^{(-)}, \mu^{(-)}$, занимающих области $V^{(+)} = \{-\infty < x_1 x_2 < \infty, x_3 \geq 0\}$ и $V^{(-)} = \{-\infty < x_1 x_2 < \infty, x_3 < 0\}$. В случае движения волны произвольной частоты с амплитудным параметром $u_{30}^{(\text{пад})}$ вдоль положительного координатного направления Ox_3 из полупространства $V^{(-)}$ в

полупространство $V^{(+)}$ для амплитудные составляющие отраженной и преломленной волн могут быть записаны представления [98]

$$\mathbf{u}_{30}^{(отр)} = n_{отр}^{(-+)} \mathbf{u}_{30}^{(nad)}, \quad \mathbf{u}_{30}^{(прел)} = n_{прел}^{(-+)} \mathbf{u}_{30}^{(nad)}, \quad (4.66)$$

в которых

$$n_{отр}^{(-+)} = (n_p^{(-)} - n_p^{(+)}) / (n_p^{(-)} + n_p^{(+)}), \quad n_{прел}^{(-+)} = 2n_p^{(-)} / (n_p^{(-)} + n_p^{(+)}), \quad (4.67)$$

$n_p^{(\pm)} = ((\lambda^{(\pm)} + 2\mu^{(\pm)}) / \rho^{(\pm)})^{1/2}$ – волновые сопротивления для материалов полупространств $V^{(+)}$, $V^{(-)}$. Используя далее представления для нечетко-множественных величин $\tilde{n}_p^{(\pm)}$ в виде декомпозиций по множествам α - уровня

$$\tilde{n}_p^{(\pm)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (((1-\alpha)((\lambda_1^{(\pm)} + 2\mu_1^{(\pm)})\rho_1^{(\pm)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(\pm)} + 2\mu_2^{(\pm)})\rho_2^{(\pm)})^{1/2}, \quad (4.68)$$

$$\alpha((\lambda_3^{(\pm)} + 2\mu_3^{(\pm)})\rho_3^{(\pm)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(\pm)} + 2\mu_4^{(\pm)})\rho_4^{(\pm)})^{1/2}),$$

можно получить соответствующую форму описания для нечетких оценок характеристик $\tilde{n}_{отр}^{(-+)}$, $\tilde{n}_{прел}^{(-+)}$:

$$\tilde{n}_{отр}^{(-+)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((((((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) -$$

$$- (\alpha((\lambda_3^{(+)} + 2\mu_3^{(+)})\rho_3^{(+)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(+)} + 2\mu_4^{(+)})\rho_4^{(+)})^{1/2}))) /$$

$$/ (((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) +$$

$$+ \alpha((\lambda_3^{(+)} + 2\mu_3^{(+)})\rho_3^{(+)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(+)} + 2\mu_4^{(+)})\rho_4^{(+)})^{1/2})),$$

$$(((\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)})\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)})\rho_4^{(-)})^{1/2}) -$$

$$+ ((1-\alpha)((\lambda_1^{(+)} + 2\mu_1^{(+)})\rho_1^{(+)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(+)} + 2\mu_2^{(+)})\rho_2^{(+)})^{1/2}))) /$$

$$/ (((\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)})\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1-\alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)})\rho_4^{(-)})^{1/2}) +$$

$$+ (1-\alpha)((\lambda_1^{(+)} + 2\mu_1^{(+)})\rho_1^{(+)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(+)} + 2\mu_2^{(+)})\rho_2^{(+)})^{1/2})))));$$

$$\tilde{n}_{прел}^{(-+)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (2((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) /$$

$$/ (((1-\alpha)((\lambda_1^{(-)} + 2\mu_1^{(-)})\rho_1^{(-)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(-)} + 2\mu_2^{(-)})\rho_2^{(-)})^{1/2}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha((\lambda_3^{(+)} + 2\mu_3^{(+)}\rho_3^{(+)})^{1/2} + (1 - \alpha)((\lambda_4^{(+)} + 2\mu_4^{(+)}\rho_4^{(+)})^{1/2})), \quad (4.70) \\
& 2(\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)}\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1 - \alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)}\rho_4^{(-)})^{1/2} / \\
& /((\alpha((\lambda_3^{(-)} + 2\mu_3^{(-)}\rho_3^{(-)})^{1/2} + (1 - \alpha)((\lambda_4^{(-)} + 2\mu_4^{(-)}\rho_4^{(-)})^{1/2}) + \\
& + (1 - \alpha)((\lambda_1^{(+)} + 2\mu_1^{(+)}\rho_1^{(+)})^{1/2} + \alpha((\lambda_2^{(+)} + 2\mu_2^{(+)}\rho_2^{(+)})^{1/2}))).
\end{aligned}$$

Для получения оценок влияния фактора нечеткости физико-механических свойств на кинематические и энергетические характеристики процессов отражения-преломления продольных гармонических упругих волн при нормальном падении на границу идеального контакта двух трансверсально-изотропных полупространств $V^- = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 \leq 0\}$ и

$V^+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_3 > 0\}$ вводятся нечетко-интервальные описания упругих постоянных и параметров плотности с кортежами реперных точек $c_{ij}^\pm = (c_{ij1F}^\pm, c_{ij1M}^\pm, c_{ij2M}^\pm, c_{ij2F}^\pm)$, $\rho^\pm = (\rho_{1F}^\pm, \rho_{1M}^\pm, \rho_{2M}^\pm, \rho_{2F}^\pm)$. Функции принадлежности для указанных нечетких интервалов имеют вид

$$\begin{aligned}
\mu_{c_{ij}^\pm}(\zeta) &= \{0, \zeta \in (-\infty, c_{ij1F}^\pm); (\zeta - c_{ij1F}^\pm)(c_{ij1M}^\pm - c_{ij1F}^\pm)^{-1}, \zeta \in [c_{ij1F}^\pm, c_{ij1M}^\pm]; \\
& 1, \zeta \in (c_{ij1M}^\pm, c_{ij2M}^\pm); (c_{ij2F}^\pm - \zeta)(c_{ij2F}^\pm - c_{ij2M}^\pm)^{-1}, \zeta \in [c_{ij2M}^\pm, c_{ij2F}^\pm]; 0, \zeta \in (c_{ij2F}^\pm, \infty)\}, \\
\mu_{\rho^\pm}(\zeta) &= \{0, \zeta \in (-\infty, \rho_{1F}^\pm); (\zeta - \rho_{1F}^\pm)(\rho_{1M}^\pm - \rho_{1F}^\pm)^{-1}, \zeta \in [\rho_{1F}^\pm, \rho_{1M}^\pm]; \\
& 1, \zeta \in (\rho_{1M}^\pm, \rho_{2M}^\pm); (\rho_{2F}^\pm - \zeta)(\rho_{2F}^\pm - \rho_{2M}^\pm)^{-1}, \zeta \in [\rho_{2M}^\pm, \rho_{2F}^\pm]; 0, \zeta \in (\rho_{2F}^\pm, \infty)\},
\end{aligned}$$

а сами интервалы представимы разложениями по множествам α - уровня

$$\begin{aligned}
& \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((\alpha c_{ij1M}^\pm + (1 - \alpha)c_{ij1F}^\pm), (\alpha c_{ij2M}^\pm + (1 - \alpha)c_{ij2F}^\pm)), \\
& \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((\alpha \rho_{1M}^\pm + (1 - \alpha)\rho_{1F}^\pm), (\alpha \rho_{2M}^\pm + (1 - \alpha)\rho_{2F}^\pm)).
\end{aligned}$$

В случае движения волны из полупространства V^- в полупространство V^+ для определения комплексных функций перемещений в падающих, отраженных и преломленных волнах частоты ω в четкой модели вводятся удовлетворяющие исходным уравнениям движения в областях V^- , V^+ представления

$$u_3^{\text{пад.}} = u_0 \cdot \exp[-i(\omega t - k_p^- x_3)], \quad u_3^{\text{отр.}} = u_{\text{отр.}} \cdot \exp[-i(\omega t + k_p^- x_3)],$$

$$\mathbf{u}_3^{\text{прел.}} = \mathbf{u}_{\text{прел.}} \cdot \exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_p^+ x_3)],$$

в которых $k_p^\pm = (\rho^\pm / (c_{33}^\pm))^{1/2} \omega$. Амплитудные множители $\mathbf{u}_{\text{отр.}}$, $\mathbf{u}_{\text{прел.}}$ в этих представлениях определяются из краевых условий в плоскости $x_3 = 0$ и для случая четкого задания физико-механических характеристик имеют вид $\mathbf{u}_{\text{отр.}} = \mathbf{u}_0 (n^- - n^+) / (n^- + n^+)$, $\mathbf{u}_{\text{прел.}} = 2\mathbf{u}_0 n^- / (n^- + n^+)$. В этих четких представлениях $n^\pm = (\rho^\pm \cdot (c_{33}^\pm))^{1/2}$ – импедансы для продольных волн вдоль осей упругой симметрии материалов полупространств V^- , V^+ .

В случае, когда физико-механические постоянные указанных материалов имеют нечетко-интервальные представления, для импедансов n^- и n^+ с использованием эвристического принципа обобщения соответственно получены нечеткие оценки в виде разложений по множествам α - уровня

$$\begin{aligned} \tilde{n}^\pm = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \{ & ((\alpha c_{331M}^\pm + (1-\alpha)c_{331F}^\pm)(\alpha \rho_{2M}^\pm + (1-\alpha)\rho_{2F}^\pm))^{1/2}, \\ & ((\alpha c_{332M}^\pm + (1-\alpha)c_{332F}^\pm)(\alpha \rho_{1M}^\pm + (1-\alpha)\rho_{1F}^\pm))^{1/2} \}, \end{aligned} \quad (4.71)$$

которые в дальнейшем используются для получения нечетко-множественных оценок амплитудных величин $\mathbf{u}_{\text{отр.}}$ и $\mathbf{u}_{\text{прел.}}$.

Далее на основе принципа обобщения, применяемого к соотношению

$$P_3 = (2\pi / \omega) \text{Im}[\overline{\sigma_{33}^+} \mathbf{u}_3^{\text{прел.}}] = 2\pi n^+ (2n^- / (n^+ + n^-))^2 \mathbf{u}_0^2, \quad (4.72)$$

формируется нечеткая оценка для величины плотности потока энергии преломленной волны, генерируемой при нормальном падении продольных волн на границу идеального контакта двух трансверсально-изотропных полупространств. Получена также оценка влияния нечеткости задания параметров γ_u и γ_σ обобщенных граничных условий $\mathbf{u}_3^- = \gamma_u \mathbf{u}_3^+$, $\sigma_{33}^- = \gamma_\sigma \sigma_{33}^+$ неидеального контакта двух разнородных трансверсально-изотропных полупространств, в которых $\mathbf{u}_3^- = \mathbf{u}_3^{\text{пад.}} + \mathbf{u}_3^{\text{отр.}}$, $\mathbf{u}_3^+ = \mathbf{u}_3^{\text{прел.}}$, $\sigma_{33}^\pm = c_{33}^\pm \partial \mathbf{u}_3^\pm / \partial x_3$, на характеристики продольных отраженных и преломленных гармонических волн. Параметры γ_u и γ_σ , по предположению, являются трапецеидальными нечеткими интервалами с

реперными точками $(\gamma_{u1F}, \gamma_{u1M}, \gamma_{u2M}, \gamma_{u2F})$ и $(\gamma_{\sigma1F}, \gamma_{\sigma1M}, \gamma_{\sigma2M}, \gamma_{\sigma2F})$. Из удовлетворяющих краевым условиям формальных представлений $u_3^{\text{отр}} = u_0(\gamma_u n^- - \gamma_\sigma n^+) / (\gamma_u n^- + \gamma_\sigma n^+)$, $u_3^{\text{прел}} = 2u_0 n^- / (\gamma_u n^- + \gamma_\sigma n^+)$ с использованием нечетко-интервальных представлений для параметров γ_u и γ_σ , а также нечетко-интервальных представлений импедансов n^- и n^+ на основе принципа обобщения в виде разложений по множествам α - уровня получены соответствующие нечеткие оценки для амплитудных характеристик отраженных и преломленных волн.

Реализовано также моделирование факторов неопределенности при расчете амплитуд кинематических, силовых и энергетических характеристик отраженных и преломленных электроупругих волн, генерируемых вследствие падения плоской сдвиговой электроупругой волны на границу контакта двух полубесконечных тел из линейно-поляризованной пьезокерамики класса 6mm с различными обладающими разбросами экспериментальных значений физико-механическими постоянными. При этом полагается, что контактная поверхность рассматриваемых тел является поверхностью идеального электромеханического сопряжения. Контактующие полупространства занимают в координатах $Ox_1x_2x_3$ область $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 = \{x_1 \leq 0, -\infty < x_2, x_3 < \infty\}$, $V_2 = \{x_1 > 0, -\infty < x_2, x_3 < \infty\}$. Пьезокерамические материалы в областях V_p имеют коллинеарные координатному направлению Ox_3 оси поляризации, характеризуются наборами упругих постоянных $c_{ij}^{(p)}$, параметров плотности ρ_p , пьезоэлектрических постоянных $e_{ij}^{(p)}$, модулей диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}^{(p)}$.

Полагается, что из глубины полупространства V_1 вдоль положительного координатного направления Ox_1 на границу контакта полупространств $\Gamma = \{x_1 = 0, -\infty < x_2, x_3 < \infty\}$ нормально падает поляризованная в плоскости Ox_1x_3 сдвиговая упругая волна, в результате взаимодействия которой с поверхностью раздела разнородных по свойствам материалов формируются одномерные поля отраженных и преломленных сдвиговых электроупругих волн с аналогичным

типом поляризации. В рамках квазистатической модели связанного электроупругого деформирования пьезоэлектрических материалов для описания свойств формирующихся в рассматриваемом составном теле волновых полей вводятся в рассмотрение комплексные функции волновых упругих смещений $u_3(x_1, t)$, комплексные функции волновых механических напряжений $\sigma_{13}(x_1, t)$, потенциала квазистатического электрического поля $\varphi(x_1, t)$ и электрического смещения $D_1(x_1, t)$ в падающей волне

$$\begin{aligned} u_{31}(x_1, t) &= u^{(1)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)), \quad \sigma_{13}^{(1)}(x_1, t) = \sigma^{(1)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)), \\ \varphi_1(x_1, t) &= \varphi^{(1)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)), \quad D_1^{(1)}(x_1, t) = D^{(2)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)); \end{aligned} \quad (4.73)$$

в отраженной волне

$$\begin{aligned} u_{32}(x_1, t) &= u^{(2)} \exp(-i(\omega t + k_1 x_1)), \quad \sigma_{13}^{(2)}(x_1, t) = \sigma^{(2)} \exp(-i(\omega t + k_1 x_1)), \\ \varphi_2(x_1, t) &= \varphi^{(2)} \exp(-i(\omega t + k_1 x_1)), \quad D_1^{(2)}(x_1, t) = D^{(2)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)); \end{aligned} \quad (4.74)$$

в преломленной волне

$$\begin{aligned} u_{33}(x_1, t) &= u^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_2 x_1)), \quad \sigma_{13}^{(3)}(x_1, t) = \sigma^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_2 x_1)), \\ \varphi_3(x_1, t) &= \varphi^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_2 x_1)), \quad D_1^{(3)}(x_1, t) = D^{(3)} \exp(-i(\omega t - k_1 x_1)). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Амплитудный параметр $u^{(1)}$ исходной падающей волны считается известной заданной величиной. Характеристики указанных полей связаны определяющими соотношениями вида

$$\sigma_{13}^{(j)}(x_1, t) = c_{44}^{(j)} \partial_1 u_{3j}(x_1, t) + e_{15}^{(j)} \partial_1 \varphi_j(x_1, t), \quad D_1^{(j)}(x_1, t) = e_{15}^{(j)} \partial_1 u_{3j}(x_1, t) - \varepsilon_{11}^{(j)} \partial_1 \varphi_j(x_1, t). \quad (4.76)$$

Краевая задача для определения искомых характеристик полей падающих, отраженных и преломленных волн в рассматриваемом случае включает уравнения динамического электроупругого деформирования для каждой из перечисленных компонент в соответствующих областях V_p

$$c_{44} \partial_1^2 u_3(x_1, t) + e_{15} \partial_1^2 \varphi(x_1, t) - \rho \partial_t^2 u_3(x_1, t) = 0, \quad e_{15} \partial_1^2 u_3(x_1, t) - \varepsilon_{11} \partial_1^2 \varphi(x_1, t) = 0; \quad (4.77)$$

а также граничные условия

$$u_{31}(0, t) + u_{32}(0, t) = u_{33}(0, t), \quad (4.78)$$

$$c_{44}^{(1)} \partial_1 (u_{31}(0, t) + u_{32}(0, t)) + e_{15}^{(1)} \partial_1 (\varphi_1(0, t) + \varphi_2(0, t)) = c_{44}^{(2)} \partial_1 u_{33}(0, t) + e_{15}^{(2)} \partial_1 \varphi_3(0, t),$$

$$e_{15}^{(1)} \partial_1 (u_{31}(0, t) + u_{32}(0, t)) - \varepsilon_{11}^{(1)} \partial_1 (\varphi_1(0, t) + \varphi_2(0, t)) = e_{15}^{(2)} \partial_1 u_3(0, t) - \varepsilon_{11}^{(2)} \partial_1 \varphi_3(0, t).$$

Из соотношений (4.77) с учетом выражений (4.73) – (4.75) следуют представления волновых чисел k_p ($p=1,2$), а также уравнения связи амплитудных характеристик $u^{(j)}$ и $\varphi^{(j)}$:

$$k_p = \omega(\rho_p / (c_{44}^{(p)}(1 + (e_{15}^{(p)})^2(c_{44}^{(p)}\varepsilon_{11}^{(p)})^{-1})))^{1/2} \quad (p=1,2); \quad (4.79)$$

$$u^{(j)} = (\varepsilon_{11}^{(1)} / e_{15}^{(1)}) \varphi^{(j)} \quad (j=1,2), \quad u^{(3)} = (\varepsilon_{11}^{(2)} / e_{15}^{(2)}) \varphi^{(3)}. \quad (4.80)$$

С учетом (4.73) – (4.75), (4.80) последнее из краевых условий (4.78) выполняется тождественно, и, в свою очередь, из остающихся соотношений (4.78) следуют алгебраические уравнения для неопределенных комплексных кинематических амплитудных характеристик $u^{(j)}$ ($j=2,3$) и амплитудных характеристик связанного квазистатического электрического поля $\varphi^{(j)}$ ($j=1,3$) в отраженных и преломленных бездисперсных сдвиговых электроупругих волнах. Следующие из этих уравнений представления имеют вид:

$$u^{(2)} = [(\zeta - \tau) / (\zeta + \tau)] u^{(1)}, \quad u^{(3)} = [(2\zeta) / (\zeta + \tau)] u^{(1)}, \quad (4.81)$$

$$\varphi^{(1)} = \mathcal{G} u^{(1)}, \quad \varphi^{(2)} = \mathcal{A} [(\zeta - \tau) / (\zeta + \tau)] u^{(1)}, \quad \varphi^{(3)} = \nu [(2\zeta) / (\zeta + \tau)] u^{(1)},$$

где

$$\zeta = k_1(c_{44}^{(1)} + (e_{15}^{(1)})^2 / \varepsilon_{11}^{(1)}), \quad \tau = k_2(c_{44}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2 / \varepsilon_{11}^{(2)}), \quad \mathcal{G} = e_{15}^{(1)} / \varepsilon_{11}^{(1)}, \quad \nu = e_{15}^{(2)} / \varepsilon_{11}^{(2)}.$$

Представления для комплексных амплитудных составляющих в представлениях силовых характеристик $\sigma_{13}^{(j)}$ ($j=\overline{1,3}$) для отраженных и преломленных волн соответственно могут быть записаны в форме

$$\sigma^{(1)} = ik_1[c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)}\mathcal{G}]u^{(1)}, \quad \sigma^{(2)} = ik_1[(\zeta - \tau) / (\zeta + \tau)][c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)}\mathcal{G}]u^{(1)}, \quad (4.82)$$

$$\sigma^{(3)} = ik_2[(2\zeta) / (\zeta + \tau)][c_{44}^{(2)} + e_{15}^{(2)}\nu]u^{(1)}.$$

Комплексные амплитудные функции электрического смещения описываются представлениями вида

$$D^{(1)} = ik_1[[e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}\mathcal{G}]u^{(1)}, \quad D^{(2)} = ik_1[(\zeta - \tau) / (\zeta + \tau)][e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)}\mathcal{G}]u^{(1)}, \quad (4.83)$$

$$D^{(3)} = ik_2[(2\zeta) / (\zeta + \tau)][e_{15}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(2)}\nu]u^{(1)}.$$

Наряду с описываемыми соотношениями (4.81) – (4.83) характеристиками $u^{(j)}$, $\varphi^{(j)}$, $\sigma^{(j)}$, $D^{(j)}$, при исследовании модели рассчитываются также

характеристики плотности средних за период потоков мощности $P^{(j)}$ в рассматриваемых электроупругих волнах

$$P^{(1)} = (u^{(1)})^2 (\omega/2) (k_1 [[c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)} \mathcal{G}] - \mathcal{K}_1 [e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} \mathcal{G}]]), \quad (4.84)$$

$$P^{(2)} = (u^{(1)})^2 (\omega/2) (k_1 [[(\zeta - \tau)/(\zeta + \tau)] [c_{44}^{(1)} + e_{15}^{(1)} \mathcal{G}]] [(\zeta - \tau)/(\zeta + \tau)] - k_1 [[(\zeta - \tau)/(\zeta + \tau)] [e_{15}^{(1)} - \varepsilon_{11}^{(1)} \mathcal{G}]] \mathcal{G} (\zeta - \tau)/(\zeta + \tau))$$

$$P^{(3)} = (u^{(1)})^2 (\omega/2) (k_2 [[(2\zeta)/(\zeta + \tau)] [c_{44}^{(2)} + e_{15}^{(2)} \nu]] [(2\zeta)/(\zeta + \tau)] - k_2 [[(2\zeta)/(\zeta + \tau)] [e_{15}^{(2)} - \varepsilon_{11}^{(2)} \nu]] \nu [(2\zeta)/(\zeta + \tau)]).$$

Анализ структуры представлений $u^{(j)}$, $\varphi^{(j)}$ ($j = \overline{1,3}$) показывает, что данные характеристики не зависят от частотного параметра ω . Соответственно, соотношения (4.81) – (4.84) могут быть записаны в обобщенной форме

$$u^{(2)} = F_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \quad u^{(3)} = F_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \quad (4.85)$$

$$\varphi^{(1)} = \Phi_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \quad \varphi^{(2)} = \Phi_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}),$$

$$\varphi^{(3)} = \Phi_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}), \quad \sigma^{(1)} = G_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega),$$

$$\sigma^{(2)} = G_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \quad \sigma^{(3)} = G_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega),$$

$$D^{(1)} = Q_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \quad D^{(2)} = Q_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega),$$

$$D^{(3)} = Q_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \quad P^{(1)} = R_1(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega),$$

$$P^{(2)} = R_2(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega), \quad P^{(3)} = R_3(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}, \omega).$$

Результаты анализа детерминистической версии рассматриваемой модели используются далее для исследования показателей влияния факторов неопределенности в виде разбросов значений физико-механических постоянных. В рамках предположений о возможности эффективного описания неопределенных экзогенных параметров $c_{44}^{(p)}$, $e_{15}^{(p)}$, $\varepsilon_{11}^{(p)}$, ρ_p , $u^{(1)}$ нечеткими нормальными трапецеидальными интервалами $\tilde{c}_{44}^{(p)}$, $\tilde{e}_{15}^{(p)}$, $\tilde{\varepsilon}_{11}^{(p)}$, $\tilde{\rho}_p$, $\tilde{u}^{(1)}$ с кортежами реперных значений

$$\tilde{c}_{44}^{(p)} = (c_{441}^{(p)}, c_{442}^{(p)}, c_{443}^{(p)}, c_{444}^{(p)}), \quad \tilde{e}_{15}^{(p)} = (e_{151}^{(p)}, e_{152}^{(p)}, e_{153}^{(p)}, e_{154}^{(p)}), \quad \tilde{\varepsilon}_{11}^{(p)} = (\varepsilon_{111}^{(p)}, \varepsilon_{112}^{(p)}, \varepsilon_{113}^{(p)}, \varepsilon_{114}^{(p)}),$$

$$\tilde{\rho}_p = (\rho_{p1}, \rho_{p2}, \rho_{p3}, \rho_{p4}), \quad \tilde{u}^{(1)} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

и разложениями по множествам α – уровня

$$\tilde{c}_{44}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}], \quad \underline{c}_{44\alpha}^{(p)} = (1 - \alpha)c_{441}^{(p)} + \alpha c_{442}^{(p)}, \quad \bar{c}_{44\alpha}^{(p)} = \alpha c_{443}^{(p)} + (1 - \alpha)c_{444}^{(p)};$$

$$\tilde{e}_{15}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}], \quad e_{15\alpha}^{(p)} = (1-\alpha)e_{151}^{(p)} + \alpha e_{152}^{(p)}, \quad \bar{e}_{15\alpha}^{(p)} = \alpha e_{153}^{(p)} + (1-\alpha)e_{154}^{(p)};$$

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}], \quad \varepsilon_{11\alpha}^{(p)} = (1-\alpha)\varepsilon_{111}^{(p)} + \alpha\varepsilon_{112}^{(p)}, \quad \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)} = \alpha\varepsilon_{443}^{(p)} + (1-\alpha)\varepsilon_{444}^{(p)};$$

$$\tilde{\rho}_p = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}], \quad \rho_{p\alpha} = (1-\alpha)\rho_{p1} + \alpha\rho_{p2}, \quad \bar{\rho}_{p\alpha} = \alpha\rho_{p3} + (1-\alpha)\rho_{p4};$$

$$\tilde{u}^{(1)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [u_\alpha, \bar{u}_\alpha], \quad u_\alpha = (1-\alpha)u_1 + \alpha u_2, \quad \bar{u}_\alpha = \alpha u_3 + (1-\alpha)u_4,$$

на основе применения α – уровневой формы эвристического принципа обобщения в соотношениях (4.82) – (4.85) формируются представления для эндогенных характеристик рассматриваемой модели в виде

$$\tilde{u}^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [u_\alpha^{(j)}, \bar{u}_\alpha^{(j)}], \quad \tilde{\varphi}^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\varphi_\alpha^{(j)}, \bar{\varphi}_\alpha^{(j)}], \quad \tilde{\sigma}^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\sigma_\alpha^{(j)}, \bar{\sigma}_\alpha^{(j)}], \quad (4.86)$$

$$\tilde{D}^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [D_\alpha^{(j)}, \bar{D}_\alpha^{(j)}], \quad \tilde{P}^{(j)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [P_\alpha^{(j)}, \bar{P}_\alpha^{(j)}],$$

где

$$u_\alpha^{(j)} = \inf \left\{ F_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right\}, \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} c_{44}^{(p)} &\in [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} &\in [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} &\in [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p &\in [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} &\in [u_\alpha, \bar{u}_\alpha] \end{aligned}$$

$$\bar{u}_\alpha^{(j)} = \sup \left\{ F_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right\}; \dots;$$

$$\begin{aligned} c_{44}^{(p)} &\in [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} &\in [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} &\in [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p &\in [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} &\in [u_\alpha, \bar{u}_\alpha] \end{aligned}$$

$$D_\alpha^{(j)} = \inf \left\{ Q_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right\},$$

$$\begin{aligned} c_{44}^{(p)} &\in [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} &\in [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} &\in [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p &\in [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} &\in [u_\alpha, \bar{u}_\alpha] \end{aligned}$$

$$\bar{D}_\alpha^{(j)} = \sup \left\{ Q_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)}) \right\};$$

$$\begin{aligned} c_{44}^{(p)} &\in [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} &\in [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} &\in [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p &\in [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} &\in [u_\alpha, \bar{u}_\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{P}_\alpha^{(j)} &= \inf \{R_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)})\}, \\
&\quad \begin{aligned} c_{44}^{(p)} &\in [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} &\in [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} &\in [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p &\in [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} &\in [u_\alpha, \bar{u}_\alpha] \end{aligned} \\
\bar{P}_\alpha^{(j)} &= \sup \{R_j(c_{44}^{(1)}, c_{44}^{(2)}, e_{15}^{(1)}, e_{15}^{(2)}, \varepsilon_{11}^{(1)}, \varepsilon_{11}^{(2)}, \rho_1, \rho_2, u^{(1)})\}. \\
&\quad \begin{aligned} c_{44}^{(p)} &\in [c_{44\alpha}^{(p)}, \bar{c}_{44\alpha}^{(p)}] \\ e_{15}^{(p)} &\in [e_{15\alpha}^{(p)}, \bar{e}_{15\alpha}^{(p)}] \\ \varepsilon_{11}^{(p)} &\in [\varepsilon_{11\alpha}^{(p)}, \bar{\varepsilon}_{11\alpha}^{(p)}] \\ \rho_p &\in [\rho_{p\alpha}, \bar{\rho}_{p\alpha}] \\ u^{(1)} &\in [u_\alpha, \bar{u}_\alpha] \end{aligned}
\end{aligned}$$

В частных случаях моделирования эффектов влияния разбросов в соотношениях (4.87) соответственно реализуется варьирование лишь для параметров, рассматриваемых как нечеткие, а оставшиеся параметры задаются оговоренными детерминированными значениями.

Примеры реализации разрабатываемой методики нечетко-множественного анализа модели учета неопределенности при описании характеристик связанного квазистатического электрического поля отраженных и преломленных электроупругих волн относятся к случаю контакта полупространства V_1 из пьезокерамики $BaTiO_3$ [194] и полупространства V_2 из пьезокерамики ЦТС-19 [194] с заданием в общем случае следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\tilde{c}_{44}^{(1)} = (4.25c_*, 4.35c_*, 4.40c_*, 4.45c_*), \quad (4.88)$$

$$\tilde{e}_{15}^{(1)} = (11.2e_*, 11.4e_*, 11.6e_*, 11.9e_*), \quad \tilde{e}_{15}^{(2)} = (8.82e_*, 8.85e_*, 9.16e_*, 9.27e_*),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{11}^{(1)} = (1110\varepsilon_*, 1200\varepsilon_*, 1270\varepsilon_*, 1290\varepsilon_*), \quad \tilde{\varepsilon}_{11}^{(2)} = (685\varepsilon_*, 690\varepsilon_*, 710\varepsilon_*, 720\varepsilon_*),$$

$$\tilde{\rho}_1 = (6.01\rho_*, 6.02\rho_*, 6.04\rho_*, 6.05\rho_*), \quad \tilde{\rho}_2 = (7.45\rho_*, 7.5\rho_*, 7.6\rho_*, 7.7\rho_*),$$

$$c_* = 10^{10}[\text{Па}], \quad e_* = 1[\text{ККл/}^2], \quad \varepsilon_* = 8.854 \cdot 10^{-12}[\text{Ф/м}], \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3].$$

Экзогенный параметр $u^{(1)}$ во всех вариантах представляемых расчетов рассматривается как четкая величин. Некоторые результаты численного анализа представлены описаниями вида функций принадлежности для нечетко-множественных величин $\tilde{u}^{(2)}$, $\tilde{u}^{(3)}$, $\tilde{\sigma}^{(j)}/\omega$, $\tilde{P}^{(j)}/\omega^2$ ($j = \overline{1,3}$) и отражены на рисунках 4.9 – 4.24. Так, на рисунках 4.9 – 4.10 соответственно представлены функции принадлежности для нечетко-множественных амплитудных характеристик $\tilde{u}^{(2)}$,

$\tilde{u}^{(3)}$ напряженности отраженных и преломленных волн в случае учета неопределенности упругих постоянных и параметров плотности пьезокерамических полупространств и задания точных значений пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей материалов

$$e_{15}^{(1)} = 11.43e_*, \quad e_{15}^{(2)} = 9.16e_*, \quad \varepsilon_{11}^{(1)} = 687.4\varepsilon_*, \quad \varepsilon_{11}^{(2)} = 1270\varepsilon_*. \quad (4.89)$$

Для этого же случая учета неопределенности на рисунках 4.11 – 4.13 приведен профиль функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\sigma}^{(j)}/\omega$, а на рисунках 4.14 – 4.16 даны результаты расчетов функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{P}^{(j)}/\omega^2$ ($j=\overline{1,3}$). Результаты определения функции принадлежности для нечетко-множественных амплитудных характеристик $\tilde{u}^{(2)}$, $\tilde{u}^{(3)}$ напряженности отраженных и преломленных волн в случае учета неопределенности упругих постоянных и пьезомодулей пьезокерамических полупространств и задания точных значений параметров плотности и диэлектрических проницаемостей материалов $\rho_1 = 6.02\rho_*$, $\rho_2 = 7.6\rho_*$, $\varepsilon_{11}^{(1)} = 687.4\varepsilon_*$, $\varepsilon_{11}^{(2)} = 1270\varepsilon_*$ представлены на рисунках 4.17 – 4.18. Результаты определения функции принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\sigma}^{(j)}/\omega$, $\tilde{P}^{(j)}/\omega^2$ ($j=\overline{1,3}$) соответственно приводятся на рисунках 4.19 – 4.24. Результаты расчетов указывают на крайне незначительное различие в оценках разброса эндогенных характеристик рассматриваемой модели при двух рассмотренных вариантах учета неопределенности исходных характеристик.

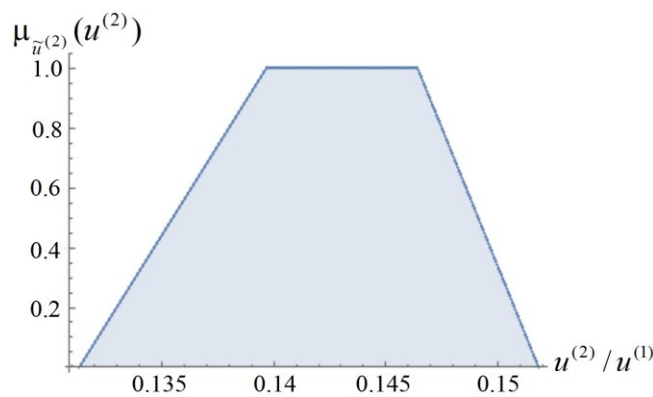


Рис. 4.9. Функция принадлежности
для $\tilde{u}^{(2)}$

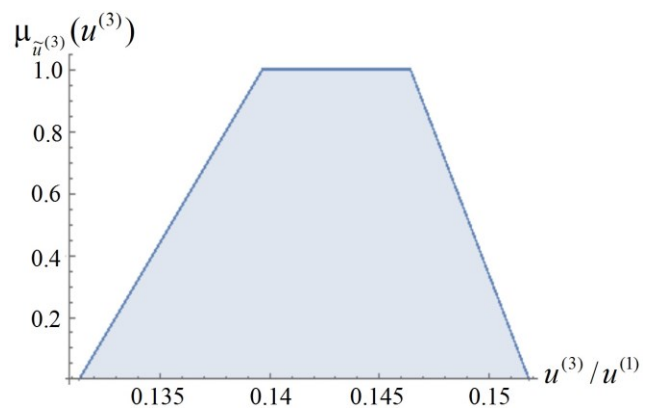


Рис. 4.10. Функция принадлежности
для $\tilde{u}^{(3)}$

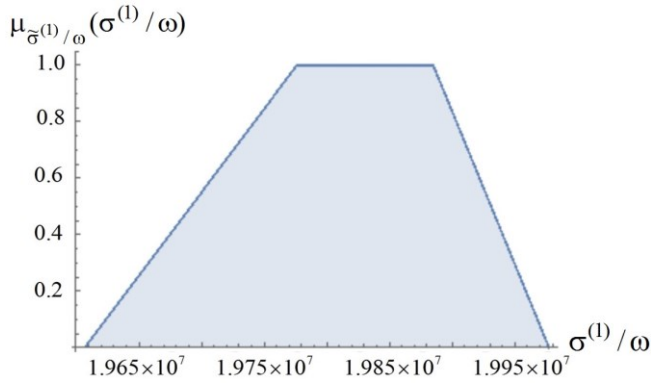


Рис.4.11. Функция принадлежности для $\tilde{\sigma}^{(1)} / \omega$

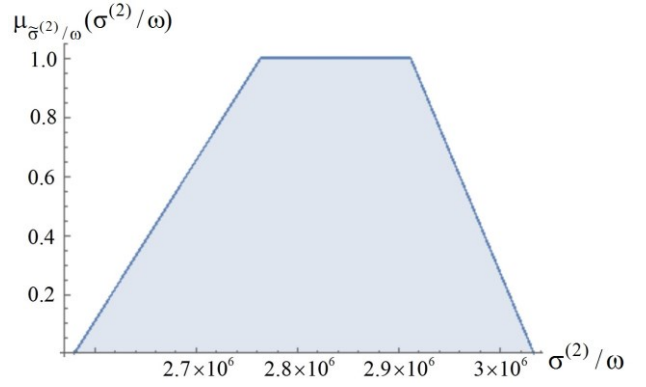


Рис.4.12. Функция принадлежности для $\tilde{\sigma}^{(2)} / \omega$

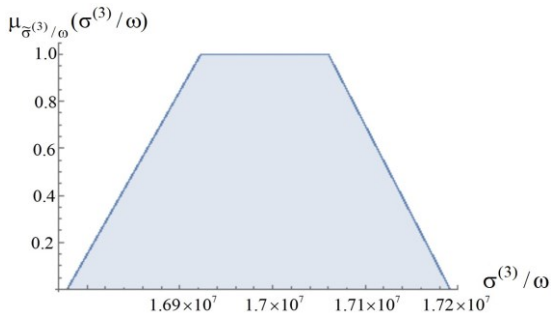


Рис. 4.13. Функция принадлежности для $\tilde{\sigma}_{13}^{(3)} / \omega$

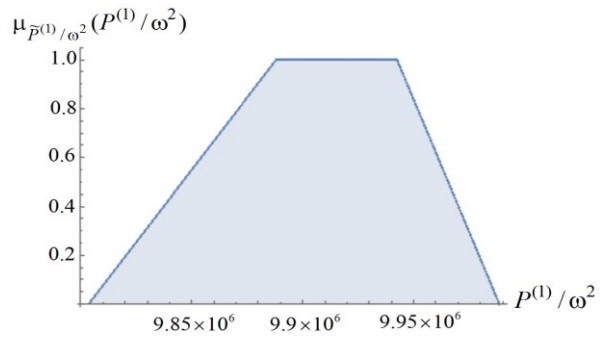


Рис. 4.14. Функция принадлежности для $\tilde{P}_1^{(1)} / \omega^2$

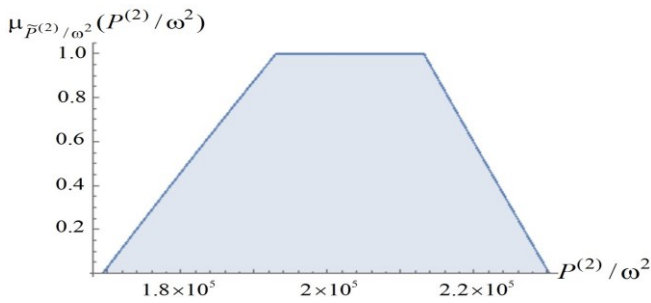


Рис. 4.15. Функция принадлежности для $\tilde{P}^{(2)} / \omega^2$

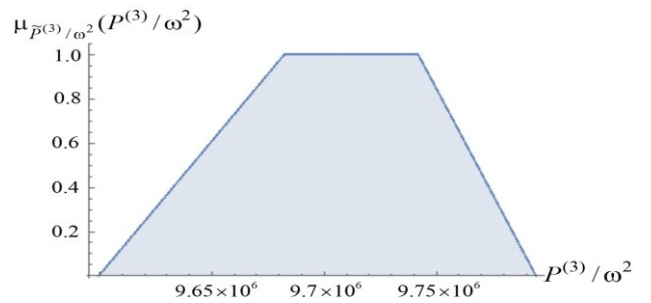


Рис. 4.16. Функция принадлежности для $\tilde{P}^{(3)} / \omega^2$

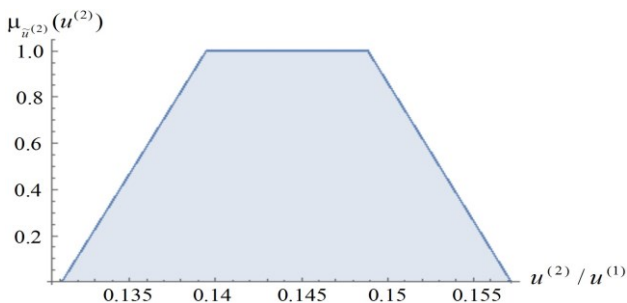


Рис. 4.17. Функция принадлежности для $\tilde{u}^{(2)}$

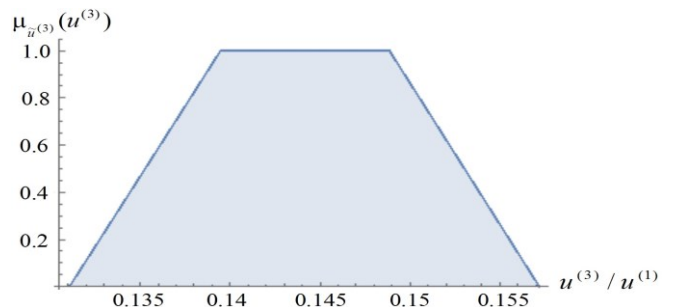


Рис. 4.18. Функция принадлежности для $\tilde{u}^{(3)}$

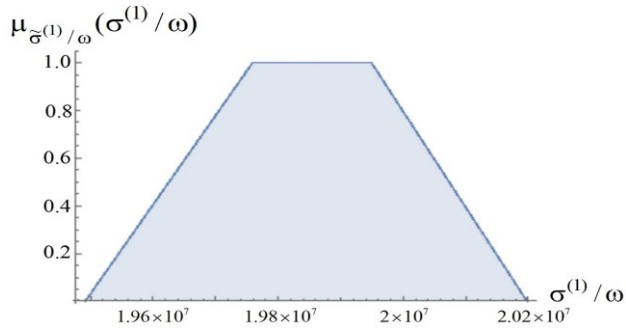


Рис. 4.19. Функция принадлежности
для $\tilde{\sigma}^{(1)}/\omega$

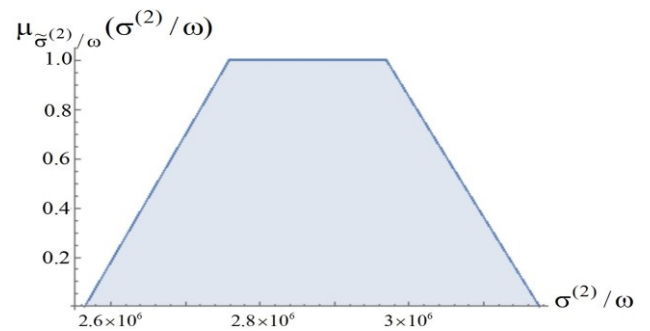


Рис. 4.20. Функция принадлежности
для $\tilde{\sigma}^{(2)}/\omega$

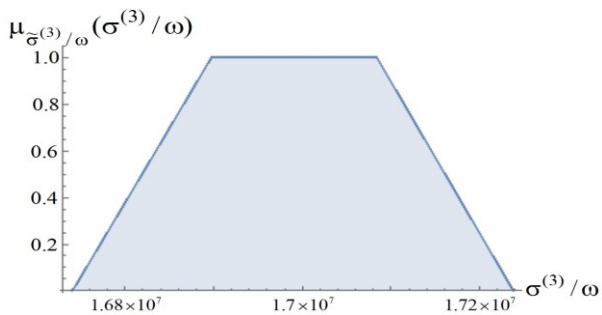


Рис. 4.21. Функция принадлежности
для $\tilde{\sigma}^{(3)}/\omega$

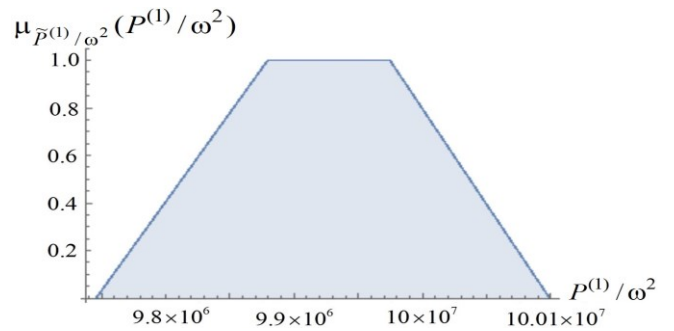


Рис. 4.22. Функция принадлежности
для $\tilde{P}^{(1)}/\omega^2$

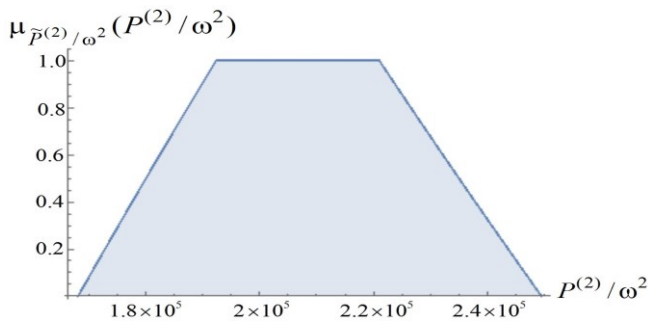


Рис. 4.23. Функция принадлежности
для $\tilde{P}^{(2)}/\omega^2$

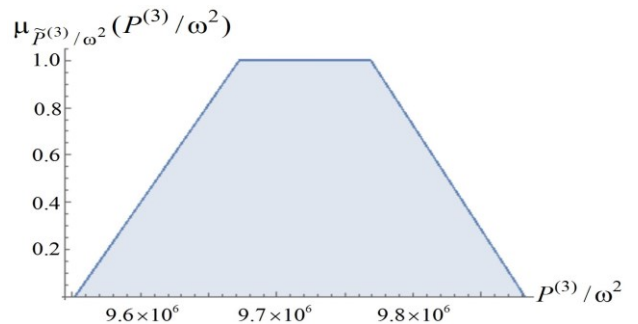


Рис. 4.24. Функция принадлежности
для $\tilde{P}^{(3)}/\omega^2$

Можно также сделать вывод о том, что максимальные разбросы значений для эндогенных параметров в рассмотренных случаях составляют величины, не превышающие 15% по отношению к средним значениям на интервалах носителей для исследуемых характеристик.

4.4. Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде

На исходном этапе представляемого исследования рассматривается модель генерирования нелинейных вторых гармоник при распространении стационарных объемных волн деформаций в занимающей координатное пространство $Ox_1x_2x_3$ трансверсально-изотропной упругой среде с учетом эффектов геометрической и физической нелинейности [226]. Соотношения рассматриваемой модели формулируются применительно к случаю распространения волн вдоль направления Ox_1 в плоскости изотропии Ox_1x_2 трансверсально-изотропного массива. Безразмерные координатные переменные x_j ($j = \overline{1,3}$) полагаются отнесенными к нормирующему параметру R_* линейной размерности, а для компонент безразмерного вектора динамических упругих перемещений $u_j(x_1, t)$ ($j = \overline{1,3}$) в исследуемых волнах нормирующим параметром является величина

$$u_* = \max_{\{x_1, x_2, x_3, t\}} |u_j(x_1, x_2, x_3, t)|.$$

Модель базируется на тензорном представлении упругого потенциала U трансверсально-изотропной среды с квадратичными и кубическими членами по конечным деформациям ε_{jq} , тензорные коэффициенты c_{jqlm} , c_{jqlmnp} которого выражаются через пять независимых матричных упругих постоянных второго порядка и десять независимых матричных упругих постоянных третьего порядка, а также на концепции представления характеристик динамического напряженно-деформированного состояния двумя низшими членами разложений по малому параметру $\delta = u_* / R_*$ ($\delta \ll 1$). В рамках представленных гипотез соотношения модели, включая частную форму определяющих соотношений и уравнений движения, записываются в виде

$$U = \left(\frac{1}{2} c_{11} u_{1,1}^2 + \frac{1}{4} (c_{11} - c_{12}) u_{2,1}^2 + \frac{1}{2} c_{44} u_{3,1}^2 \right) \delta^2 + \left(\left(\frac{1}{2} c_{11} + \frac{1}{6} c_{111} \right) u_{1,1}^3 + \left(\frac{1}{2} c_{11} + \frac{1}{8} (c_{111} - c_{112}) \right) u_{1,1} u_{2,1}^2 + \frac{1}{2} (c_{11} + c_{115}) u_{1,1} u_{3,1}^2 \right) \delta^3, \quad (4.90)$$

$$\sigma_{11} = (c_{11}u_{1,1})\delta + \left(\frac{3}{2}c_{11} + \frac{1}{2}c_{111}\right)u_{1,1}^2 + \left(\frac{1}{2}c_{11} + \frac{1}{8}(c_{111} - c_{112})u_{2,1}^2 + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{155})u_{3,1}^2\right)\delta^2,$$

$$\sigma_{21} = \left(\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})u_{2,1}\right)\delta + \left(c_{11} + \frac{1}{4}(c_{111} - c_{112})\right)u_{1,1}u_{2,1}\delta^2,$$

$$\sigma_{31} = (c_{44}u_{3,1})\delta + (c_{11} + c_{115})u_{1,1}u_{3,1}\delta^2$$

Приведенные характеристики с размерностями механических напряжений полагаются отнесенными к нормирующему параметру c_* . С использованием приема приравнивания в уравнениях движения слагаемых одного порядка малости по малому параметру δ задача описания ангармонических возмущений сводится к рекуррентной последовательности дифференциальных уравнений для определения первого (линейного) и второго приближения. Для случая распространения в указанном направлении горизонтально-поляризованных линейных волн сдвига $u_2^{(0)} = u_2(x_1, t) = u_{20} \exp(-i(\omega t - kx_1))$, $u_1^{(0)} \equiv u_3^{(0)} \equiv 0$ и использования представлений

$$u_j(x_1, t) = u_j^{(0)}(x_1, t) + \delta u_j^{(1)}(x_1, t) \quad (4.91)$$

уравнения первого и второго приближения принимают вид

$$\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})u_{2,11}^{(0)} - \rho \ddot{u}_{2,1}^{(0)} = -\left(c_{11} + \frac{1}{4}(c_{111} - c_{112})\right)u_{2,1}^{(0)}u_{2,11}^{(0)}, \quad (4.92)$$

а первые и вторые гармоники (нелинейные ангармонические возмущения) соответственно имеют представления

$$u_2^{(0)} = u_{20} \exp(-i(\omega t - (2\Omega^2 / (c_{11} - c_{12}))^{1/2} x_1)), \quad (4.93)$$

$$u_2^{(1)} = u_{20}^2 \mathcal{G} \exp(-i2(\omega t - (2\Omega^2 / (c_{11} - c_{12}))^{1/2} x_1)),$$

$$\Omega^2 = \rho \omega^2 R_*^2 / c_*, \quad \mathcal{G} = 2^{3/2} \Omega^{-1} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{c_{11} - c_{12}} \right) (c_{11} - c_{12})^{3/2} / \left(c_{11} + \frac{1}{4}(c_{111} - c_{112}) \right).$$

Данные представления описывают нелинейные вторые гармоники для объемных горизонтально поляризованных волн сдвига как волновые движения продольного типа вдоль выбранного направления распространения, имеющие удвоенные частоту и волновое число первой гармоники и смещенные относительно нее по фазе. Амплитудные уровни второй гармоники

пропорциональны квадрату амплитуды линейной сдвиговой волн, умноженному на подлежащий нечеткому оцениванию параметрический коэффициент $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{111}, c_{112})$.

Полученные аналитические представления рамках концепции применения методов теории нечетких множеств используются для получения нечетких оценок амплитудных уровней вторых гармоник на основе эвристического принципа обобщения и предположения о том, что физико-механические характеристики трансверсально-изотропной среды, включая упругие постоянные второго и третьего порядков, описываются нечеткими трапециевидальными интервалами с кортежами реперных точек $(c_{jq}^{(1)}, c_{jq}^{(2)}, c_{jq}^{(3)}, c_{jq}^{(4)})$, $(c_{jql}^{(1)}, c_{jql}^{(2)}, c_{jql}^{(3)}, c_{jql}^{(4)})$ с разложениями по множествам α -уровня

$$\begin{aligned} \rho &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha), \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho^{(1)} + \alpha\rho^{(2)}, \quad \overline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho^{(4)} + \alpha\rho^{(3)}; \\ c_{11} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{11\alpha}, \overline{c}_{11\alpha}), \quad \underline{c}_{11\alpha} = (1-\alpha)c_{11}^{(1)} + \alpha c_{11}^{(2)}, \quad \overline{c}_{11\alpha} = (1-\alpha)c_{11}^{(4)} + \alpha c_{11}^{(3)}; \quad (4.94) \\ c_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{12\alpha}, \overline{c}_{12\alpha}), \quad \underline{c}_{12\alpha} = (1-\alpha)c_{12}^{(1)} + \alpha c_{12}^{(2)}, \quad \overline{c}_{12\alpha} = (1-\alpha)c_{12}^{(4)} + \alpha c_{12}^{(3)}; \\ c_{111} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{111\alpha}, \overline{c}_{111\alpha}), \quad \underline{c}_{111\alpha} = (1-\alpha)c_{111}^{(1)} + \alpha c_{111}^{(2)}, \quad \overline{c}_{111\alpha} = (1-\alpha)c_{111}^{(4)} + \alpha c_{111}^{(3)}; \\ c_{112} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{112\alpha}, \overline{c}_{112\alpha}), \quad \underline{c}_{112\alpha} = (1-\alpha)c_{112}^{(1)} + \alpha c_{112}^{(2)}, \quad \overline{c}_{112\alpha} = (1-\alpha)c_{112}^{(4)} + \alpha c_{112}^{(3)}; \end{aligned}$$

При этом искомая нечеткая оценка для $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{111}, c_{112})$ описывается нечетким множеством, представляемым в виде разложения

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\mathcal{G}}_\alpha, \overline{\mathcal{G}}_\alpha), \quad (4.95) \\ \underline{\mathcal{G}}_\alpha &= 2^{3/2} \Omega^{-1} (1/8 - 1/(\overline{c}_{11\alpha} - \overline{c}_{12\alpha})) (\overline{c}_{11\alpha} - \overline{c}_{12\alpha})^{3/2} / (\overline{c}_{11\alpha} + (1/4)(\overline{c}_{111\alpha} - \overline{c}_{112\alpha})), \\ \overline{\mathcal{G}}_\alpha &= 2^{3/2} \Omega^{-1} (1/8 - 1/(\underline{c}_{11\alpha} - \underline{c}_{12\alpha})) (\underline{c}_{11\alpha} - \underline{c}_{12\alpha})^{3/2} / (\underline{c}_{11\alpha} + (1/4)(\underline{c}_{111\alpha} - \underline{c}_{112\alpha})). \end{aligned}$$

Полученные соотношения описывают вычислительный алгоритм для получения количественных нечетких оценок уровней нелинейных ангармонических возмущений в полях объемных упругих волн в трансверсально-

изотропных средах в условиях нечеткости описания экспериментальных значений соответствующих физико-механических постоянных.

4.5. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в однослойных и двухслойных волноводах.

Первым случаем, исследуемым в рамках рассматриваемой проблемы является, разработка модели нечеткого оценивания значений фазовых скоростей нормальных упругих волн в мембранированных ортотропных пластинах. На исходной стадии формирования расчетного алгоритма полученные в работе [58] представления для фазовых скоростей $v_{fj}^{(n)}$ симметричных и антисимметричных нормальных волн продольно-сдвигового типа с круговой частотой ω из моды спектра с номером n , распространяющихся вдоль упруго-эквивалентных направлений Ox_j в плоскости занимающей область $V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, -h \leq x_3 \leq h\}$ ортотропной пластины с абсолютно гибкими нерастяжимыми мембранными покрытиями на плоских гранях $x_3 = \pm h$, приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 v_{f1}^{(n)} &= \left[\frac{1}{2} (c_{13} + c_{55}) \delta_n^2 (c_{55} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} (c_{33} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} + \right. & (4.96) \\
 &+ \left. \left(\left(\frac{1}{2} (c_{13} + c_{55}) \delta_n^2 (c_{55} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} (c_{33} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} \right)^2 - \rho^2 \omega^4 (c_{11} c_{55})^{-1} \cdot \right. \right. \\
 &\cdot \left. \left. (c_{55} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} (c_{33} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} \right)^{1/2} \right]^{1/2} = \varphi_{1n}(\rho, c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{55}), \\
 v_{f2}^{(n)} &= \left[\frac{1}{2} (c_{23} + c_{44}) \delta_n^2 (c_{44} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} (c_{33} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} + \right. \\
 &+ \left. \left(\left(\frac{1}{2} (c_{23} + c_{44}) \delta_n^2 (c_{44} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} (c_{33} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} \right)^2 - \rho^2 \omega^4 (c_{22} c_{44})^{-1} \cdot \right. \right. \\
 &\cdot \left. \left. (c_{44} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} (c_{33} \delta_n^2 - \rho \omega^2)^{-1} \right)^{1/2} \right]^{1/2} = \varphi_{2n}(\rho, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{44}),
 \end{aligned}$$

где ρ – постоянная плотности, c_{ij} – упругие постоянные анизотропного материала пластины, δ_n ($n = \overline{1, \infty}$) – параметр, принимающий значение

$\delta_n = (2n - 1)\pi / (2h)$ в случае исследования симметричных по толщине пластины волн и значение $\delta_n = n\pi / h$ – в случае исследования антисимметричных волн.

При формировании нечетких оценок для характеристик $v_{f1}^{(n)}, v_{f2}^{(n)}$ используется прием перехода к аргументам функций $\varphi_{1n}(\rho, c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{55})$, $\varphi_{2n}(\rho, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{44})$ в виде трапецеидальных нечетких интервалов с кортежам реперных точек $(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}, \rho^{(4)})$, $(c_{ij}^{(1)}, c_{ij}^{(2)}, c_{ij}^{(3)}, c_{ij}^{(4)})$ и декомпозициями по множествам α - уровня

$$\rho = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha), \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho^{(1)} + \alpha\rho^{(2)}, \quad \overline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho^{(4)} + \alpha\rho^{(3)};$$

$$c_{ij} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{ij\alpha}, \overline{c}_{ij\alpha}), \quad \underline{c}_{ij\alpha} = (1-\alpha)c_{ij}^{(1)} + \alpha c_{ij}^{(2)}, \quad \overline{c}_{ij\alpha} = (1-\alpha)c_{ij}^{(4)} + \alpha c_{ij}^{(3)}.$$

В результате, для нечетко-множественных характеристик $\tilde{v}_{f1}^{(n)}, \tilde{v}_{f2}^{(n)}$ фазовых скоростей нормальных упругих волн получены представления в виде интервальных разложений

$$v_{fp}^{(n)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (v_{fp\alpha}^{(n)}, \overline{v}_{fp\alpha}^{(n)}), \quad (4.97)$$

$$\underline{v}_{f1\alpha}^{(n)} = \inf_{\substack{c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \overline{c}_{11\alpha}] \\ c_{33} \in [\underline{c}_{33\alpha}, \overline{c}_{33\alpha}] \\ c_{13} \in [\underline{c}_{13\alpha}, \overline{c}_{13\alpha}] \\ c_{55} \in [\underline{c}_{55\alpha}, \overline{c}_{55\alpha}] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]}} \{\varphi_{1n}(\rho, c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{55})\}, \quad \overline{v}_{f1\alpha}^{(n)} = \sup_{\substack{c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \overline{c}_{11\alpha}] \\ c_{33} \in [\underline{c}_{33\alpha}, \overline{c}_{33\alpha}] \\ c_{13} \in [\underline{c}_{13\alpha}, \overline{c}_{13\alpha}] \\ c_{55} \in [\underline{c}_{55\alpha}, \overline{c}_{55\alpha}] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]}} \{\varphi_{1n}(\rho, c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{55})\};$$

$$\underline{v}_{f2\alpha}^{(n)} = \inf_{\substack{c_{22} \in [\underline{c}_{22\alpha}, \overline{c}_{22\alpha}] \\ c_{33} \in [\underline{c}_{33\alpha}, \overline{c}_{33\alpha}] \\ c_{23} \in [\underline{c}_{23\alpha}, \overline{c}_{23\alpha}] \\ c_{44} \in [\underline{c}_{44\alpha}, \overline{c}_{44\alpha}] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]}} \{\varphi_{2n}(\rho, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{44})\}, \quad \overline{v}_{f2\alpha}^{(n)} = \sup_{\substack{c_{22} \in [\underline{c}_{22\alpha}, \overline{c}_{22\alpha}] \\ c_{33} \in [\underline{c}_{33\alpha}, \overline{c}_{33\alpha}] \\ c_{23} \in [\underline{c}_{23\alpha}, \overline{c}_{23\alpha}] \\ c_{44} \in [\underline{c}_{44\alpha}, \overline{c}_{44\alpha}] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \overline{\rho}_\alpha]}} \{\varphi_{2n}(\rho, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{44})\}.$$

Аналогичные представлениям (4.97) описания для нечетко-множественных оценок для фазовых скоростей нормальных упругих волн в ортотропном слое с проскальзывающими закреплениями граней получены с заменой задаваемых соотношениями (4.96) выражений $\varphi_{1n}(\rho, c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{55})$, $\varphi_{2n}(\rho, c_{22}, c_{33}, c_{23}, c_{44})$ на аналогичные выражения в которых δ_n ($n = \overline{1, \infty}$) – параметр, принимающий

значение $\delta_n = n\pi/h$ в случае исследования симметричных волн по толщине слоя с проскальзывающими закреплениями граней и значение $\delta_n = (2n-1)\pi/(2h)$ – в случае исследования антисимметричных волн.

Применительно к задаче получения нечетких оценок для характеристик фазовых $v_f^{(n)}$ и групповых $v_g^{(n)}$ скоростей симметричных и антисимметричных нормальных волн продольного сдвига длины λ из моды с произвольным номером n в трансверсально-изотропном упругом слое толщины $2h$ со свободными либо жестко закрепленными гранями в качестве исходных используются полученные в работе [234] представления

$$v_f^{(n)} = \varphi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) = \rho^{-1/2} \mathfrak{G}_n(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta), \quad (4.98)$$

$$v_g^{(n)} = \xi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) = \rho^{-1/2} \frac{(c_{11} - c_{12})}{2} \mathfrak{G}_n^{-1}(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta),$$

$$\mathfrak{G}_n(c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) = (c_{44} \frac{\eta_n^2}{4\pi^2} \delta^2 + \frac{(c_{11} - c_{12})}{2})^{1/2},$$

в которых $\delta = \lambda/h$ – параметр безразмерной приведенной длины волны; $\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}$ соответственно плотность и упругие постоянные материала слоя; η_n параметр, принимающий значения $\eta_n = n\pi$ ($n = \overline{0, \infty}$) для случая симметричных волн в свободном слое, $\eta_n = n\pi$ ($n = \overline{1, \infty}$) для случая антисимметричных волн в закрепленном слое, $\eta_n = (2n+1)\pi/2$ ($n = \overline{0, \infty}$) для случая антисимметричных волн в свободном слое и симметричных волн в закрепленном слое. В рамках предположения об описании обладающих разбросами значений параметров плотности и упругих постоянных трансверсально-изотропного материала слоя трапециевидными нечеткими интервалами $\tilde{\rho}, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}$ с кортежами реперных точек $(\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}, \rho^{(4)})$, $(c_{jq}^{(1)}, c_{jq}^{(2)}, c_{jq}^{(3)}, c_{jq}^{(4)})$ ($jq = 11, 12, 44$) и разложениями по множествам α - уровня

$$\tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho^{(1)} + \alpha\rho^{(2)}, \alpha\rho^{(3)} + (1-\alpha)\rho^{(4)}),$$

$$\tilde{c}_{jp} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)c_{jp}^{(1)} + \alpha c_{jp}^{(2)}, \alpha c_{jp}^{(3)} + (1-\alpha)c_{jp}^{(4)}),$$

а также с учетом устанавливаемых свойств

$$\begin{aligned} \partial \varphi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial \rho &\leq 0, \quad \partial \varphi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial c_{11} \geq 0, \\ \partial \varphi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial c_{12} &\leq 0, \quad \partial \varphi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial c_{44} \geq 0, \\ \partial \xi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial \rho &\leq 0, \quad \partial \xi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial c_{11} \geq 0, \\ \partial \xi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial c_{12} &\leq 0, \quad \partial \xi_n(\rho, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \delta) / \partial c_{44} \leq 0, \end{aligned}$$

нечеткие оценки для $\tilde{v}_f^{(n)}$, $\tilde{v}_g^{(n)}$ описываются разложениями

$$\begin{aligned} \tilde{v}_f^{(n)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \{ (\alpha \rho^{(3)} + (1-\alpha) \rho^{(4)})^{-1/2} (((1-\alpha)c_{44}^{(1)} + \alpha c_{44}^{(2)})(\eta_n \delta / (2\pi))^2 + \\ &\quad + ((1-\alpha)c_{11}^{(1)} + \alpha c_{11}^{(2)} - \alpha c_{12}^{(3)} - (1-\alpha)c_{12}^{(4)}) / 2)^{1/2}, \\ &\quad (\alpha \rho^{(2)} + (1-\alpha) \rho^{(1)})^{-1/2} (((1-\alpha)c_{44}^{(4)} + \alpha c_{44}^{(3)})(\eta_n \delta / (2\pi))^2 + \\ &\quad + ((1-\alpha)c_{11}^{(4)} + \alpha c_{11}^{(3)} - \alpha c_{12}^{(2)} - (1-\alpha)c_{12}^{(1)}) / 2)^{1/2} \}, \\ \tilde{v}_g^{(n)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \{ (\alpha \rho^{(3)} + (1-\alpha) \rho^{(4)})^{-1/2} (((1-\alpha)c_{11}^{(1)} + \alpha c_{11}^{(2)} - \alpha c_{12}^{(3)} - \\ &\quad - (1-\alpha)c_{12}^{(4)}) / 2) (((1-\alpha)c_{44}^{(4)} + \alpha c_{44}^{(3)})(\eta_n \delta / (2\pi))^2 + \\ &\quad + ((1-\alpha)c_{11}^{(1)} + \alpha c_{11}^{(2)} - \alpha c_{12}^{(3)} - (1-\alpha)c_{12}^{(4)}) / 2)^{-1/2}, \\ &\quad (\alpha \rho^{(2)} + (1-\alpha) \rho^{(1)})^{-1/2} (((1-\alpha)c_{11}^{(1)} + \alpha c_{11}^{(2)} - \alpha c_{12}^{(3)} - \\ &\quad - (1-\alpha)c_{12}^{(4)}) / 2) (((1-\alpha)c_{44}^{(1)} + \alpha c_{44}^{(2)})(\eta_n \delta / (2\pi))^2 + \\ &\quad + ((1-\alpha)c_{11}^{(4)} + \alpha c_{11}^{(3)} - \alpha c_{12}^{(1)} - (1-\alpha)c_{12}^{(1)}) / 2)^{-1/2} \}. \end{aligned}$$

Пример численной реализации представленной методики относится к случаю получения нечетких оценок для фазовых скоростей бегущих антисимметричных нормальных волн из двух низших мод спектра для закрепленного по граням слоя из геоматериала мусковита (калиевой слюды) с усредненными физико-механическими постоянными

$$\rho = 2.93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c_{11} = 17.8 \cdot c_*, \quad c_{12} = 4.24 \cdot c_*, \quad c_{44} = 1.22 \cdot c_*, \quad c_* = 10^{10} \text{ Па},$$

предельно возможный разброс экспериментальных значений которых предположительно составляет $\pm 5\%$ по отношению к средним, а диапазон предельно достоверных значений лежит в интервале $\pm 2.5\%$. Результаты

нечеткого оценивания фазовых скоростей нормальных волн, полученные для рассматриваемого в качестве примера случая $\eta_1 = \pi$ в диапазоне $\delta^{-1} \in [0.1, 10]$, отражены на рис. 4.25. Здесь кривые 1 и 4 для каждого значения δ^{-1} ограничивают диапазон, вне которого находятся недопустимые значения $\tilde{v}_f^{(1)}$, а кривые 2 и 3 ограничивают интервалы наиболее достоверных значений исследуемых фазовых скоростей для волн рассматриваемого типа с варьируемыми относительными длинами. Рис 4.26. иллюстрирует вид функции принадлежности для нечетко-множественной величины $\tilde{v}_f^{(1)}$ при $\delta^{-1} = 3$.

Вариант разработанной методики относится также к исследованию модели нечетко-множественного оценивания фазовых скоростей нормальных волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с разбросом значений физико-механических параметров. Рассматривается задача о распространении плоской стационарной нормальной SH волны с циклической частотой ω и волновым

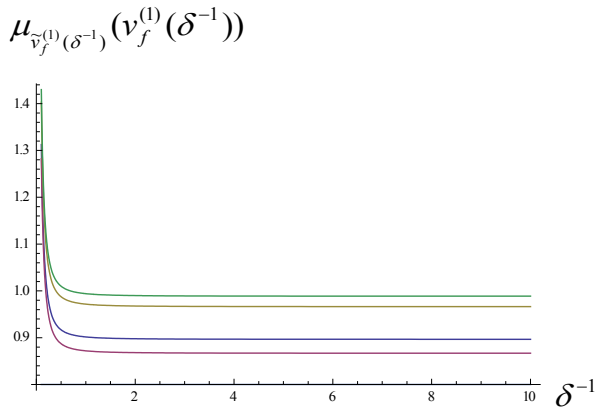


Рис. 4.25. Результаты оценивания

$$\tilde{v}_f^{(1)}(\delta^{-1})$$

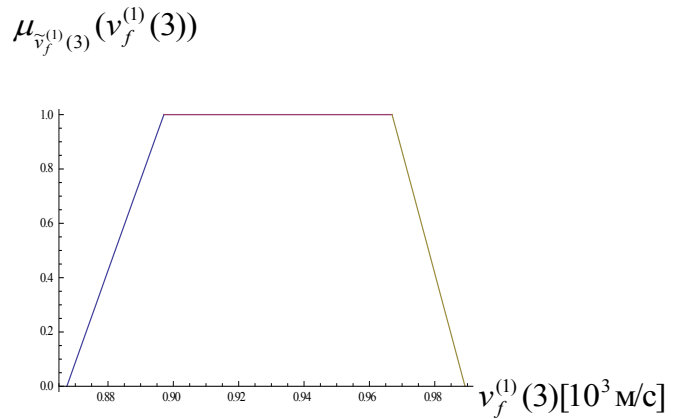


Рис. 4.26. Вид функции принадлежности

для $\tilde{v}_f^{(1)}(3)$

числом k вдоль координатного направления Ox_1 в занимающей область $V = \{(x_1, x_2) \in R^2, -h_- \leq x_3 \leq h_+\}$ трансверсально-изотропном функционально-градиентном упругом слое с ориентированной вдоль толщинной координаты x_3 осью анизотропии и жестко закрепленными граничными поверхностями $x_3 = -h_-$,

$x_3 = h_+$. В рассматриваемом случае векторное поле волновых упругих перемещений характеризуется единственной компонентой $u_2(x_1, x_2, t) = \varphi(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1))$, а определяющие соотношения для ненулевых компонентов тензора напряжений и уравнение волновых движений в рамках сформулированных предположений соответственно имеют вид

$$\sigma_{21} = c_{66} \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_1 u_2, \quad \sigma_{23} = c_{44} \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_3 u_2, \quad (4.99)$$

$$\partial_1 \sigma_{21} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_t^2 u_2 = 0,$$

где c_{44} , $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$ и ρ - параметры упругости и плотности для трансверсально-изотропного материала слоя; λ - параметр толщиной неоднородности материала слоя. Задача определения $u_2(x_1, x_2, t)$ сводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $\varphi(x_3)$, решение которого может быть записано в виде

$$\varphi(x_3) = d_+ \exp(\gamma_+ x_3) + d_- \exp(\gamma_- x_3), \quad \gamma_{\pm} = -(\lambda/2) \pm ((\lambda/2)^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad \beta^2 = (\rho \omega^2 - c_{66} k^2) / c_{44}, \quad (4.100)$$

где d_+ , d_- - произвольные постоянные коэффициенты. Далее из граничных условий на закрепленных плоских гранях слоя, которые принимают вид $(\varphi(x_3))_{x_3=h_{\pm}} = 0$ и трансформируются в систему однородных алгебраических уравнений относительно постоянных d_{\pm} , в форме равенства нулю ее определителя записывается основное дисперсионное соотношения для исследуемых нормальных волн и формулируется явное аналитическое представление для фазовой скорости $\vartheta_f^{(p)}$ нормальной волны из моды дисперсионного спектра с номером p ($p = \overline{0, \infty}$)

$$\vartheta_f^{(p)} = F_p(k, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho) = [(c_{11} - c_{12}) / (2\rho) + k^{-2} (c_{44} / \rho) (\lambda^2 / 4 + (p\pi / (h_+ + h_-))^2)]^{1/2}.$$

Функция $F_p(k, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho)$ во всей области допустимых значений аргументов обладает, в частности, свойствами знакоопределенности частных производных $\partial F_p / \partial k < 0$, $\partial F_p / \partial h_+ < 0$, $\partial F_p / \partial h_- < 0$, $\partial F_p / \partial c_{11} > 0$, $\partial F_p / \partial c_{12} < 0$, $\partial F_p / \partial c_{44} > 0$, $\partial F_p / \partial \lambda > 0$, $\partial F_p / \partial \rho < 0$, используемыми, далее, при формировании алгоритма получения нечетких оценок для $\vartheta_f^{(p)}$. С введением для неконтрастных

исходных параметров $k, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho$ нечетко-интервальных представлений $\tilde{k}, \tilde{h}_+, \tilde{h}_-, \tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}, \tilde{\lambda}, \tilde{\rho}$ с разложениями по множествам α - уровня

$$\begin{aligned}\tilde{k} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [k_\alpha, \bar{k}_\alpha], \quad \tilde{h}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_{+\alpha}, \bar{h}_{+\alpha}], \quad \tilde{h}_- = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [h_{-\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}], \quad \tilde{c}_{11} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}], \\ \tilde{c}_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{12\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}], \quad \tilde{c}_{44} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}], \quad \tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\lambda_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\rho_\alpha, \bar{\rho}_\alpha].\end{aligned}$$

Применение к аналитическому представлению для эндогенного параметра фазовой скорости $\mathfrak{G}_f^{(p)}$ модифицированной α -уровневой формы эвристического принципа расширения приводит в рассматриваемом случае к нечетко-множественному описанию $\tilde{\mathfrak{G}}_f^{(p)}$ вида

$$\tilde{\mathfrak{G}}_f^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\mathfrak{G}_f^{(p)}, \bar{\mathfrak{G}}_f^{(p)}], \quad (4.101)$$

$$\mathfrak{G}_f^{(p)} = F_p(\bar{k}_\alpha, \bar{h}_{+\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}, \bar{\lambda}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha),$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_f^{(p)} = F_p(k_\alpha, h_{+\alpha}, h_{-\alpha}, c_{11\alpha}, c_{12\alpha}, c_{44\alpha}, \lambda_\alpha, \rho_\alpha).$$

При использовании вместо экзогенной характеристики k эквивалентного параметра длины рассматриваемой нормальной волны $l = 2\pi/k$

$$\mathfrak{G}_f^{(p)} = G_p(l_\alpha, \bar{h}_{+\alpha}, \bar{h}_{-\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}, \bar{\lambda}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha), \quad (4.102)$$

$$\bar{\mathfrak{G}}_f^{(p)} = G_p(\bar{l}_\alpha, h_{+\alpha}, h_{-\alpha}, c_{11\alpha}, c_{12\alpha}, c_{44\alpha}, \lambda_\alpha, \rho_\alpha),$$

$$G_p(l, h_+, h_-, c_{11}, c_{12}, c_{44}, \lambda, \rho) = [(c_{11} - c_{12})/(2\rho) + (l/(2\pi))^2(c_{44}/\rho)(\lambda^2/4 + (p\pi/(h_+ + h_-))^2)]^{1/2}.$$

В качестве примера реализации описываемой методики может быть представлен случай получения нечетких оценок для фазовых скоростей нормальных волн второй моды анализируемого спектра для волновода в виде слоя-пласта из осадочной горной породы алевролита [133] с нечетко-интервальными физико-механическими параметрами

$$\tilde{h}_+ : (0.22, 0.24, 0.25, 0.28), \quad \tilde{h}_- : (0.12, 0.14, 0.15, 0.16),$$

$$\tilde{\rho} : (1.8\rho_*, 2.0\rho_*, 2.4\rho_*, 2.6\rho_*), \quad \tilde{\lambda} : (0.1, 0.15, 0.18, 0.25),$$

$$\tilde{c}_{11} : (7.01c_*, 7.05c_*, 7.08c_*, 7.16c_*), \quad \tilde{c}_{12} : (2.54c_*, 2.64c_*, 2.68c_*, 2.76c_*),$$

$$\tilde{c}_{44} : (2.06c_*, 2.29c_*, 2.31c_*, 2.34c_*), \quad c_* = 10^{10}, \quad \rho_* = 10^3.$$

Функции принадлежности для нечетких оценок фазовых скоростей нормальных волн из второй моды анализируемого спектра с нечеткими параметрами длины $\tilde{l}_1 : (0.4, 0.55, 0.6, 0.7)$, $\tilde{l}_2 : (0.2, 0.24, 0.26, 0.36)$ соответственно приводятся на рисунках 4.27 и 4.28. Представленные оценки отражают уровни нормированных относительных показателей степени уверенности в том, что анализируемая фазовая скорость будет принимать соответствующее значение при заданных разбросах в значениях экзогенных параметров модели.

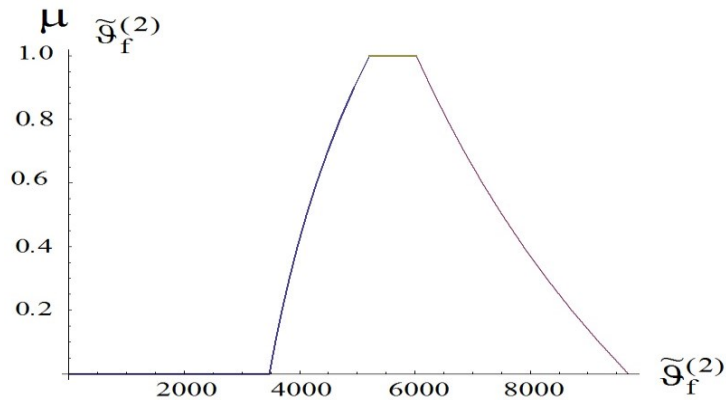


Рис. 4.27. Функция принадлежности для нечетко-множественной оценки фазовой скорости нормальной волны второй моды $g_f^{(2)}$ [м/с] с нечетким параметром относительной длины \tilde{l}_1

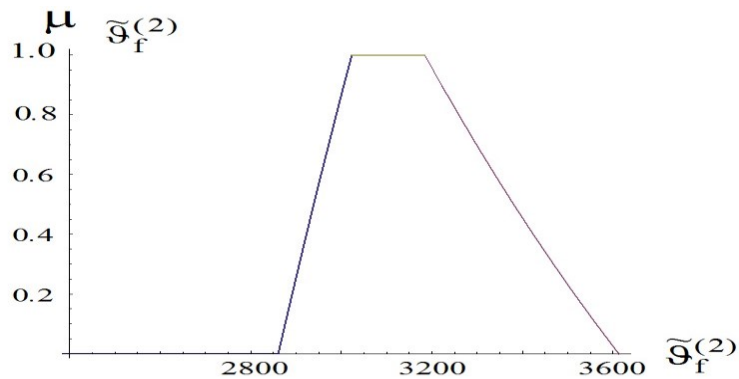


Рис. 4.28. Функция принадлежности для нечетко-множественной оценки фазовой скорости нормальной волны второй моды $g_f^{(2)}$ [м/с] с нечетким параметром относительной длины \tilde{l}_2 .

4.6. Нечеткие оценки для фазовых скоростей нормальных упругих волн в прямоугольных волноводах с мембранными покрытиями и проскальзывающими закреплениями граней.

Представляемый в данном подразделе вариант нечетко-множественной методики предназначен для исследования факторов неопределенности в моделях распространения нормальных волн сжатия-растяжения в прямолинейно-ортотропных волноводах с модулями упругости c_{pq} и параметром плотности ρ , занимающих область $V = \{|x_1| \leq a_1, |x_2| \leq a_2, -\infty < x_3 < \infty\}$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$. Координатные направления Ox_j ориентированы вдоль упруго-эквивалентных направлений материала волновода. В первом из рассматриваемых случаев полагается, что плоских граничных поверхностях волновода имеются тонкие безинерционные абсолютно гибкие нерастяжимые покрытия. Уравнения мод нормальных упругих волн круговой частоты ω в рассматриваемом волноводе, получаемые в рамках классической четкой постановки проблемы [58] с использованием модели линейного динамического деформирования идеально упругих анизотропных сред, являются результатом анализа краевых задач относительно комплексных амплитудных функций волновых упругих перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$, включающих волновые уравнения

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 = 0, \quad (4.103)$$

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 = 0,$$

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 + L_{13}u_3 = 0,$$

в которых

$$L_{11} = c_{11}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 + \Omega^2, \quad L_{22} = c_{44}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 + \Omega^2, \quad (4.104)$$

$$L_{33} = c_{44}\partial_1^2 + c_{44}\partial_2^2 + c_{11}\partial_3^2 + \Omega^2, \quad L_{12} = L_{21} = (c_{12} + c_{44})\partial_1\partial_2,$$

$$L_{13} = L_{31} = (c_{12} + c_{44})\partial_1\partial_3, \quad L_{23} = L_{32} = (c_{12} + c_{44})\partial_2\partial_3, \quad \Omega^2 = \rho\omega^2 R_*^2 c_*^{-1},$$

R_* , c_* – нормирующие параметры для величин с размерностями упругих перемещений и механических напряжений, а также краевые условия вида

$$(u_2)_{x_1=\pm a} = (u_3)_{x_1=\pm a} = (c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{12}\partial_3 u_3)_{x_1=\pm a} = 0, \quad (4.105)$$

$$(u_1)_{x_3=\pm b} = (u_2)_{x_3=\pm b} = (c_{12}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{11}\partial_3 u_3)_{x_3=\pm b} = 0.$$

Для получения аналитических представлений ветвей анализируемого дисперсионного спектра [58] вводятся исходные представления комплексные амплитудных функций рассматриваемых нормальных волн со следующей общей структурой

$$u_j(x_1, x_2, x_3) = g_j(x_1, x_3) \exp(ikx_2) \quad (j = \overline{1,3}), \quad (4.106)$$

и четырьмя вариантами задания подмножеств функций $g_j(x_1, x_3)$, отражающими комбинированную симметрию форм волновых колебаний относительно вертикальной и горизонтальной срединных линий сечения:

$$\begin{aligned} g_{1mn}^{(1)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(1)} \sin \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, & g_{2mn}^{(1)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(1)} \cos \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, & g_{3mn}^{(1)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(1)} \cos \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3; \\ g_{1mn}^{(2)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(2)} \sin \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, & g_{2mn}^{(2)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(2)} \cos \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, & g_{3mn}^{(2)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(2)} \cos \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3; \\ g_{1mn}^{(3)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(3)} \cos \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, & g_{2mn}^{(3)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(3)} \sin \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3, & g_{3mn}^{(3)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(3)} \sin \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3; \\ g_{1mn}^{(4)}(x_1, x_3) &= u_{1mn}^{(4)} \cos \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, & g_{2mn}^{(4)}(x_1, x_3) &= u_{2mn}^{(4)} \sin \lambda_m x_1 \sin \delta_n x_3, & g_{3mn}^{(4)}(x_1, x_3) &= u_{3mn}^{(4)} \sin \lambda_m x_1 \cos \delta_n x_3. \end{aligned}$$

Параметры λ_m, δ_n в этих представлениях имеют вид $\lambda_m = (2m-1)\pi R_*/(2a)$, $\delta_n = (2n-1)\pi R_*/(2b)$. Введенные таким образом комплексные амплитудные функции обеспечивают выполнение краевых условий (4.105) на граничных поверхностях волновода.

Уравнения для мод исследуемых волн в рассматриваемом случае описываются равенствами нулю функциональных определителей

$$F_{mn}^{(j)}(k, \Omega) = \det \left\| \Delta_{pqmn}^{(j)} \right\| = 0 \quad (j, p, q, m, n = \overline{1,3}), \quad (4.107)$$

в которых

$$\Delta_{11mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{11}\lambda_m^2 + c_{44}k^2 + c_{44}\delta_n^2), \quad \Delta_{22mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}k^2 + c_{44}\delta_n^2), \quad (4.108)$$

$$\Delta_{33mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{44}k^2 + c_{11}\delta_n^2),$$

$$\Delta_{12mn}^{(1)} = -\Delta_{21mn}^{(1)} = \Delta_{12mn}^{(2)} = -\Delta_{21mn}^{(2)} = -\Delta_{12mn}^{(3)} = \Delta_{21mn}^{(3)} = -\Delta_{12mn}^{(4)} = \Delta_{21mn}^{(4)} = -ik(c_{12} + c_{44})\lambda_m,$$

$$\Delta_{13mn}^{(1)} = \Delta_{31mn}^{(1)} = -\Delta_{13mn}^{(2)} = -\Delta_{31mn}^{(2)} = -\Delta_{13mn}^{(3)} = -\Delta_{31mn}^{(3)} = \Delta_{13mn}^{(4)} = \Delta_{31mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\lambda_m\delta_n,$$

$$\Delta_{23mn}^{(1)} = -\Delta_{32mn}^{(1)} = -\Delta_{23mn}^{(2)} = \Delta_{32mn}^{(2)} = \Delta_{23mn}^{(3)} = -\Delta_{32mn}^{(3)} = -\Delta_{23mn}^{(4)} = \Delta_{32mn}^{(4)} = ik(c_{12} + c_{44})\delta_n.$$

Приведенные критические частоты мод бегущих нормальных волн являются элементами трех подмножеств $\{\Omega_{mn}^{(j)}\}$ ($j, m, n = \overline{1,3}$), и имеют представления

$$\Omega_{mn}^{(1)} = [c_{44}(\lambda_m^2 + \delta_n^2)]^{1/2}, \quad \Omega_{mn}^{(j)} = [((-1)^j(\mathcal{G}_{mn}^2 - 4\mathcal{C}_{mn})^{1/2} - \mathcal{G}_{mn})/2]^{1/2} \quad (j = \overline{2,3}), \quad (4.109)$$

$$\mathcal{G}_{mn} = -(c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}(\lambda_m^2 + \delta_n^2) + c_{44}\delta_n^2), \quad \mathcal{C}_{mn} = (c_{11}\lambda_m^2 + c_{44}\delta_n^2)(c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}\delta_n^2) - (c_{12} + c_{44})^2 \lambda_m^2 \delta_n^2.$$

Ветви дисперсионных спектров для нормальных волн с различными формами волновых перемещений в сечении волновода, определяемые из (4.77), имеют форму

$$k = \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) \quad (s = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}), \quad (4.110)$$

и соответствующие параметрические зависимости описываются положительными ветвями решений бикубических уравнений

$$\tau_{1mn}^{(j)}k^6 + \tau_{2mn}^{(j)}k^4 + \tau_{3mn}^{(j)}k^2 + \tau_{4mn}^{(j)} = 0 \quad (j = \overline{1,4}); \quad (4.111)$$

где

$$\tau_{1mn}^{(j)} = -c_{11}c_{44}^2, \quad \tau_{2mn}^{(j)} = c_{11}c_{44}(\eta_{11mn}^{(j)} + \eta_{33mn}^{(j)}) + c_{44}^2\eta_{22mn}^{(j)} + c_{44}((\eta_{12mn}^{(j)})^2 + (\eta_{23mn}^{(j)})^2), \quad (4.112)$$

$$\tau_{3mn}^{(j)} = -c_{44}\eta_{11mn}^{(j)}\eta_{22mn}^{(j)} - c_{44}\eta_{22mn}^{(j)}\eta_{33mn}^{(j)} - c_{11}\eta_{11mn}^{(j)}\eta_{33mn}^{(j)} +$$

$$+ 2\chi_{12mn}^{(j)}\chi_{13mn}^{(j)}\chi_{23mn}^{(j)} - (\chi_{23mn}^{(j)})^2\eta_{11mn}^{(j)} - (\chi_{12mn}^{(j)})^2\eta_{33mn}^{(j)} + c_{11}(\chi_{13mn}^{(j)})^2,$$

$$\tau_{4mn}^{(j)} = \eta_{11mn}^{(j)}\eta_{22mn}^{(j)}\eta_{33mn}^{(j)} - \eta_{22mn}^{(j)}(\chi_{13mn}^{(j)})^2;$$

$$\eta_{11mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{11}\lambda_m^2 + c_{44}\delta_n^2), \quad \eta_{22mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{44}\delta_n^2), \quad \eta_{33mn}^{(j)} = \Omega^2 - (c_{44}\lambda_m^2 + c_{11}\delta_n^2), \quad (4.113)$$

$$\chi_{12mn}^{(1)} = \chi_{12mn}^{(2)} = -\chi_{12mn}^{(3)} = -\chi_{12mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\lambda_m,$$

$$\chi_{13mn}^{(1)} = -\chi_{13mn}^{(2)} = -\chi_{13mn}^{(3)} = \chi_{13mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\lambda_m\delta_n,$$

$$\chi_{23mn}^{(1)} = -\chi_{23mn}^{(2)} = \chi_{23mn}^{(3)} = -\chi_{23mn}^{(4)} = -(c_{12} + c_{44})\delta_n.$$

В результате, представления для $\Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)$ ($s = \overline{1,3}$) могут быть записаны в виде

$$\Phi_{1j}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = [\varphi_{1jmn} - 2^{1/3}\varphi_{3jmn}/(3\varphi_{2jmn}\tau_{1mn}^{(j)}) + \varphi_{2jmn}/(3 \cdot 2^{1/3}\tau_{1mn}^{(j)})]^{1/2}; \quad (4.114)$$

$$\Phi_{2j}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = [\varphi_{1jmn} - (1 + 3^{1/2}i)\varphi_{3jmn}/(3 \cdot 2^{2/3}\varphi_{2jmn}\tau_{1mn}^{(j)}) -$$

$$- (1 + 3^{1/2}i)\varphi_{2jmn}/(6 \cdot 2^{1/3}\tau_{1mn}^{(j)})]^{1/2}; \quad (4.115)$$

$$\Phi_{3j}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = [\varphi_{1jmn} - (1 - 3^{1/2}i)\varphi_{3jmn}/(3 \cdot 2^{2/3}\varphi_{2jmn}\tau_{1mn}^{(j)}) -$$

$$- (1 - 3^{1/2}i)\varphi_{2jmn}/(6 \cdot 2^{1/3}\tau_{1mn}^{(j)})]^{1/2}; \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{1jmn} &= \varphi_{1jmn}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = -\tau_{2mn}^{(j)} / (3\tau_{1mn}^{(j)}); \\ \varphi_{2jmn} &= \varphi_{2jmn}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = [-2(\tau_{2mn}^{(j)})^3 + 9\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{2mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)} - 27(\tau_{1mn}^{(j)})^2\tau_{4mn}^{(j)} + \\ &+ (4((-\tau_{2mn}^{(j)})^2 + 3\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)})^3 + (-2(\tau_{2mn}^{(j)})) + 9\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{2mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)} - 27(\tau_{1mn}^{(j)})^2(\tau_{4mn}^{(j)})^2)^{1/2}]^{1/3}; \\ \varphi_{3jmn} &= \varphi_{3jmn}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) = -(\tau_{2mn}^{(j)})^2 + 3\tau_{1mn}^{(j)}\tau_{3mn}^{(j)}.\end{aligned}$$

Соответственно частотные зависимости для фазовых скоростей бегущих нормальных волн с различными определяемыми параметрами (j, m, n) формами волновых упругих перемещений описываются соотношениями

$$v_s^{(j,m,n)}(\omega) = \omega / \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n) \quad (s = \overline{1, 3}). \quad (4.117)$$

В дальнейшем предполагается возможность эффективного описания неопределенных экзогенных параметров рассматриваемой модели $c_{11}, c_{12}, c_{44}, \rho, a, b$ нечеткими нормальными трапецеидальными интервалами $\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{44}, \tilde{\rho}, \tilde{a}, \tilde{b}$ с кортежами реперных точек

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{11} &= (c_{111}, c_{112}, c_{113}, c_{114}), \quad \tilde{c}_{12} = (c_{121}, c_{122}, c_{123}, c_{124}), \quad \tilde{c}_{44} = (c_{441}, c_{442}, c_{443}, c_{444}), \\ \tilde{\rho} &= (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad \tilde{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)\end{aligned}$$

и разложениями по множествам α – уровня

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{11} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}], \quad \underline{c}_{11\alpha} = (1-\alpha)c_{111} + \alpha c_{112}, \quad \bar{c}_{11\alpha} = \alpha c_{113} + (1-\alpha)c_{114}; \quad (4.118) \\ \tilde{c}_{12} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}], \quad \underline{c}_{12\alpha} = (1-\alpha)c_{121} + \alpha c_{122}, \quad \bar{c}_{12\alpha} = \alpha c_{123} + (1-\alpha)c_{124}; \\ \tilde{c}_{44} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}], \quad \underline{c}_{44\alpha} = (1-\alpha)c_{441} + \alpha c_{442}, \quad \bar{c}_{44\alpha} = \alpha c_{443} + (1-\alpha)c_{444}; \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \bar{\rho}_\alpha = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4; \\ \tilde{a} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha], \quad \underline{a}_\alpha = (1-\alpha)a_1 + \alpha a_2, \quad \bar{a}_\alpha = \alpha a_3 + (1-\alpha)a_4; \\ \tilde{b} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha], \quad \underline{b}_\alpha = (1-\alpha)b_1 + \alpha b_2, \quad \bar{b}_\alpha = \alpha b_3 + (1-\alpha)b_4.\end{aligned}$$

Получение параметрических нечетких оценок $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$ ($s = \overline{1, 3}$) реализуется путем перехода в функциональных зависимостях (4.117) к нечетко-интервальным аргументам с применением α – уровневой формы эвристического принципа обобщения, в результате чего записываются представления вида

$$\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega), \bar{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega)], \quad (4.119)$$

$$\underline{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega) = \inf_{\substack{c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}] \\ c_{12} \in [\underline{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}] \\ c_{44} \in [\underline{c}_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]}} \{\omega / \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)\},$$

$$\bar{v}_{s\alpha}^{(j,m,n)}(\omega) = \sup_{\substack{c_{11} \in [\underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{11\alpha}] \\ c_{12} \in [\underline{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}] \\ c_{44} \in [\underline{c}_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}] \\ a \in [\underline{a}_\alpha, \bar{a}_\alpha] \\ b \in [\underline{b}_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \rho \in [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]}} \{\omega / \Phi_{sj}(\Omega, c_{11}, c_{12}, c_{44}, a, b, m, n)\}.$$

Примеры реализации разрабатываемой методики относятся к случаю волновода из монокристалла кремния с заданием следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\tilde{c}_{11} = (164c_*, 166c_*, 167c_*, 169c_*), \quad \tilde{c}_{12} = (63c_*, 65c_*, 66c_*, 67c_*), \quad \tilde{c}_{44} = (77c_*, 79c_*, 80c_*, 82c_*), \\ \tilde{\rho} = (2.30\rho_*, 2.32\rho_*, 2.33\rho_*, 2.34\rho_*), \quad c_* = 10^9[\text{Па}], \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3].$$

Для каждого сочетания значений параметров (j, m, n) анализу подлежат три зависимости $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$ ($s = \overline{1,3}$). Результаты расчетов представлены частотными параметрическими распределениями для характеристик нечетко-множественных описаний фазовых скоростей нормальных волн с различными типами симметрии и различными показателями изменчивости форм волновых перемещений в сечении волновода, а также описаниями вида функций принадлежности для нечетко-множественных величин $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$ ($s = \overline{1,3}$) при некоторых фиксированных значениях параметра круговой частоты ω [рад/с]. Параметры размеров сечения a, b в расчетах рассматривались как четкие величины без разбросов значений и принимались равными $a = 2l_*$, $b = 3l_*$, $b = l_* = 1[\text{м}]$.

Рисунки 4.29 – 4.32 характеризуют результаты расчетов для случая волн из моды ($s=1$) с типом симметрии ($j=1$) и показателями изменчивости поля перемещений в сечении ($m=1, n=21$). Внешние линии на рисунке 4.29 соответствуют уровням $\mu=0$ принадлежности соответствующей характеристики

$v_s^{(j,m,n)}(\omega)$ к нечеткому множеству ее ожидаемых значений $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$, то есть ограничивают носители $\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)$, а внутренние отвечают уровням $\mu=1$ и ограничивают диапазоны наиболее достоверных значений $v_1^{(1,1,1)}(\omega)$ при рассматриваемых разбросах исходных параметров. Аналогичную структуру имеют распределения $v_s^{(j,m,n)}(\omega) \in \tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$ на других нижеприводимых рисунках.

Результаты расчетов для случая волн из мод ($s=2, s=3$) с типом симметрии ($j=1$) и показателями изменяемости поля перемещений в сечении ($m=1, n=21$) представлены соответственно на рисунках 4.33 – 4.40. Эти ветви отвечают квазипоперечным нормальным волнам. Уровни скоростей волн этого типа ниже относящихся к моде ($s=1$).

Анализ результатов моделирования разбросов для значений исследуемых скоростей в волнах с показателем симметрии ($j=1$), представленных на рисунках 4.29 – 4.40, позволяет заключить, что границы интервалов носителей для нечетких множеств, описывающих неопределенные фазовые скорости, имеют отклонения, не превышающие 2 – 3 % от значений параметров дефазификации соответствующих нечетких множеств по методу медиан. Таким образом, разбросы экзогенных и эндогенных параметров в рассматриваемых моделях являются величинами одного порядка. Также можно отметить слабо выраженную тенденцию к уменьшению уровня неопределенности анализируемых фазовых скоростей с ростом частоты рассматриваемых волн.

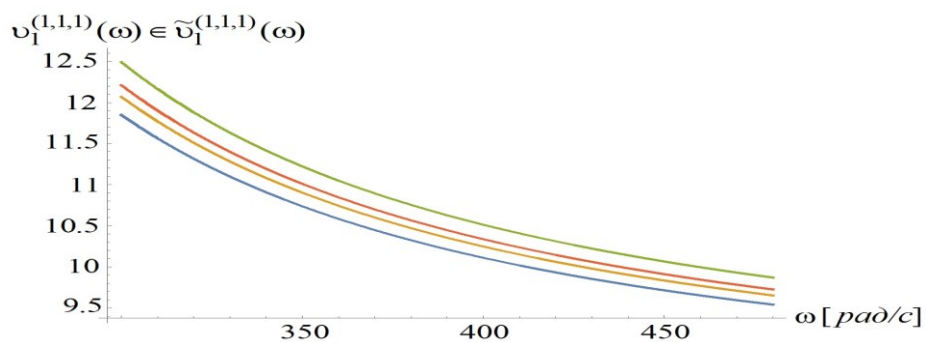


Рис. 4.29. Распределения $v_1^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)$ с показателями $\mu_{\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)}(v_1^{(1,1,1)}(\omega))$

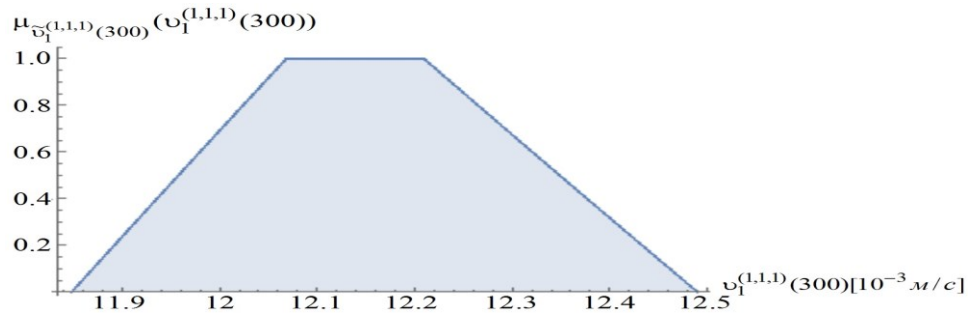


Рис. 4.30. Функция принадлежности для $\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(300)$

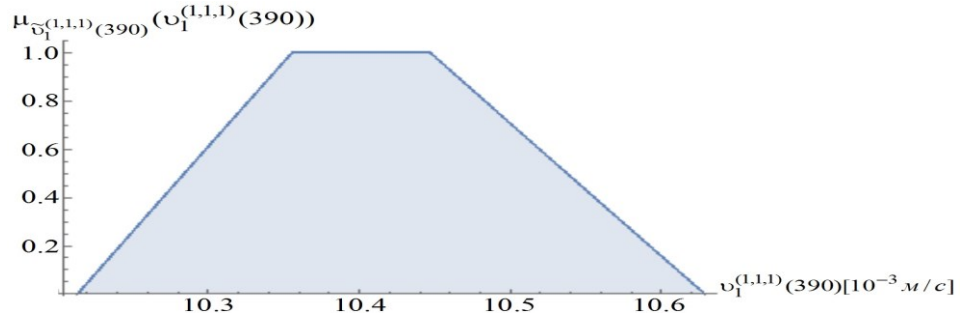


Рис. 4.31. Функция принадлежности для $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(390)$

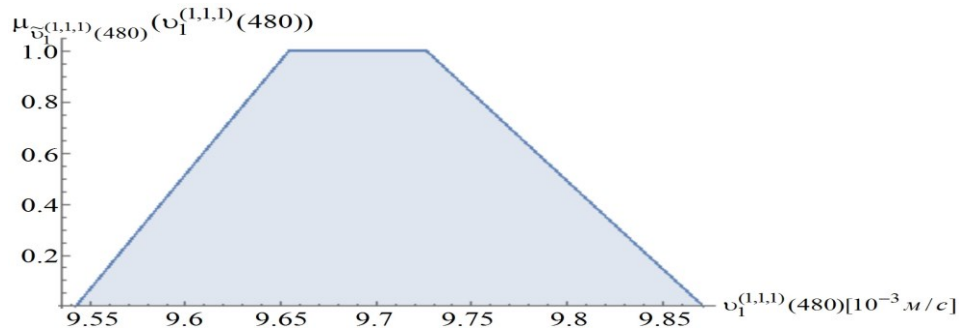


Рис. 4.32. Функция принадлежности для $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(480)$

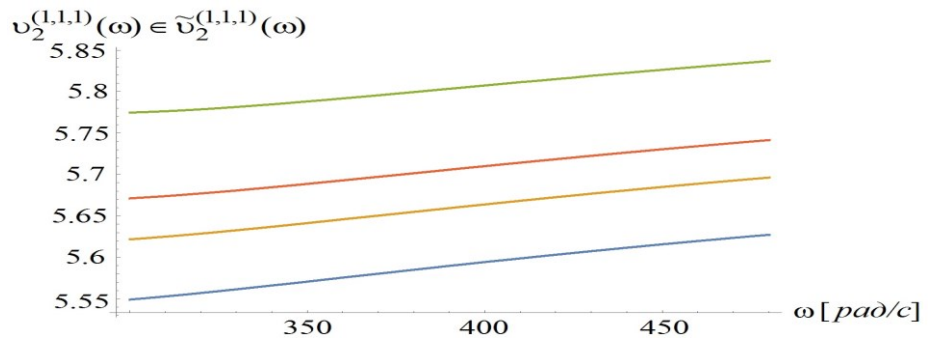


Рис. 4.33. Распределения $v_2^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_2^{(1,1,1)}(\omega)$ с показателями $\mu_{\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(\omega)}(v_2^{(1,1,1)}(\omega))$

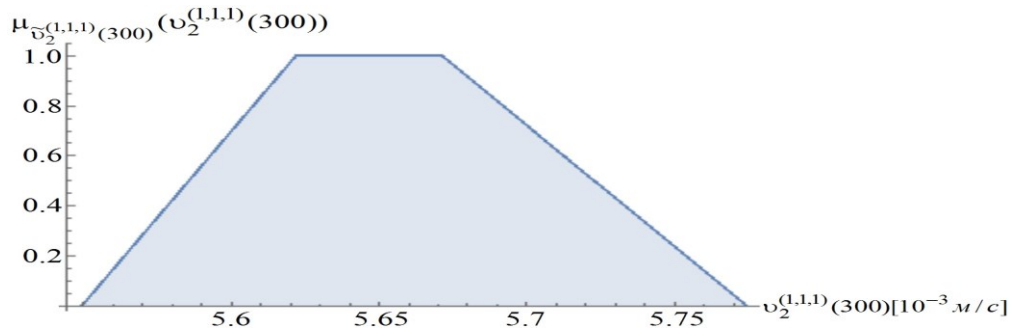


Рис. 4.34. Функция принадлежности для $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(300)$

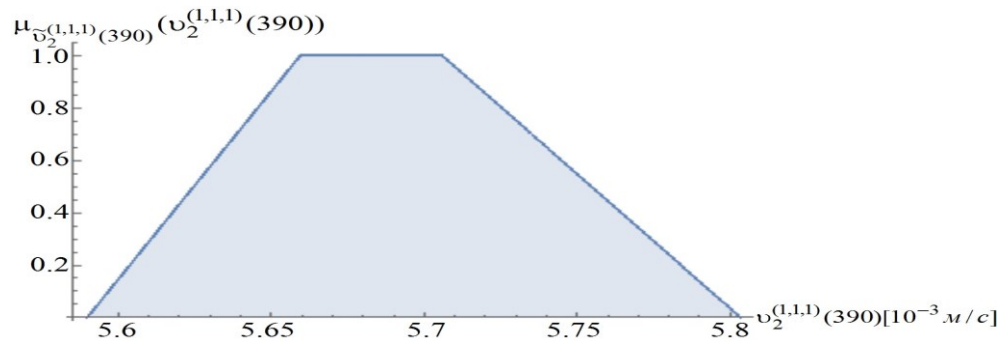


Рис. 4.35. Функция принадлежности для $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(390)$

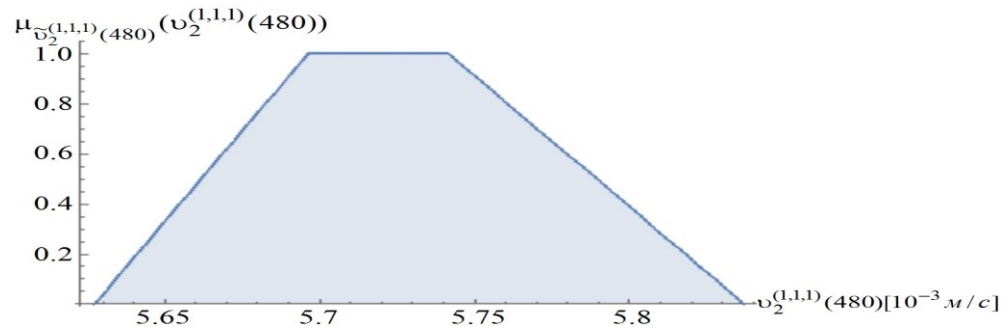


Рис. 4.36. Функция принадлежности для $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(480)$

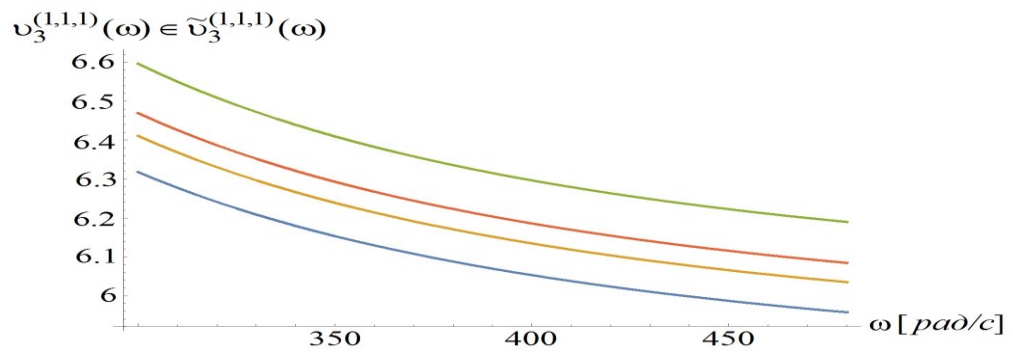
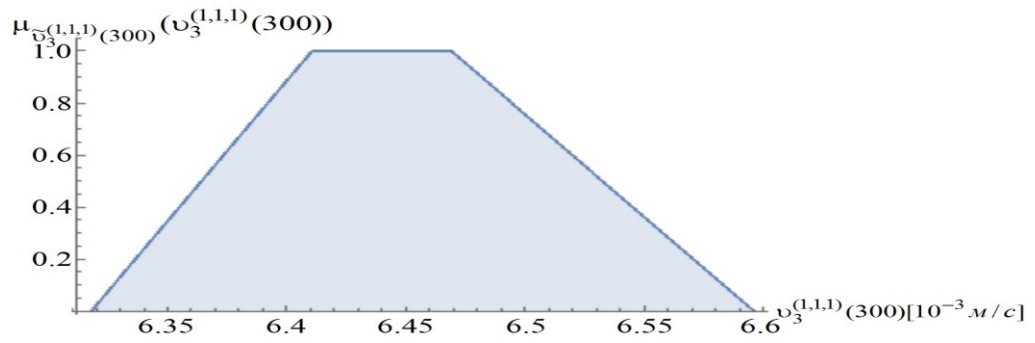
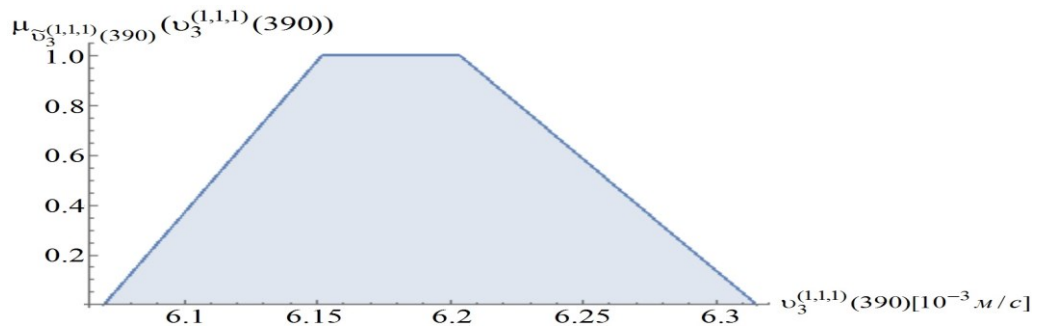
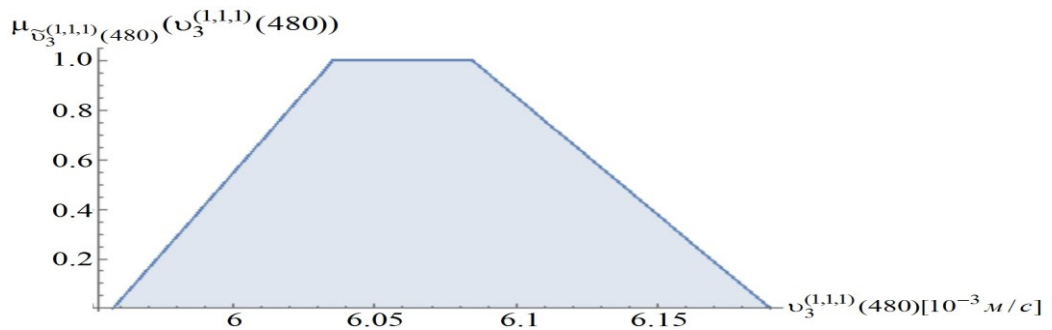


Рис. 4.37. Распределения $v_3^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_3^{(1,1,1)}(\omega)$ с показателями $\mu_{\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(\omega)}(v_3^{(1,1,1)}(\omega))$

Рис. 4.38. Функция принадлежности для $\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(300)$ Рис. 4.39. Функция принадлежности для $\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(390)$ Рис. 4.40. Функция принадлежности для $\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(480)$

Описанный расчетный алгоритм при замене значений λ_m, δ_n на величины $\lambda_m = m\pi R_*/a$, $\delta_n = n\pi R_*/b$ позволяет также получать нечетко-множественные оценки в моделях распространения нормальных волн сжатия-растяжения для прямолинейно-ортотропных волноводов, граничные поверхности которых волновода закреплены с проскальзыванием и соответствующие краевые условия имеют вид

$$(u_1)_{x_1=\pm a} = (\sigma_{12})_{x_1=\pm a} = (\sigma_{13})_{x_1=\pm a} = 0, \quad (u_2)_{x_3=\pm b} = (\sigma_{21})_{x_3=\pm b} = (\sigma_{23})_{x_3=\pm b} = 0. \quad (4.120)$$

Представленная методика обобщается также на случай получения нечетко-множественных оценок характеристик нормальных волн в анизотропных прямоугольных волноводах с комбинированными смешанными условиями на граничных поверхностях, когда на одной из пар противоположных граничных поверхностей волновода $\{x_1 = \pm a, |x_3| \leq b, -\infty < x_2 < \infty\}$ имеются тонкие безинерционные абсолютно гибкие нерастяжимые покрытия, а на второй паре противоположных граней $\{|x_1| \leq a, x_3 = \pm b, -\infty < x_2 < \infty\}$ заданы условия проскальзывающего закрепления, и соответствующие краевые условия имеют вид

$$(u_2)_{x_1=\pm a} = (u_3)_{x_1=\pm a} = (c_{11}\partial_1 u_1 + c_{12}\partial_2 u_2 + c_{12}\partial_3 u_3)_{x_1=\pm a} = 0, \quad (4.121)$$

$$(\partial_1 u_3 + \partial_3 u_1)_{x_3=\pm b} = (\partial_2 u_3 + \partial_3 u_2)_{x_3=\pm b} = (u_3)_{x_3=\pm b} = 0.$$

В этом случае варианты задания $g_j(x_1, x_3)$ в выражениях (4.106) для нормальных волн с альтернативными видами симметрии волновых перемещений имеют вид

$$g_{1mn}^{(1)}(x_1, x_3) = u_{1mn}^{(1)} \sin \lambda_{m1} x_1 \sin \delta_{n1} x_3, \quad g_{2mn}^{(1)}(x_1, x_3) = u_{2mn}^{(1)} \cos \lambda_{m1} x_1 \sin \delta_{n1} x_3, \quad (4.122)$$

$$g_{3mn}^{(1)}(x_1, x_3) = u_{3mn}^{(1)} \cos \lambda_{m1} x_1 \cos \delta_{n1} x_3;$$

$$g_{1mn}^{(2)}(x_1, x_3) = u_{1mn}^{(2)} \sin \lambda_{m2} x_1 \cos \delta_{n2} x_3, \quad g_{2mn}^{(2)}(x_1, x_3) = u_{2mn}^{(2)} \cos \lambda_{m2} x_1 \cos \delta_{n2} x_3,$$

$$g_{3mn}^{(2)}(x_1, x_3) = u_{3mn}^{(2)} \cos \lambda_{m2} x_1 \sin \delta_{n2} x_3;$$

$$g_{1mn}^{(3)}(x_1, x_3) = u_{1mn}^{(3)} \cos \lambda_{m3} x_1 \sin \delta_{n3} x_3, \quad g_{2mn}^{(3)}(x_1, x_3) = u_{2mn}^{(3)} \sin \lambda_{m3} x_1 \sin \delta_{n3} x_3,$$

$$g_{3mn}^{(3)}(x_1, x_3) = u_{3mn}^{(3)} \sin \lambda_{m3} x_1 \cos \delta_{n3} x_3;$$

$$g_{1mn}^{(4)}(x_1, x_3) = u_{1mn}^{(4)} \cos \lambda_{m4} x_1 \cos \delta_{n4} x_3, \quad g_{2mn}^{(4)}(x_1, x_3) = u_{2mn}^{(4)} \sin \lambda_{m4} x_1 \cos \delta_{n4} x_3,$$

$$g_{3mn}^{(4)}(x_1, x_3) = u_{3mn}^{(4)} \sin \lambda_{m4} x_1 \sin \delta_{n4} x_3,$$

где

$$\lambda_{m1} = \lambda_{m2} = (2m-1)\pi R_*/(2a), \quad \lambda_{m3} = \lambda_{m4} = m\pi R_*/a, \quad (4.123)$$

$$\delta_{n1} = \delta_{n3} = (2n-1)\pi R_*/(2b), \quad \delta_{n2} = \delta_{n4} = n\pi R_*/b \quad (m, n = \overline{1, \infty}).$$

С указанными заменами для дальнейшего исследования рассматриваемого варианта модели применяются полученные выше соотношения (4.107) – (4.119).

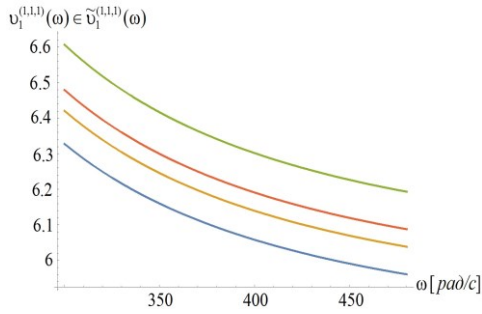
Разработанная методика нечетко-множественного описания частотных распределений фазовых скоростей бегущих нормальных волн в прямоугольном

монокристаллическом волноводе кубической системы с комбинированными смешанными условиями на граничных поверхностях в качестве примера реализована применительно к случаю волновода из монокристалла кремния при задании следующих нечетко-интервальных параметров:

$$\tilde{c}_{11} = (164c_*, 166c_*, 167c_*, 169c_*), \quad \tilde{c}_{12} = (63c_*, 65c_*, 66c_*, 67c_*), \quad \tilde{c}_{44} = (77c_*, 79c_*, 80c_*, 82c_*), \\ \tilde{\rho} = (2.30\rho_*, 2.32\rho_*, 2.33\rho_*, 2.34\rho_*), \quad c_* = 10^9[\text{Па}], \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3].$$

При этом геометрические параметры размеров сечения волновода a, b рассматривались как четкие величины без разбросов значений и принимались равными $a = 2l_*, b = 3l_*, l_* = 1[\text{м}]$. На основе выполненных расчетов для ряда сочетаний значений параметров (s, j, m, n) , идентифицирующих номера мод, типы симметрии и показатели изменяемости форм волновых перемещений в сечении волновода, получены описания частотных параметрических зависимостей для нечетко-множественных характеристик фазовых скоростей нормальных волн, а также описания вида функций принадлежности для нечетко-множественных величин $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega) (s = \overline{1,3})$ при некоторых фиксированных значениях параметра круговой частоты $\omega[\text{рад/с}]$. Так, рисунки 4.41 – 4.44 описывают результаты расчетов для случая волн из моды $(s=1)$ с типом симметрии $(j=1)$ и показателями изменяемости поля перемещений в сечении $(m=1, n=1)$. Внешние из пучка четыре линии на рисунке 4.41 соответствуют уровням $\mu=0$ принадлежности соответствующей характеристики $v_s^{(j,m,n)}(\omega)$ к нечеткому множеству ее ожидаемых значений $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$, то есть ограничивают область носителя $\tilde{v}_1^{(1,1,1)}(\omega)$, а внутренние линии пучка отвечают уровням принадлежности $\mu=1$ и ограничивают диапазоны наиболее достоверных значений $v_1^{(1,1,1)}(\omega)$ при рассматриваемых разбросах исходных параметров. Аналогичной является структура распределений $v_s^{(j,m,n)}(\omega) \in \tilde{v}_s^{(j,m,n)}(\omega)$ на преследующих нижеприведенных рисунках. Вид функций принадлежности на рисунка 4.42 – 4.44 позволяет сделать выводы о степени уверенности в достижении соответствующих значений эндогенными параметрами скоростей при различных значениях

параметра циклической частоты. Из этих рисунков также следует, что разбросы эндогенных параметров в рассматриваемом случае составляют около 4.5 %, то есть имеют порядок, не превышающий порядок максимальных разбросов экзогенных параметров. Результаты расчетов для случая волн из мод ($s = 2, s = 3$) с типом симметрии ($j = 1$) и показателями изменчивости поля перемещений в сечении ($m = 1, n = 1$) представлены соответственно на рисунках 4.45 – 4.49.



4.41. Распределения $v_1^{(1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_1^{(1,1)}(\omega)$ с показателями $\mu_{\tilde{v}_1^{(1,1)}(\omega)}(v_1^{(1,1)}(\omega))$

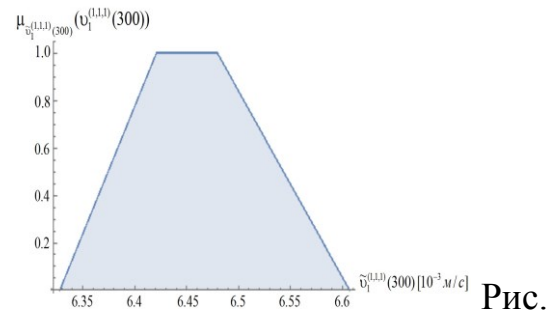


Рис. 4.42. Функция принадлежности для $\tilde{v}_1^{(1,1)}(300)$

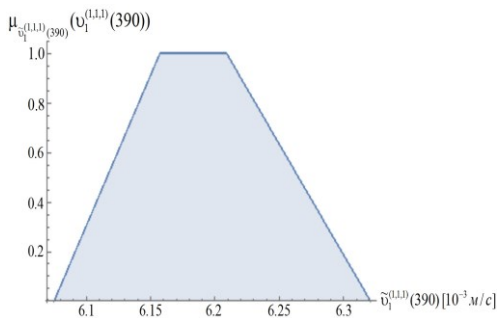


Рис. 4.43. Функция принадлежности для $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(390)$

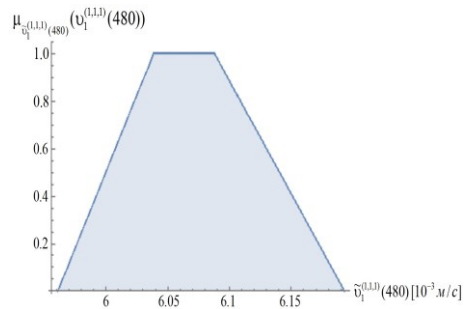


Рис. 4.44. Функция принадлежности для $\tilde{v}_s^{(j,m,n)}(480)$

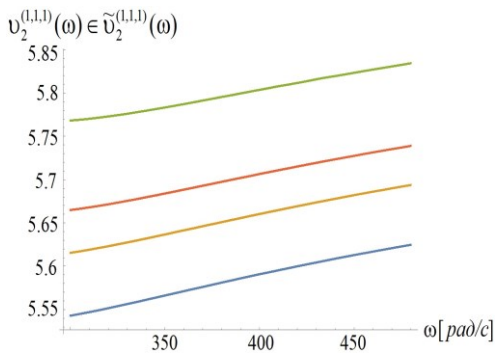


Рис. 4.45. Распределения $v_2^{(1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_2^{(1,1)}(\omega)$ с показателями $\mu_{\tilde{v}_2^{(1,1)}(\omega)}(v_2^{(1,1)}(\omega))$

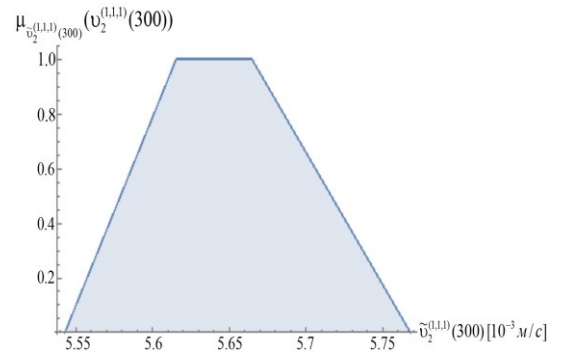


Рис. 4.46. Функция принадлежности для $\tilde{v}_2^{(1,1)}(300)$

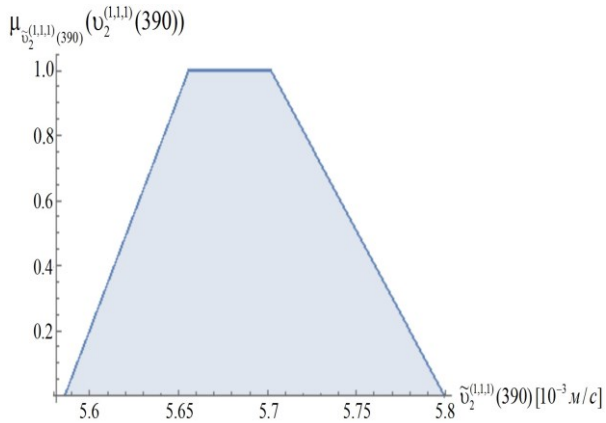


Рис. 4.47. Функция принадлежности
для $\tilde{v}_2^{(1,1,1)}(390)$

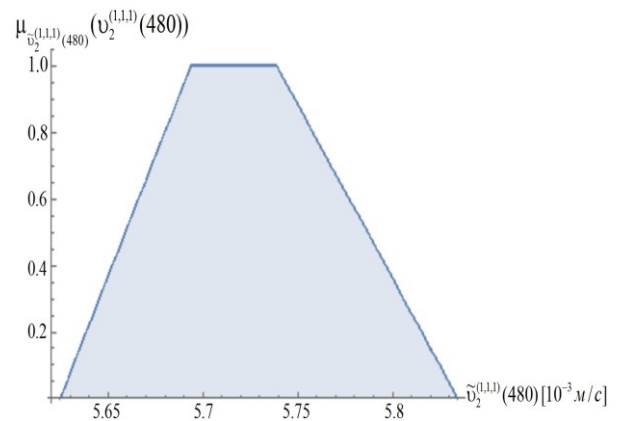


Рис. 4.48. Функция принадлежности
для

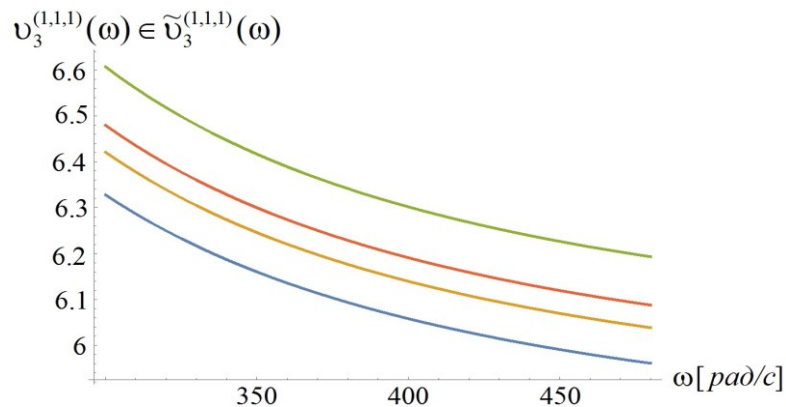


Рис. 4.49. Распределения $v_3^{(1,1,1)}(\omega) \in \tilde{v}_3^{(1,1,1)}(\omega)$
с показателями $\mu_{\tilde{v}_3^{(1,1,1)}(\omega)}(v_3^{(1,1,1)}(\omega))$

4.7. Нечетко-множественный анализ факторов неопределенности в моделях функционирования пористых и перфорированных гидроакустических экранов

К числу исследуемых в диссертационной работе моделей относятся модели получения нечетко-множественных оценок для эффективных характеристик микронеоднородных материалов конструкций гидроакустического экранирования, к числу которых относятся, в частности, пористая резина и пенополиуретан. В применяемых расчетных моделях [90–92] пористая резина (эластичная среда с конгломератом распределенных внутренних сферических

полостей) и ячеистый полимер-пенопласт рассматриваются как однородные квазиизотропные материалы с приведенными усредненными эффективными характеристиками, представления которых получены в ряде теоретико-экспериментальных исследований на основе комплекса прикладных гипотез. К числу ведущих физико-механических характеристик для материалов данного типа, востребованных при оценке прогнозируемых свойств конструктивных элементов систем гидроакустического экранирования, относятся усредненные эффективные величины модулей Юнга, объемных модулей упругости, скоростей волн деформаций, в том числе их оценки в условиях действия внешних высокоинтенсивных сжимающих (гидростатических) усилий, вызывающих изменение сферической формы пор на эллипсоидальную. Получение в специальной форме представлений для анализируемых характеристик является основой для дальнейшего учета неконтрастности в виде разбросов значений исходных структурных геометрических параметров микронеоднородных эластичных материалов и физико-механических параметров материалов-основ на величины искомым усредненных интегральных характеристик.

Полученное в работе [92] прикладное соотношение для расчета объемного модуля упругости K полимерной эластичной среды с конгломератом цилиндрических полостей – пор имеет вид

$$K = K(E, \nu, \varepsilon) = (2/3)E(1 - \varepsilon)(\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))^{-1}, \quad (4.124)$$

где E, ν – модуль Юнга [$\text{кг}/\text{см}^2$] и коэффициент Пуассона для изотропного полимерного материала-основы; ε – усредненное значение коэффициента концентрации равномерно распределенных по объему сферических полостей – микронеоднородностей в пористой среде, определяемое соотношением $\varepsilon = 1 - \rho/\rho_0$, в котором ρ – плотность микропористой среды, ρ_0 – параметр плотности однородного полимерного материала-основы. При этом представляющий практический интерес [92] для расчета характеристик элементов гидроакустического экранирования продольный модуль упругости D описывается выражением

$$D = D(E, \nu, \varepsilon) = 3K(E, \nu, \varepsilon)(1 - \nu_*)(1 + \nu_*)^{-1} = \quad (4.125)$$

$$= 2E(1 - \varepsilon)(1 - \nu)((\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))(1 + \nu))^{-1}, \quad \nu_* = \nu(1 - \varepsilon)^{1/3}.$$

Для высокоэластичного резиноподобного материала с внутренними микрополостями, имеющими в недеформированном состоянии при отсутствии внешнего давления сферическую форму и созданными при помощи газосодержащих микросфер, в случае действия гидростатического давления интенсивности P объемный модуль упругости K_p описывается соотношением

$$K_p = K_p(E, \nu, \varepsilon, \delta) = (\varepsilon_0 / (\varepsilon_0 - \delta))(2/3)E(1 - \varepsilon)(\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))^{-1}, \quad (4.126)$$

$$\varepsilon_0 = (1 + (1 + \nu)(1 - \varepsilon) / (\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu)))^{-1},$$

в котором δ – показатель относительной объемной деформации сферического объема при давлении интенсивности P . Структура вражений (4.124), (4.125) позволяет дать оценивание знакоопределенности частных производных функций $K(E, \nu, \varepsilon)$, $D(E, \nu, \varepsilon)$ по аргументам в областях их допустимых значений $E > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \nu < 0.5$:

$$\partial K(E, \nu, \varepsilon) / \partial E = (2/3)(1 - \varepsilon)(\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))^{-1} \geq 0, \quad (4.127)$$

$$\partial K(E, \nu, \varepsilon) / \partial \nu = -(2/3)(1 - \varepsilon)E(\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))^{-2}(\varepsilon - 4) \geq 0,$$

$$\partial K(E, \nu, \varepsilon) / \partial \varepsilon = 2(1 - \varepsilon)E(\nu - 1)(\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))^{-2}(\varepsilon - 4) \leq 0,$$

$$\partial D(E, \nu, \varepsilon) / \partial E = (2/3)(1 - \varepsilon)(1 - (1 - \varepsilon)^{1/3})((\varepsilon(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu))(1 + (1 - \varepsilon)^{1/3}))^{-1} \geq 0.$$

Еще одной важной расчетной характеристикой является скорость c_l объемных упругих волн продольного типа для высокоэластичных микронеоднородных пористых материалов при различных типах и показателях интенсивности внешнего давления P , в том числе вызывающих формоизменение внутренних сферических полостей. Для данных характеристик в работе [92] получены прикладные соотношения

$$c_l(E, \nu, \varepsilon, \delta, \rho_0, \delta_f) = 2c_l((1 - \nu)((1 + \nu)(\varepsilon_p + 2(1 - 2\nu)/(1 + \nu)))^{-1})^{1/2}, \quad c_l = (E/(3\rho_0))^{1/2}, \quad (4.128)$$

в которых для случая сферических полостей $\varepsilon_p = (\varepsilon_0 - \delta)/(1 - \delta)$; для случая эллиптических полостей $\varepsilon_p = (\varepsilon_0 - \delta_e)/(1 - \delta_e)$, $\delta_e = (1 - \delta_f)^{-4}(\delta/3)((1 + \nu_*)/(1 - \nu_*))$; $\delta_f = (b - c)/b$, где b – радиус сферической микрополости в пористом материале, не

подверженном действию одностороннего внешнего гидростатического давления, c – меньшая ($c < b$) полуось эллипсоида, формирующегося в результате деформирования сферической микрополости под действием одностороннего внешнего гидростатического давления. Экзогенные параметры, входящие в представленные соотношения прикладных моделей описания характеристик микронеоднородных эластичных материалов обладают высокой степенью неконтрастности, разброса в экспериментально определяемых значениях, влекущих неопределенность значений эндогенных расчетных величин.

При получении нечетко-множественных оценок неопределенных характеристик микронеоднородных материалов для параметров $\varepsilon, \nu, E, \delta$ соотношений (4.124) – (4.126) вводятся описания нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\nu}, \tilde{E}, \tilde{\delta}$ с кортежами реперных точек и разложениями по множествам α - срезов

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon} &= (\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}, \varepsilon^{(4)}); \quad \tilde{\varepsilon} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\varepsilon}_\alpha, \bar{\varepsilon}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\varepsilon^{(1)} + \alpha\varepsilon^{(2)}, \alpha\varepsilon^{(3)} + (1-\alpha)\varepsilon^{(4)}); \\ \tilde{\nu} &= (\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \nu^{(3)}, \nu^{(4)}); \quad \tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\nu^{(1)} + \alpha\nu^{(2)}, \alpha\nu^{(3)} + (1-\alpha)\nu^{(4)}); \\ \tilde{E} &= (E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}, E^{(4)}), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)E^{(1)} + \alpha E^{(2)}, \alpha E^{(3)} + (1-\alpha)E^{(4)}); \\ \tilde{\delta} &= (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \delta^{(3)}, \delta^{(4)}), \quad \tilde{\delta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\delta^{(1)} + \alpha\delta^{(2)}, \alpha\delta^{(3)} + (1-\alpha)\delta^{(4)}).\end{aligned}$$

Нечеткие оценки \tilde{K}, \tilde{D} для значений K, D формируется на основе использования функциональных зависимостей (4.125), (4.126) с расширением областей их определения на нечетко-множественные аргументы с применением эвристического принципа обобщения и также имеют форму разложений по множествам α - срезов

$$\begin{aligned}\tilde{K} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)K^{(1)} + \alpha K^{(2)}, \alpha K^{(3)} + (1-\alpha)K^{(4)}), \quad (4.129) \\ \tilde{D} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{D}_\alpha, \bar{D}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)D^{(1)} + \alpha D^{(2)}, \alpha D^{(3)} + (1-\alpha)D^{(4)}),\end{aligned}$$

где с учетом (4.127)

$$\underline{K}_\alpha = (2/3)\underline{E}_\alpha(1-\bar{\varepsilon}_\alpha)(\bar{\varepsilon}_\alpha(1+\underline{\nu}_\alpha)+2(1-2\underline{\nu}_\alpha))^{-1}, \quad \bar{K}_\alpha = (2/3)\bar{E}_\alpha(1-\underline{\varepsilon}_\alpha)(\underline{\varepsilon}_\alpha(1+\bar{\nu}_\alpha)+2(1-2\bar{\nu}_\alpha))^{-1};$$

$$\underline{D}_\alpha = \inf_{\substack{v \in (\underline{V}_\alpha, \underline{V}_\alpha) \\ \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_\alpha)}} D(\underline{E}_\alpha, v, \varepsilon), \quad \bar{D}_\alpha = \sup_{\substack{v \in (\underline{V}_\alpha, \underline{V}_\alpha) \\ \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_\alpha)}} D(\bar{E}_\alpha, v, \varepsilon).$$

Для нечетких оценок характеристик \tilde{K}_p, \tilde{c}_l с применением аналогичного подхода могут быть записаны представления

$$\tilde{K}_p = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{K}_{p\alpha}, \bar{K}_{p\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)K_p^{(1)} + \alpha K_p^{(2)}, \alpha K_p^{(3)} + (1-\alpha)K_p^{(4)}), \quad (4.130)$$

$$\tilde{c}_l = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{l\alpha}, \bar{c}_{l\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)c_l^{(1)} + \alpha c_l^{(2)}, \alpha c_l^{(3)} + (1-\alpha)c_l^{(4)}),$$

в которых для величин $\underline{K}_{p\alpha}, \bar{K}_{p\alpha}$ и $\underline{c}_{l\alpha}, \bar{c}_{l\alpha}$ с учетом свойств $\partial K_p / \partial E \geq 0$, $\partial c_l / \partial E \geq 0$, $\partial c_l / \partial \rho_0 \leq 0$ получены выражения

$$\underline{K}_{p\alpha} = \inf_{\substack{v \in (\underline{V}_\alpha, \underline{V}_\alpha) \\ \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_\alpha) \\ \delta \in (\underline{\delta}_\alpha, \underline{\delta}_\alpha)}} K_p(E_\alpha, v, \varepsilon, \delta), \quad \bar{K}_{p\alpha} = \sup_{\substack{v \in (\underline{V}_\alpha, \underline{V}_\alpha) \\ \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_\alpha) \\ \delta \in (\underline{\delta}_\alpha, \underline{\delta}_\alpha)}} K_p(\bar{E}_\alpha, v, \varepsilon, \delta);$$

$$\underline{c}_{l\alpha} = \inf_{\substack{v \in (\underline{V}_\alpha, \underline{V}_\alpha) \\ \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_\alpha) \\ \delta \in (\underline{\delta}_\alpha, \underline{\delta}_\alpha) \\ \delta_f \in (\underline{\delta}_{f\alpha}, \underline{\delta}_{f\alpha})}} c_l(E_\alpha, v, \varepsilon, \delta, \bar{\rho}_{0\alpha}, \delta_f), \quad \bar{c}_{l\alpha} = \sup_{\substack{v \in (\underline{V}_\alpha, \underline{V}_\alpha) \\ \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_\alpha) \\ \delta \in (\underline{\delta}_\alpha, \underline{\delta}_\alpha) \\ \delta_f \in (\underline{\delta}_{f\alpha}, \underline{\delta}_{f\alpha})}} c_l(\bar{E}_\alpha, v, \varepsilon, \delta, \bar{\rho}_{0\alpha}, \delta_f).$$

В качестве примера реализации описываемой методики могут быть представлены результаты получения нечеткой оценки для характеристики $\tilde{K}(\tilde{E}, \tilde{v}, \tilde{\varepsilon})$ (рис. 4.50) при задании нечетко-интервальных экзогенных параметров в виде $\tilde{E} = (7300, 11200, 12800, 13100)$; $\tilde{v} = (0.38, 0.43, 0.45, 0.47)$; $\tilde{\varepsilon} = (0.5, 0.65, 0.75, 0.8)$.

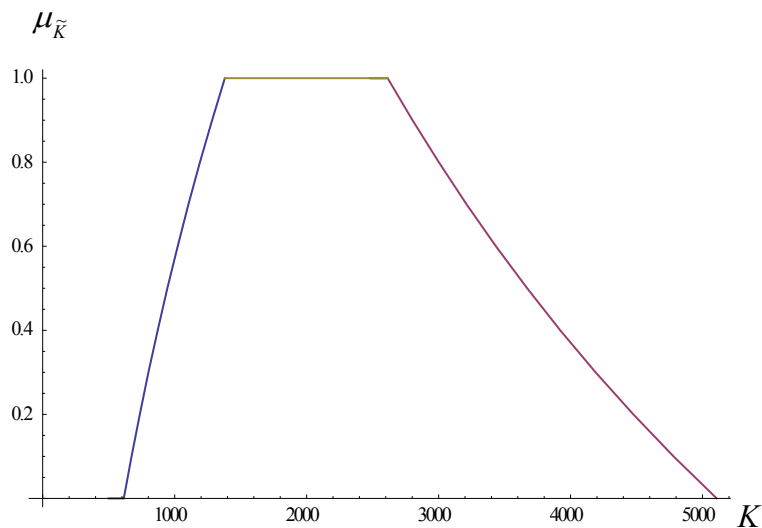


Рис. 4.50. Профиль функции принадлежности для \tilde{K} .

В рамках осуществленных исследований получена также нечеткая оценка в расчетной модели импеданса тонкого поперечно-анизотропного перфорированного гидроакустического покрытия с различными типами герметизации воздухозаполненных полостей. Для случая герметизации полостей проскальзывающими тонкими металлическим пластинами на гранях слоя покрытия, аналитическое выражение для его импеданса Z^* при выполнении свойств

$$c_{33} - 2c_{13}^2\tau^2[c_{11}(\tau^2 + 1) + c_{12}(\tau^2 - 1)]^{-1} \geq 0, \quad [c_{11}(\tau^2 + 1) + c_{12}(\tau^2 - 1)] \geq 0,$$

имеет полученный в работе [91] вид

$$\begin{aligned} Z^* &= F(\rho, \tau, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}) = & (4.131) \\ &= [\rho(1 - \tau^2)^2 (c_{33} - 2c_{13}^2\tau^2 [c_{11}(\tau^2 + 1) + c_{12}(\tau^2 - 1)]^{-1})]^{1/2}, \end{aligned}$$

где $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}$ – упругие постоянные поперечно-анизотропного материала покрытия с толщиной координатой x_3 , ориентированной вдоль оси изотропии; ρ – плотность материала покрытия; τ – коэффициент перфорации покрытия ($0 \leq \tau \leq 1$). В рамках предположения о неопределенности значений ее экзогенных параметров, обусловленной разбросом в их экспериментальных замерах, влиянием комплекса факторов процесса изготовления, а также эксплуатации покрытия на различных глубинах в условиях действия переменного гидростатического давления. для неопределенных экзогенных параметров модели далее вводятся описания нечеткими интервалами $\tilde{\rho}$, $\tilde{\tau}$, \tilde{c}_{ij} ($ij = 11, 12, 13, 33$) с трапецеидальными функциями принадлежности, соответственно характеризуемыми кортежами реперных значений и разложениями по множествам α – уровня

$$(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\tilde{\rho}_{-\alpha}, \tilde{\rho}_{\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(1 - \alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \alpha\rho_3 + (1 - \alpha)\rho_4]; \quad (4.132)$$

$$(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4), \tilde{\tau} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\tilde{\tau}_{-\alpha}, \tilde{\tau}_{\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(1 - \alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2, \alpha\tau_3 + (1 - \alpha)\tau_4];$$

$$(c_{1ij}, c_{2ij}, c_{3ij}, c_{4ij}), \tilde{c}_{ij} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [c_{ij\alpha}, \bar{c}_{ij\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(1 - \alpha)c_{1ij} + \alpha c_{2ij}, \alpha c_{3ij} + (1 - \alpha)c_{4ij}].$$

Искомая нечетко-множественная оценка \tilde{Z}^* для эндогенного параметра импеданса перфорированного гидроакустического покрытия в этом случае также представляется разложением вида

$$\tilde{Z}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tilde{Z}}_\alpha^*, \bar{\tilde{Z}}_\alpha^*],$$

где с учетом свойств

$$\partial F / \partial \rho \geq 0, \quad \partial F / \partial c_{11} \geq 0, \quad \partial F / \partial c_{12} \leq 0, \quad \partial F / \partial c_{13} \leq 0, \quad \partial F / \partial c_{33} \geq 0,$$

записываются представления

$$\underline{\tilde{Z}}_\alpha^* = \inf_{\tau \in [\tau_\alpha, \tau_\alpha]} F(\underline{\rho}_\alpha, \tau_\alpha, \underline{c}_{11\alpha}, \bar{c}_{12\alpha}, \bar{c}_{13\alpha}, \underline{c}_{33\alpha}),$$

$$\bar{\tilde{Z}}_\alpha^* = \sup_{\tau \in [\tau_\alpha, \tau_\alpha]} F(\bar{\rho}_\alpha, \tau_\alpha, \bar{c}_{11\alpha}, \underline{c}_{12\alpha}, \underline{c}_{13\alpha}, \bar{c}_{33\alpha}).$$

В рамках заданий работы реализован также нечетко-множественный анализ факторов неопределенности в модели перфорированных гидроакустических экранов с жестко прикрепленными герметизирующими покрытиями. Применяемый подход основывается на использовании полученного в работе [29] прикладного аналитического соотношения для импеданса величины Z^{**} трансверсально-изотропного упругого слоя с гексагональной двоякопериодической решеткой поперечных круговых цилиндрических полостей при толщинном колебательном деформировании

$$\begin{aligned} Z^{**} &= F_1(\rho, \tau, h, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}) = [\rho(1-\tau^2)^2(c_{33} - 2c_{13}\chi)Y(\tau, h, \tilde{c}_{ij}) / (Y^{(\infty)}(\tau, \tilde{c}_{ij}))]^{1/2} = \\ &= [\rho(1-\tau^2)^2(c_{33} - 2c_{13}\chi) \pi \{ (8/(15\tau^2))(1-\tau^2)(c_{11} - c_{12} + (c_{11} + 2c_{33} - 4c_{13})\tau^2) - \\ &- (8/3)h^{-2}c_{44}(3 + \tau^4 - 4\tau^2 + 4\ln \tau) \} / \{ \pi(8/(15\tau^2))(1-\tau^2)(c_{11} - c_{12} + (c_{11} + 2c_{33} - 4c_{13})\tau^2) \} J^{1/2}, \\ &\chi = c_{13}\tau^2 [c_{11}(\tau^2 + 1) + c_{12}(\tau^2 - 1)] J^{-1}, \end{aligned} \quad (4.133)$$

и зависит от восьми параметров – пяти модулей упругости \tilde{c}_{ij} и плотности ρ трансверсально-изотропного материала, толщины h и коэффициента τ перфорации экрана [29, 36]. Для указанных исходных параметров далее вводятся описания нечеткими интервалами $\tilde{\rho}$, $\tilde{\tau}$, \tilde{c}_{ij} , \tilde{h} с кортежами реперных значений $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$, $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$, $(c_{1ij}, c_{2ij}, c_{3ij}, c_{4ij})$ ($ij = 11, 12, 13, 33, 44$), (h_1, h_2, h_3, h_4) и

разложениями по множествам α -уровня вида (4.132). Искомая нечетко-множественная оценка \tilde{Z}^{**} для эндогенного параметра импеданса перфорированного гидроакустического экрана с герметизацией полостей жестко прикрепленными пластинами также представляется разложением вида $\tilde{Z}^{**} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{Z}_\alpha^{**}, \bar{Z}_\alpha^{**}]$, где с учетом свойства $\partial F_1 / \partial \rho \geq 0$

$$\underline{Z}_\alpha^{**} = \inf_{\tau \in [\underline{\tau}_\alpha, \bar{\tau}_\alpha], c_{ij} \in [c_{ij\alpha}^-, c_{ij\alpha}^+], h \in [h_\alpha^-, \bar{h}_\alpha]} F_1(\underline{\rho}_\alpha, \tau, h, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}),$$

$$\bar{Z}_\alpha^{**} = \sup_{\tau \in [\underline{\tau}_\alpha, \bar{\tau}_\alpha], c_{ij} \in [c_{ij\alpha}^-, c_{ij\alpha}^+], h \in [h_\alpha^-, \bar{h}_\alpha]} F_1(\bar{\rho}_\alpha, \tau, h, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}).$$

В частности, для поперечно-анизотропного перфорированного гидроакустического экрана с четкими нормированными физико-механическими и геометрическими параметрами $c_{11} = 3.91$; $c_{12} = 1.50$; $c_{13} = 0.91$; $c_{33} = 2.99$; $c_{44} = 0.86$; $h = 0.1$; а также с нечетко-интервальными нормированными параметрами вида $\tilde{\rho} = (1.83, 1.89, 1.92, 1.98)$; $\tilde{\tau} = (0.57, 0.59, 0.61, 0.64)$; нечеткая оценка эндогенного параметра импеданса описывается множеством с функцией принадлежности, приведенной на рисунке 4.51.

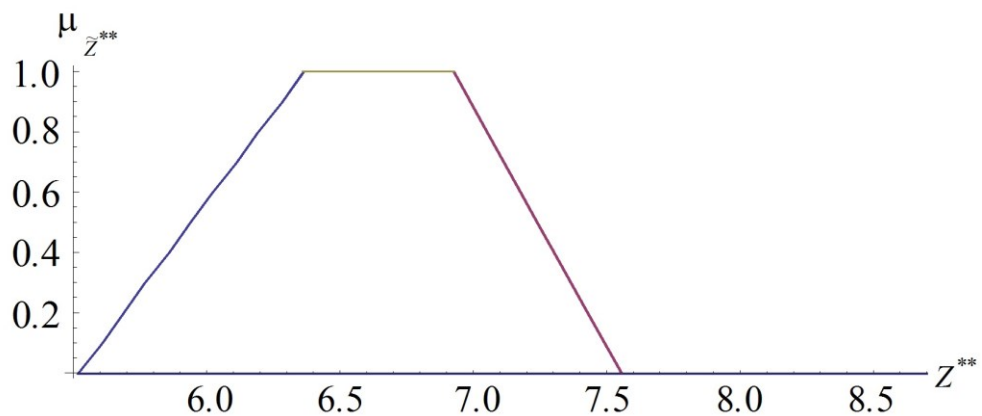


Рис. 4.51. Вид функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{Z}^{**} .

4.8. Нечеткие модели трансформационного взаимодействия гидроакустических волн с плоскими гидроакустическими экранами

В рамках реализации заданий диссертационной работы, данный ее подраздел посвящен разработке нечетко-множественных методов исследования математических моделей функционирования плоских элементов технических систем гидроакустического экранирования при учете факторов неконтрастности исходных физико-механических и геометрических параметров, обусловленной разбросами экспериментальных данных о свойствах конструкционных материалов, проектными технологическими допусками и эксплуатационными допусками. Разрабатываемые теоретические численно-аналитические подходы и программные приложения для их компьютерной реализации предназначены для повышения надежности и эффективности работы гидроакустических экранов на основании учета информации о возможных отклонениях в их проектных характеристиках, определяемых на основе использования детерминистических расчетных методик.

Первым из рассматриваемых вопросов является разработка нечетко-множественного метода анализа математической модели взаимодействия окруженного жидкостью однослойного упругого экрана с нормально падающими на него плоскими волнами гидроакустического давления. Конструкция экрана представляет собой изготовленный из идеально упругого либо линейно-вязкоупругого функционально-градиентного [29–36] трансверсально-изотропного материала плоскопараллельный слой, на граничные поверхности которого могут быть нанесены тонкие, абсолютно гибкие нерастяжимые герметизирующие покрытия. При моделировании экран рассматривается в системе нормированных прямоугольных координат $Ox_1x_2x_3$. Занимаемая экраном область имеет описание $V_L = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, 0 \leq x_3 \leq h\}$, а полубесконечные области перед экраном $V_F^{(-)} = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -\infty \leq x_3 < 0\}$ и за экраном $V_F^{(+)} = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, h < x_3 < \infty\}$ заполнены идеальной слабосжимаемой жидкостью.

Ось упругой симметрии материала экранирующего слоя ориентирована по толщинному направлению Ox_3 , вдоль которого он также обладает непрерывной неоднородностью экспоненциального типа. Механические свойства слоя в общем случае характеризуются тензором комплексных модулей упругости с компонентами вида $c_{ij}^{(\lambda)} = c_{ij} \cdot \exp(\lambda x_3)$, $c_{ij} = c_{ij}^* + ic_{ij}^{**}$, где λ – показатель степени экспоненциальной неоднородности; параметр плотности материала экрана имеет представление $\rho^{(\lambda)} = \rho \exp(\lambda x_3)$. Параметрами нормировки для геометрических характеристик модели является величина h_* , для характеристик плотности и деформационных свойств материала слоя – величины ρ_* и c_* . Физико-механическими характеристиками жидкостей в областях $V_F^{(-)}$ и $V_F^{(+)}$ являются адиабатические модули сжимаемости $\kappa^{(-)}$, $\kappa^{(+)}$ и параметры плотности $\rho_0^{(-)}$, $\rho_0^{(+)}$.

В рассматриваемой модели полагается, что на лицевую поверхность экрана $x_3 = 0$ вдоль положительного координатного направления Ox_3 из глубины полупространства $V_F^{(-)}$ падает монохроматическая стационарная линейная гидроакустическая волна давления с круговой частотой ω . Вследствие ее взаимодействия с экраном формируются отраженная гидроакустическая волна в $V_F^{(-)}$, поле одномерных плоских волн упругих деформаций в слое экрана V_L и гидроакустическая волна, генерируемая в заэкранном полупространстве $V_F^{(+)}$. Задача анализа расчетной модели заключается в описании показателей интенсивности отраженной и генерируемой в заэкранном поле гидроакустических волн по данным об интенсивности падающей волны давления, о физико-механических и геометрических параметрах жидкостей и экранирующего слоя при учете фактора разбросов в реальных значениях всей совокупности либо некоторого подмножества параметров модели. Оценке подлежат соотношения амплитуд давлений в отраженной и падающей волнах, а также в падающей волне и волне, генерируемой в заэкранной заполненной жидкостью области.

В детерминистической версии модель описывается краевой задачей для амплитудных составляющих функций волновых упругих перемещений в

материале экранирующего слоя и потенциалов гидроакустических волн с краевыми условиями на поверхностях $\Gamma_- = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, x_3 = 0\}$, $\Gamma_+ = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, x_3 = h\}$ контакта экрана и объемов жидкости. В число соотношений модели включаются:

– соотношения обобщенного закона Гука для материала слоя

$$\vec{\sigma} = \|c_{ij}^{(\lambda)}\| \vec{\varepsilon},$$

в которых $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$ – вектор амплитудных характеристик механических напряжений; $\vec{\varepsilon} = (\partial_1 u_1, \partial_2 u_2, \partial_3 u_3, \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2, \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1, \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1)$ – амплитудный вектор деформаций с компонентами, выражаемыми через комплексные амплитудные составляющие $u_j(x_1, x_2, x_3)$ ($j = \overline{1, 3}$) функций волновых упругих перемещений в материале слоя; $\partial_j = \partial / \partial x_j$;

– амплитудные уравнения движения для материала слоя

$$\partial_1 \sigma_{1j} + \partial_2 \sigma_{2j} + \partial_3 \sigma_{3j} + \rho \omega^2 u_j = 0 \quad (j = \overline{1, 3});$$

– амплитудные уравнения для потенциалов $\Phi^{(\pm)}$ гидроакустических бездисперсных волн в областях $V_F^{(\pm)}$

$$\Delta \Phi^{(\pm)} + (\omega / c_0^{(\pm)})^2 \Phi^{(\pm)} = 0, \quad (4.134)$$

в которых $c_0^{(\pm)} = (\kappa^{(\pm)} \rho_0^{(\pm)})^{-1/2}$ – параметры фазовых скоростей, $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ – оператор Лапласа. Соотношения связи амплитудных комплексных потенциалов с амплитудными характеристиками векторов скоростей $\vec{v}^{(\pm)}$ и давления $P^{(\pm)}$ в гидроакустических волнах имеют вид

$$\vec{v}^{(\pm)} = -grad \Phi^{(\pm)}, \quad P^{(\pm)} = -i \omega \rho_0^{(\pm)} \Phi^{(\pm)}. \quad (4.135)$$

Краевые условия задачи для комплексных амплитудных характеристик рассматриваемых полей формулируются при отсутствии герметизирующих покрытий на гранях в виде

$$(P^{(\pm)} - \sigma_{33})_{\Gamma_{\pm}} = 0, \quad (v_3^{(\pm)} + i \omega u_3)_{\Gamma_{\pm}} = 0, \quad (\sigma_{3j})_{\Gamma_{\pm}} = 0 \quad (j = \overline{1, 2});$$

а при наличии покрытий – в виде

$$(P^{(\pm)} - \sigma_{33})_{\Gamma_{\pm}} = 0, \quad (v_3^{(\pm)} + i \omega u_3)_{\Gamma_{\pm}} = 0, \quad (u_j)_{\Gamma_{\pm}} = 0 \quad (j = \overline{1, 2}).$$

С учетом симметрии механических свойств материала экрана и ориентации фронта падающей волны давления, в рассматриваемом варианте модели все характеристики процесса являются функциями только одной пространственной координаты x_3 , а их зависимость от времени описывается множителем $\exp(-i\omega t)$. В данном случае, представление для амплитудного потенциала гидроакустической падающей волны имеет вид $\Phi_{01}^{(-)} = \varphi_{01}^{(-)} \cdot \exp(ik_F^{(-)} x_3)$; для отраженной волны давления $\Phi_{02}^{(-)} = \varphi_{02}^{(-)} \cdot \exp(-ik_F^{(-)} x_3)$; для гидроакустической волны в заэкранном пространстве $\Phi^{(+)} = \varphi_0^{(+)} \cdot \exp(ik_F^{(+)} x_3)$. Здесь $k_F^{(\pm)} = \omega / c_0^{(\pm)}$, $\varphi_{01}^{(-)}$ – исходный параметр интенсивности падающей волны давления.

Волновое поле в V_L характеризуется амплитудными комплексными функциями перемещений $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_3)$. При этом $u_3(x_3)$ определяется из уравнения

$$c_{33}^{(\lambda)} \partial_3^2 u_3 + \partial_3 (c_{33}^{(\lambda)} \partial_3 u_3) + \rho^{(\lambda)} \omega^2 u_3 = 0, \quad (4.136)$$

а краевые условия на граничных поверхностях Γ_- , Γ_+ принимают вид

$$(\sigma_{33})_{\Gamma_-} = (-P^{(-)})_{\Gamma_-}, \quad (\partial_t u_3)_{\Gamma_-} = (v_3^{(-)})_{\Gamma_-}, \quad (\sigma_{33})_{\Gamma_+} = (-P^{(+)})_{\Gamma_+}, \quad (\partial_t u_3)_{\Gamma_+} = (v_3^{(+)})_{\Gamma_+}. \quad (4.137)$$

В результате аналитического интегрирования уравнений (4.134), (4.136), а также использования соотношений (4.105), амплитудные характеристики рассматриваемых волновых полей могут представлены в виде

$$\Phi^{(-)} = \varphi_{01}^{(-)} \exp(ik_F^{(-)} x_3) + \varphi_{02}^{(-)} \exp(-ik_F^{(-)} x_3), \quad \Phi^{(+)} = \varphi_0^{(+)} \exp(ik_F^{(+)} x_3), \quad (4.138)$$

$$u_3 = (u_- (\alpha / \omega) \exp(-i\alpha x_3) + u_+ (\alpha / \omega) \exp(i\alpha x_3)) \exp(-(\lambda / 2) x_3),$$

$$\sigma_{33} = (c_{33} / \omega) ((-i\alpha^2 - \alpha\lambda / 2) \cdot u_- \exp((\lambda / 2 - i\alpha) x_3) + (i\alpha^2 - \alpha\lambda / 2) \cdot u_+ \exp((\lambda / 2 + i\alpha) x_3)),$$

$$P^{(-)} = (-i\omega\rho_0^{(-)}) (\varphi_{01}^{(-)} \exp(ik_F^{(-)} x_3) + \varphi_{02}^{(-)} \exp(-ik_F^{(-)} x_3)) = P_1^{(-)} + P_2^{(-)},$$

$$P^{(+)} = (-i\omega\rho_0^{(+)}) \varphi_0^{(+)} \exp(ik_F^{(+)} x_3),$$

$$v_3^{(-)} = ik_F^{(-)} (-\varphi_{01}^{(-)} \exp(ik_F^{(-)} x_3) + \varphi_{02}^{(-)} \cdot \exp(-ik_F^{(-)} x_3)), \quad v_3^{(+)} = -ik_F^{(+)} \varphi_0^{(+)} \exp(ik_F^{(+)} x_3),$$

$$\alpha = (\rho\omega^2 h_*^2 c_{33}^{-1} - \lambda^2 / 4)^{1/2}, \quad k_F^{(\pm)} = \omega / c_0^{(\pm)}.$$

Краевые условия (4.137) при подстановке в них выражений (4.138) преобразуются в систему алгебраических линейных уравнений четвертого порядка с неизвестными в виде параметров $\varphi_{02}^{(-)}, u_c, u_s, \varphi_0^{(+)}$. Ненулевые элементы

столбца правых частей $\|\zeta_j\| (j = \overline{1,4})$ и матрицы $\|\Delta_{ij}\| (i, j = \overline{1,4})$ этой системы описываются представлениями:

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= -i\omega\rho_0^{(-)}, \quad \Delta_{12} = (c_{33}/\omega)(i\alpha^2 + \alpha\lambda/2), \\ \Delta_{13} &= (c_{33}/\omega)(-i\alpha^2 + \alpha\lambda/2), \\ \Delta_{21} &= -ik_F^{(-)}, \quad \Delta_{22} = -i\alpha, \quad \Delta_{23} = -i\alpha, \quad \Delta_{32} = (c_{33}/\omega)(i\alpha^2 + \alpha\lambda/2)\exp((\lambda/2 - i\alpha)h), \\ \Delta_{33} &= (c_{33}/\omega)(-i\alpha^2 + \alpha\lambda/2)\exp((\lambda/2 + i\alpha)h), \\ \Delta_{34} &= -i\omega\rho_0^{(+)} \cdot \exp(ik_F^{(+)}h), \quad \Delta_{42} = (-i\alpha) \cdot \exp(-(\lambda/2 + i\alpha)h), \\ \Delta_{43} &= (-i\alpha) \cdot \exp(-(\lambda/2 - i\alpha)h), \quad \Delta_{44} = ik_F^{(+)} \cdot \exp(ik_F^{(+)}h), \\ \zeta_1 &= i\omega\rho_0^{(-)}\varphi_{01}^{(-)}, \quad \zeta_2 = -ik_F^{(-)}\varphi_{01}^{(-)}.\end{aligned}$$

Для полученной системы решения записываются в аналитической форме

$$\begin{aligned}u_- &= -(\zeta_2\Delta_{11} - \zeta_1\Delta_{21})(\Delta_{34}\Delta_{43} - \Delta_{33}\Delta_{44})\mathfrak{G}^{-1}, \\ u_+ &= (\zeta_2\Delta_{11} - \zeta_1\Delta_{21})(\Delta_{34}\Delta_{42} - \Delta_{32}\Delta_{44})\mathfrak{G}^{-1}, \\ \varphi_{02}^{(-)} &= (-\zeta_1(\Delta_{22}(\Delta_{34}\Delta_{43} - \Delta_{33}\Delta_{44}) + \Delta_{23}(\Delta_{32}\Delta_{44} - \Delta_{34}\Delta_{42})) - \\ &\quad - \zeta_2(\Delta_{13}(\Delta_{34}\Delta_{42} - \Delta_{32}\Delta_{44}) + \Delta_{12}(\Delta_{33}\Delta_{44} - \Delta_{34}\Delta_{43})))\mathfrak{G}^{-1}, \\ \varphi_0^{(+)} &= -(\zeta_2\Delta_{11} - \zeta_1\Delta_{21})(\Delta_{32}\Delta_{43} - \Delta_{33}\Delta_{42})\mathfrak{G}^{-1}, \\ \mathfrak{G} &= -\Delta_{13}\Delta_{21}\Delta_{34}\Delta_{42} + \Delta_{11}\Delta_{23}\Delta_{34}\Delta_{42} + \Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{34}\Delta_{43} - \Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{34}\Delta_{43} - \Delta_{11}\Delta_{23}\Delta_{32}\Delta_{44} \\ &\quad + \Delta_{13}\Delta_{21}\Delta_{32}\Delta_{44} - \Delta_{12}\Delta_{21}\Delta_{33}\Delta_{44} + \Delta_{11}\Delta_{22}\Delta_{33}\Delta_{44}.\end{aligned}$$

Используя представления $\varphi_{02}^{(-)}, \varphi_0^{(+)}$ можно получить в аналитической форме описания эндогенных параметров эффективности экранирования

$$\begin{aligned}g_1(\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega) &= \left| \tilde{P}_2^{(-)} / \tilde{P}_1^{(-)} \right| = \left| \varphi_{02}^{(-)} / \varphi_{01}^{(-)} \right|, \\ g_2(\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega) &= \left| \tilde{P}^{(+)} / \tilde{P}_1^{(-)} \right| = \left| \varphi_0^{(+)} / \varphi_{01}^{(-)} \right|.\end{aligned}\tag{4.139}$$

Аналізу доступны также соотношения квадратов амплитуд давлений, характеризующие энергетические аспекты экранирования.

Представленные результаты анализа детерминистической версии рассматриваемой модели являются основой для разрабатываемого метода нечетко-множественного оценивания эффектов влияния уровней разбросов

значений исходных параметров модели $\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega$ на величины эндогенных характеристик $g_j(\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega)$, $g_j^2(\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega)$. Для характеризующихся наличием ошибок разбросов неконтрастных экзогенных параметров, в качестве которых исходно принимается вся их совокупность, вводятся представления в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов $\tilde{\kappa}^{(\pm)}, \tilde{\rho}_0^{(\pm)}, \tilde{c}_{33}^*, \tilde{c}_{33}^{**}, \tilde{\rho}, \tilde{\lambda}, \tilde{h}, \tilde{\omega}$, задаваемых в случае идеально упругого материала экрана кортежами реперных значений

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}^{(\pm)} &= (\kappa_{\pm}^{(1)}, \kappa_{\pm}^{(2)}, \kappa_{\pm}^{(3)}, \kappa_{\pm}^{(4)}), \quad \tilde{c}_{33} = (c_{33}^{(1)}, c_{33}^{(2)}, c_{33}^{(3)}, c_{33}^{(4)}), \quad \tilde{\rho}_0^{(\pm)} = (\rho_{\pm}^{(1)}, \rho_{\pm}^{(2)}, \rho_{\pm}^{(3)}, \rho_{\pm}^{(4)}), \\ \tilde{\lambda} &= (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)}, \lambda^{(4)}), \quad \tilde{\rho} = (\rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \rho^{(3)}, \rho^{(4)}), \quad \tilde{\omega} = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}, \omega^{(4)}), \\ \tilde{h} &= (h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}, h^{(4)}), \quad \tilde{\omega} = (\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \omega^{(3)}, \omega^{(4)}),\end{aligned}$$

и соответствующими разложениям по множествам α -уровня

$$\begin{aligned}\tilde{\kappa}^{(\pm)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \bar{\kappa}_{\pm\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\kappa_{\pm}^{(1)} + \alpha\kappa_{\pm}^{(2)}, \alpha\kappa_{\pm}^{(3)} + (1-\alpha)\kappa_{\pm}^{(4)}), \\ \tilde{c}_{33} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{c}_{33\alpha}, \bar{c}_{33\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)c_{33}^{(1)} + \alpha c_{33}^{(2)}, \alpha c_{33}^{(3)} + (1-\alpha)c_{33}^{(4)}), \\ \tilde{\rho}_0^{(\pm)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \bar{\rho}_{\pm\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho_{\pm}^{(1)} + \alpha\rho_{\pm}^{(2)}, \alpha\rho_{\pm}^{(3)} + (1-\alpha)\rho_{\pm}^{(4)}), \\ \tilde{\rho} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\rho}_{\alpha}, \bar{\rho}_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\rho^{(1)} + \alpha\rho^{(2)}, \alpha\rho^{(3)} + (1-\alpha)\rho^{(4)}), \\ \tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\lambda}_{\alpha}, \bar{\lambda}_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\lambda^{(1)} + \alpha\lambda^{(2)}, \alpha\lambda^{(3)} + (1-\alpha)\lambda^{(4)}), \\ \tilde{\omega} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\omega}_{\alpha}, \bar{\omega}_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\omega^{(1)} + \alpha\omega^{(2)}, \alpha\omega^{(3)} + (1-\alpha)\omega^{(4)}), \\ \tilde{h} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{h}_{\alpha}, \bar{h}_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)h^{(1)} + \alpha h^{(2)}, \alpha h^{(3)} + (1-\alpha)h^{(4)}).\end{aligned}$$

В рамках используемого подхода, на основе применения α -уровневой модификации эвристического принципа расширения для перехода в представлениях g_j вида (4.139) к нечетко-интервальным аргументам, для нечетко-множественных эндогенных параметров модели \tilde{g}_j получены представления

$$\tilde{g}_j = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{g}_{j\alpha}, \bar{g}_{j\alpha}),$$

$$\underline{g}_{j\alpha} = \inf_{\substack{\kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}_{\pm\alpha}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) \\ c_{33} \in (c_{33\alpha}, c_{33\alpha}) \\ \rho \in (\underline{\rho}_{\alpha}, \overline{\rho}_{\alpha}) \\ \lambda \in (\underline{\lambda}_{\alpha}, \overline{\lambda}_{\alpha}) \\ h \in (\underline{h}_{\alpha}, \overline{h}_{\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_{\alpha}, \overline{\omega}_{\alpha})}} g_j(\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega), \quad \overline{g}_{j\alpha} = \sup_{\substack{\kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \overline{\kappa}_{\pm\alpha}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \overline{\rho}_{\pm\alpha}) \\ c_{33} \in (c_{33\alpha}, c_{33\alpha}) \\ \rho \in (\underline{\rho}_{\alpha}, \overline{\rho}_{\alpha}) \\ \lambda \in (\underline{\lambda}_{\alpha}, \overline{\lambda}_{\alpha}) \\ h \in (\underline{h}_{\alpha}, \overline{h}_{\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_{\alpha}, \overline{\omega}_{\alpha})}} g_j(\kappa^{(\pm)}, \rho_0^{(\pm)}, c_{33}, \rho, \lambda, h, \omega).$$

В процессе анализа отдельных конкретных вариантов рассматриваемой модели, на базе использования разработанного для реализации описанного алгоритма исследования программного приложения, из ряда варьируемых параметров исключаются те или иные характеристики, имеющие наименьшие уровни возможных разбросов, либо заданные точными контрастными значениями. Подобным примером реализации разработанного метода является анализ модели функционирования экрана без герметизирующих покрытий на плоских гранях, для которого существенные уровни разбросов имеют параметры $c_{33}^* \cdot 10^{-10} [Pa]$, $h \cdot 10^{-2} [m]$, λ , остающиеся параметры интерпретируются как контрастные и задаются нормированными значениями $\kappa^{(-)} = \kappa^{(+)} = 2.993$, $\rho_0^{(-)} = \rho_0^{(+)} = 1.0$, $\rho = 2.0$, $\omega = 1.0$ при $c_* = 10^{10} [Pa]$, $h_* = 10^2 [m]$, $\rho_* = 10^3 [kg/m^3]$. Для неконтрастных параметров вводятся нормированные нечетко-интервальные значения

$$\tilde{c}_{33} = (0.96, 0.99, 1.01, 1.04); \tilde{h} = (0.92, 0.97, 1.03, 1.08); \tilde{\lambda} = (0.70, 0.88, 0.92, 1.19).$$

Рассчитанные для рассматриваемого варианта модели функции принадлежности нечетко-множественных параметров \tilde{g}_j , \tilde{g}_j^2 представлены на рисунках 4.52–4.55.

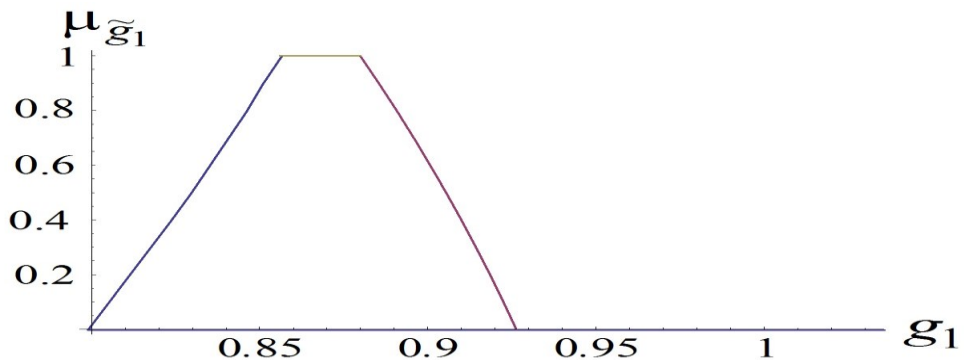
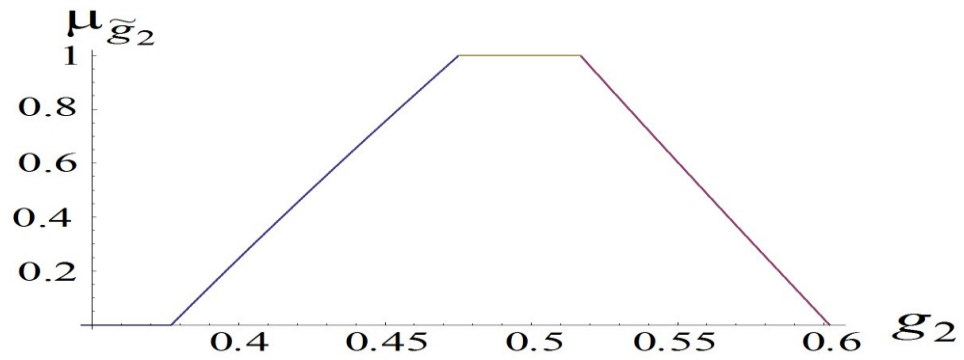
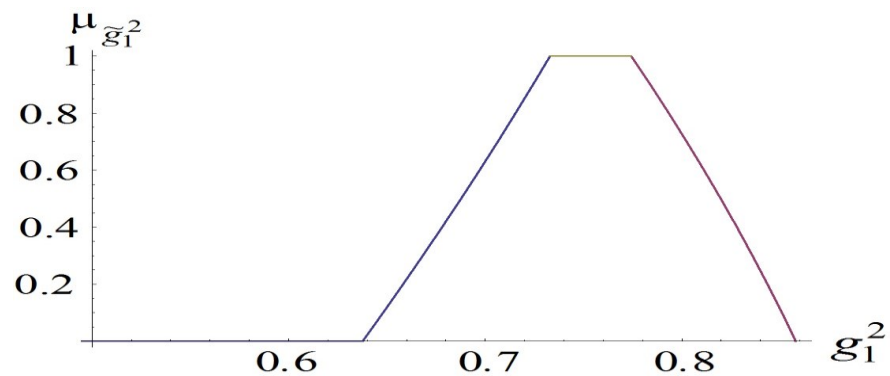
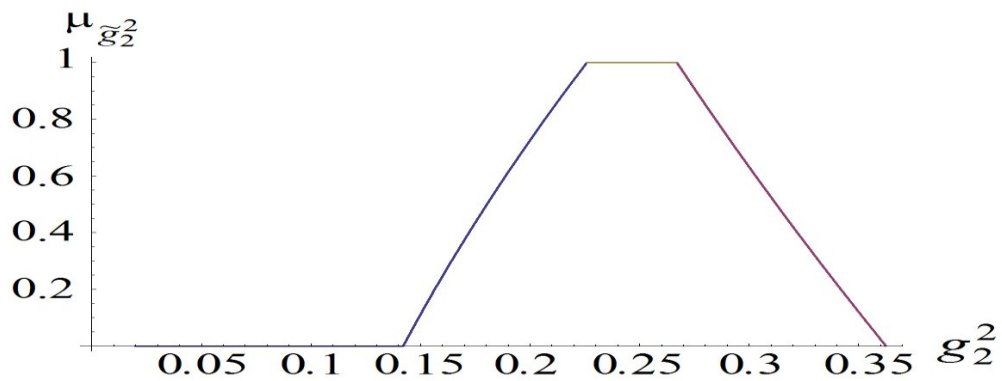


Рис. 4.52. Профиль функции принадлежности для \tilde{g}_1

Рис. 4.53. Профиль функции принадлежности для \tilde{g}_2 Рис. 4.54. Профиль функции принадлежности для \tilde{g}_1^2 Рис. 4.55. Профиль функции принадлежности для \tilde{g}_2^2

Результаты расчетов позволяют оценить диапазоны в наибольшей степени достоверных величин относительных амплитуд для отраженных и генерируемых пространстве за экраном гидроакустических сигналов, а также сделать выводы о границах предельно возможных разбросов для анализируемых эндогенных характеристик. Наличие этой информации позволяет повысить качество достоверность предпроектного моделирования конструкций плоских

однослойных элементов в системах экранирования гидроакустических виброизлучений.

Аналог представленного нечетко-множественного метода для исследования характеризующейся значительной мерой неконтрастности исходных параметров модели гидроакустического однослойного экрана, изготовленного из анизотропного функционально-градиентного материала триклинной системы разработан и описан в работе [29].

Метод нечетко-множественного анализа влияния неконтрастности экзогенных параметров разработан также применительно к модели отражения и преломления стационарной линейной бездисперсной волны гидроакустического давления с круговой частотой ω при падении под углом на плоский однослойный экран, изготовленный из однородного изотропного материала с параметрами Ламе λ , μ и плотностью ρ . Экранирующий слой занимает область V_L с введенным выше описанием и граничит с заполненными жидкостями полубесконечными областями $V_F^{(-)}$, $V_F^{(+)}$. Направление падения волны давления из глубины области $V_F^{(-)}$ описывается вектором \vec{n}_- , лежащим в плоскости Ox_1x_3 . В данном случае амплитудные потенциалы гидроакустических волн давления в $V_F^{(-)}$, $V_F^{(+)}$, а также амплитудные составляющие характеристик волнового деформирования упругого экрана записываются в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(-)} &= \Phi_0^{(-)} + \Phi_{01}^{(-)} = & (4.140) \\ &= \varphi_{01}^{(-)} \cdot \exp(ik_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 + n_3^{(F-)}x_3)) + \varphi_{02}^{(-)} \cdot \exp(ik_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 - n_3^{(F-)}x_3)), \\ \Phi^{(+)} &= \varphi_0^{(+)} \cdot \exp(ik_F^{(+)}(n_1^{(F+)}x_1 + n_3^{(F+)}x_3)); \\ u_j &= u_{0j}^{(P+)} \cdot \exp(ik_P(n_1^{(P)}x_1 + n_3^{(P)}x_3)) + u_{0j}^{(S+)} \cdot \exp(ik_S(n_1^{(S)}x_1 + n_3^{(S)}x_3)) + \\ &+ u_{0j}^{(P-)} \cdot \exp(ik_P(n_1^{(P)}x_1 - n_3^{(P)}x_3)) + u_{0j}^{(S-)} \cdot \exp(ik_S(n_1^{(S)}x_1 - n_3^{(S)}x_3)) \quad (j = \overline{1;3}); \\ P^{(-)} &= (-i\omega)(\varphi_{01}^{(-)} \cdot \exp(ik_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 + n_3^{(F-)}x_3)) + \varphi_{02}^{(-)} \cdot \exp(ik_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 - n_3^{(F-)}x_3))), \\ P^{(+)} &= (-i\omega)(\varphi_0^{(+)} \cdot \exp(ik_F^{(+)}(n_1^{(F+)}x_1 + n_3^{(F+)}x_3))), \\ v_3^{(-)} &= (\varphi_{01}^{(-)} \cdot (ik_F^{(-)}n_3^{(F-)}) \exp(ik_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 + n_3^{(F-)}x_3)) + \\ &+ \varphi_{02}^{(-)} \cdot (-ik_F^{(-)}n_3^{(F-)}) \exp(ik_F^{(-)}(n_1^{(F-)}x_1 - n_3^{(F-)}x_3))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3^{(+)} &= (\varphi_0^{(+)} \cdot (ik_F^{(+)} n_3^{(F+)}) \exp(ik_F^{(+)} (n_1^{(F+)} x_1 + n_3^{(F+)} x_3))), \\
\partial_t u_3 &= (-i\omega)[u_{03}^{(P+)} \cdot \exp(ik_P (n_1^{(P)} x_1 + n_3^{(P)} x_3)) + u_{03}^{(S+)} \cdot \exp(ik_S (n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3)) + \\
&+ u_{03}^{(P-)} \cdot \exp(ik_P (n_1^{(P)} x_1 - n_3^{(P)} x_3)) + u_{03}^{(S-)} \cdot \exp(ik_S (n_1^{(S)} x_1 - n_3^{(S)} x_3))], \\
\sigma_{31} &= \mu[u_0^{(P+)} \cdot (-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_P (n_1^{(P)} x_1 + n_3^{(P)} x_3)) + \\
&+ u_0^{(P-)} \cdot (-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_P (n_1^{(P)} x_1 - n_3^{(P)} x_3)) + \\
&+ u_0^{(S+)} \cdot (-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_S (n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3)) + \\
&+ u_0^{(S-)} \cdot (-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_S (n_1^{(S)} x_1 - n_3^{(S)} x_3))], \\
\sigma_{33} &= u_0^{(P+)} \cdot (- (\lambda + 2\mu) ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_P (n_1^{(P)} x_1 + n_3^{(P)} x_3)) + \\
&+ u_0^{(P-)} \cdot (- (\lambda + 2\mu) ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_P (n_1^{(P)} x_1 - n_3^{(P)} x_3)) + \\
&+ u_0^{(S+)} \cdot (- (\lambda + 2\mu) ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_S (n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3)) + \\
&+ u_0^{(S-)} \cdot (- (\lambda + 2\mu) ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_S (n_1^{(S)} x_1 + n_3^{(S)} x_3)), \\
k_F^{(\pm)} &= \omega / c_0^{(\pm)}, \quad c_0^{(\pm)} = (\kappa^{(\pm)} \rho_0^{(\pm)})^{-1/2}, \quad n_j^{(F-)} = \cos(\bar{n}_-, Ox_j), \quad n_j^{(F+)} = \cos(\bar{n}_+, Ox_j), \\
n_j^{(P)} &= \cos(\bar{n}_p, Ox_j), \quad n_j^{(S)} = \cos(\bar{n}_s, Ox_j), \quad k_P = \omega / c_P, \quad k_S = \omega / c_S, \quad c_P = ((\lambda + 2\mu) / \rho)^{1/2}, \quad c_S = (\mu / \rho)^{1/2}.
\end{aligned}$$

В представлениях (4.140) \bar{n}_s и \bar{n}_p - векторы, характеризующие направления распространения поперечной и продольной составляющих для преломленной волны деформаций, возбуждаемой в слое экрана; $u_{0j}^{(S\pm)}$, $u_{0j}^{(P\pm)}$ - амплитудные комплексные характеристики упругих колебательных перемещений в поперечной и продольной составляющих упругих волн в материале экрана, выражаемые по формулам

$$\begin{aligned}
u_{01}^{(P\pm)} &= \mp \Delta_{13}^{(P)} u_0^{(P\pm)}, \quad u_{03}^{(P\pm)} = -\Delta_{11}^{(P)} u_0^{(P\pm)}, \quad u_{01}^{(S\pm)} = \mp \Delta_{13}^{(S)} u_0^{(S\pm)}, \quad u_{03}^{(S\pm)} = -\Delta_{11}^{(S)} u_0^{(S\pm)}, \\
\Delta_{13}^{(P)} &= -(\lambda + \mu) k_P^2 n_1^{(P)} n_3^{(P)}, \quad \Delta_{11}^{(P)} = \Omega^2 - (\lambda + 2\mu) k_P^2 (n_1^{(P)})^2 - \mu k_P^2 (n_3^{(P)})^2; \\
\Delta_{13}^{(S)} &= -(\lambda + \mu) k_S^2 n_1^{(S)} n_3^{(S)}, \quad \Delta_{11}^{(S)} = \Omega^2 - (\lambda + 2\mu) k_S^2 (n_1^{(S)})^2 - \mu k_S^2 (n_3^{(S)})^2; \quad \Omega^2 = \rho \omega^2,
\end{aligned}$$

через четыре неопределенных множителя $u_0^{(P\pm)}$, $u_0^{(S\pm)}$.

Характеризующий направление падения волны гидроакустического давления угловой параметр ϕ_0 является исходным параметром рассматриваемой модели, и через выражаются величины $n_1^{(F-)} = \cos \phi_0$, $n_3^{(F-)} = \sin \phi_0$.

Соотношения связи углов падения, отражения и преломления, и фигурирующие в представлениях (4.140) неопределенные параметры $\varphi_{02}^{(-)}$, $\varphi_0^{(+)}$, $u_0^{(P\pm)}$, $u_0^{(S\pm)}$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, являющихся следствиями из граничных условий рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} (P^{(-)})_{x_3=0} &= (\sigma_{33})_{x_3=0}, \quad (v_3^{(-)})_{x_3=0} = (-i\omega u_3)_{x_3=0}, \quad (\sigma_{31})_{x_3=0} = 0, \\ (P^{(+)})_{x_3=h} &= (\sigma_{33})_{x_3=h}, \quad (v_3^{(+)})_{x_3=h} = (-i\omega u_3)_{x_3=h}, \quad (\sigma_{31})_{x_3=h} = 0. \end{aligned} \quad (4.141)$$

В рассматриваемом случае, параметры углов отражения и преломления описываются выражениями

$$\begin{aligned} n_1^{(P)} &= n_1^{(F-)}(k_F^{(-)}/k_P), \quad n_3^{(P)} = (1 - (n_1^{(P)})^2)^{1/2}; \quad n_1^{(S)} = n_1^{(F-)}(k_F^{(-)}/k_S), \quad n_3^{(S)} = (1 - (n_1^{(S)})^2)^{1/2}; \\ n_1^{(F+)} &= n_1^{(F-)}(k_F^{(-)}/k_F^{(+)}), \quad n_3^{(F+)} = (1 - (n_1^{(F+)})^2)^{1/2}; \end{aligned} \quad (4.142)$$

а линейные алгебраические уравнения для определения $\varphi_{02}^{(-)}$, $u_0^{(P\pm)}$, $u_0^{(S\pm)}$, $\varphi_0^{(+)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_{02}^{(-)} \cdot s_{11} + u_0^{(P+)} \cdot s_{12} + u_0^{(P-)} \cdot s_{13} + u_0^{(S+)} \cdot s_{14} + u_0^{(S-)} \cdot s_{15} &= p_1, \\ \varphi_{02}^{(-)} \cdot s_{21} + u_0^{(P+)} \cdot s_{22} + u_0^{(P-)} \cdot s_{23} + u_0^{(S+)} \cdot s_{24} + u_0^{(S-)} \cdot s_{25} &= p_2, \\ u_0^{(P+)} \cdot s_{32} + u_0^{(P-)} \cdot s_{33} + u_0^{(S+)} \cdot s_{34} + u_0^{(S-)} \cdot s_{35} &= 0, \\ u_0^{(P+)} \cdot s_{42} + u_0^{(P-)} \cdot s_{43} + u_0^{(S+)} \cdot s_{44} + u_0^{(S-)} \cdot s_{45} + \varphi_0^{(+)} \cdot s_{46} &= 0, \\ u_0^{(P+)} \cdot s_{52} + u_0^{(P-)} \cdot s_{53} + u_0^{(S+)} \cdot s_{54} + u_0^{(S-)} \cdot s_{55} + \varphi_0^{(+)} \cdot s_{56} &= 0, \\ u_0^{(P+)} \cdot s_{62} + u_0^{(P-)} \cdot s_{63} + u_0^{(S+)} \cdot s_{64} + u_0^{(S-)} \cdot s_{65} &= 0; \\ s_{11} &= -i\omega, \quad s_{12} = -(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}, \quad s_{13} = -(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}, \\ s_{14} &= -(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}, \quad s_{15} = -(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}, \\ s_{21} &= -ik_F^{(-)} n_3^{(F-)}, \quad s_{22} = -i\omega, \quad s_{23} = -i\omega, \quad s_{24} = -i\omega, \quad s_{25} = -i\omega, \\ s_{32} &= \mu(-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}), \quad s_{33} = \mu(-ik_P n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + ik_P n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}), \\ s_{34} &= \mu(-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}), \quad s_{35} = \mu(-ik_S n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + ik_S n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}), \\ s_{42} &= (-(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_P n_3^{(P)} h), \\ s_{43} &= (-(\lambda + 2\mu)ik_P n_3^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + \mu ik_P n_1^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(-ik_P n_3^{(P)} h), \\ s_{44} &= (-(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_S n_3^{(S)} h), \\ s_{45} &= (-(\lambda + 2\mu)ik_S n_3^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + \mu ik_S n_1^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(-ik_S n_3^{(S)} h), \quad s_{46} = (-i\omega) \cdot \exp(ik_F^{(+)} n_3^{(F+)} h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{52} &= (-i\omega) \exp(ik_p n_3^{(P)}), \quad s_{53} = (-i\omega) \exp(-ik_p n_3^{(P)} h), \quad s_{54} = (-i\omega) \exp(ik_s n_3^{(S)} h), \\
s_{55} &= (-i\omega) \exp(-ik_s n_3^{(S)} h), \quad s_{56} = (ik_F^{(+)} n_3^{(F+)}) \exp(ik_F^{(+)} n_3^{(F+)} h), \\
s_{62} &= \mu(-ik_p n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} - ik_p n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(ik_p n_3^{(P)} h), \quad s_{63} = (-ik_p n_1^{(P)} \Delta_{11}^{(P)} + ik_p n_3^{(P)} \Delta_{13}^{(P)}) \exp(-ik_p n_3^{(P)} h), \\
s_{64} &= (-ik_s n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} - ik_s n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(ik_s n_3^{(S)} h), \quad s_{65} = (-ik_s n_1^{(S)} \Delta_{11}^{(S)} + ik_s n_3^{(S)} \Delta_{13}^{(S)}) \exp(-ik_s n_3^{(S)} h), \\
p_1 &= i\omega, \quad p_2 = -ik_F^{(-)} n_3^{(F-)}.
\end{aligned}$$

Решения системы алгебраических уравнений (4.143) позволяют дать описания для искомых эндогенных параметров рассматриваемой модели при рассмотрении ее в детерминистической версии. Формализовано данные решения могут быть интерпретированы как функциональные зависимости вида

$$\begin{aligned}
\varphi_{02}^{(-)} &= F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \quad u_0^{(P+)} = F_2(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
u_0^{(P-)} &= F_3(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \quad u_0^{(S+)} = F_4(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \\
u_0^{(S-)} &= F_5(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0), \quad \varphi_0^{(+)} = F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0),
\end{aligned}$$

на базе которых могут быть получены функциональные представления для эндогенных характеристик

$$\begin{aligned}
Q_{02}^{(-)} &= F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}, \\
Q_0^{(+)} &= F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.144}$$

Разрабатываемый нечетко-множественный метод учета эффектов влияния неконтрастности геометрических и физико-механических параметров экрана и характеристик слабосжимаемой идеальной жидкости основывается на использовании соотношений (4.144) для $Q_{02}^{(-)}, Q_0^{(+)}$ и переходе к описаниям неконтрастных параметров с разбросами значений нечетко-множественными величинами в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{\rho}, \tilde{\kappa}^{(-)}, \tilde{\kappa}^{(+)}, \tilde{\rho}_0^{(-)}, \tilde{\rho}_0^{(+)}, \tilde{\omega}, \tilde{h}, \tilde{\phi}_0$. Перечисленные нечетко-интервальные параметры представляются разложениями по множествам α - уровня

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\lambda^{(1)} + \alpha\lambda^{(2)}, \alpha\lambda^{(3)} + (1-\alpha)\lambda^{(4)}, \dots), \\
\tilde{\phi}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\phi}_\alpha, \bar{\phi}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\phi^{(1)} + \alpha\phi^{(2)}, \alpha\phi^{(3)} + (1-\alpha)\phi^{(4)}).
\end{aligned}$$

В результате последующего применения α - уровневой модификации эвристического принципа расширения, для нечетко-множественных эндогенных параметров рассматриваемой модели получены представления вида

$$\tilde{Q}_{02}^{(-)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{Q}_{02\alpha}, \bar{Q}_{02\alpha}), \quad \tilde{Q}_0^{(+)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{Q}_{0\alpha}, \bar{Q}_{0\alpha}). \quad (4.145)$$

$$\underline{Q}_{02\alpha} = \left\{ \inf_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \bar{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \bar{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)}} F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1} \right\},$$

$$\bar{Q}_{02\alpha} = \left\{ \sup_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \bar{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \bar{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)}} F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1} \right\},$$

$$\underline{Q}_{0\alpha} = \left\{ \inf_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \bar{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \bar{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)}} F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1} \right\},$$

$$\bar{Q}_{0\alpha} = \left\{ \sup_{\substack{\lambda \in (\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha) \\ \mu \in (\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha) \\ \rho \in (\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) \\ \kappa^{(\pm)} \in (\underline{\kappa}_{\pm\alpha}, \bar{\kappa}) \\ \rho_0^{(\pm)} \in (\underline{\rho}_{\pm\alpha}, \bar{\rho}_{\pm\alpha}) \\ \omega \in (\underline{\omega}_\alpha, \bar{\omega}_\alpha) \\ h \in (\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha) \\ \phi_0 \in (\underline{\phi}_\alpha, \bar{\phi}_\alpha)}} F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0) \cdot (\varphi_{01}^{(-)})^{-1} \right\}.$$

В процессе численной реализации разработанного нечетко-множественного алгоритма расчет значений $F_1(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0)$, $F_6(\omega, \rho_0^{(-)}, \rho_0^{(+)}, \kappa^{(-)}, \kappa^{(+)}, \rho, \lambda, \mu, h, \phi_0)$ проводится с применением аналитических формул для решения системы алгебраических уравнений (4.143).

Нечетко-множественный $\tilde{\phi}_+ = (Ox_1 \wedge \bar{n}^{(F+)})$ параметр угла распространения волны гидроакустического давления в пространстве за экраном определяется с использованием соотношения детерминистической модели

$$\phi_+ = \arccos((k_F^{(-)} / k_F^{(+)}) \cos \phi_0) = \arccos(((\rho_0^{(+)} \kappa^{(+)}) / (\rho_0^{(-)} \kappa^{(-)}))^{1/2} \cos \phi_0),$$

и при задании параметра ϕ_0 как контрастного, имеющего точное значение без разбросов, имеет представление

$$\tilde{\phi}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\phi_{+\alpha}, \bar{\phi}_{+\alpha}) \quad (4.146)$$

$$\phi_{+\alpha} = \{ \inf_{\mathcal{G} \in (\underline{\mathcal{G}}_\alpha, \bar{\mathcal{G}}_\alpha)} \arccos(\mathcal{G}^{1/2} \cdot \cos \phi_0) \}, \quad \bar{\phi}_{+\alpha} = \{ \sup_{\mathcal{G} \in (\underline{\mathcal{G}}_\alpha, \bar{\mathcal{G}}_\alpha)} \arccos(\mathcal{G}^{1/2} \cdot \cos \phi_0) \},$$

$$\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\mathcal{G}}_\alpha, \bar{\mathcal{G}}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\mathcal{G}^{(1)} + \alpha\mathcal{G}^{(2)}, \alpha\mathcal{G}^{(3)} + (1-\alpha)\mathcal{G}^{(4)}),$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = (\rho_+^{(1)} \kappa_+^{(1)}) / (\rho_-^{(4)} \kappa_-^{(4)}), \quad \mathcal{G}^{(2)} = (\rho_+^{(2)} \kappa_+^{(2)}) / (\rho_-^{(3)} \kappa_-^{(3)}), \quad \mathcal{G}^{(3)} = (\rho_+^{(3)} \kappa_+^{(3)}) / (\rho_-^{(2)} \kappa_-^{(2)}),$$

$$\mathcal{G}^{(4)} = (\rho_+^{(4)} \kappa_+^{(4)}) / (\rho_-^{(1)} \kappa_-^{(1)}).$$

Для расчетного анализа соотношений описанного нечетко-множественного метода разработано программное приложение. С его использованием, в численном эксперименте с заданием нормированных неконтрастных значений $\tilde{\rho}_0^{(+)}, \tilde{\kappa}^{(+)}, \tilde{\rho}_0^{(-)}, \tilde{\kappa}^{(-)}$ в виде нечетких интервалов $\tilde{\rho}_0^{(+)} : (1.26, 1.28, 1.29, 1.33)$, $\tilde{\kappa}^{(+)} : (6.02, 6.05, 6.07, 6.09)$, $\tilde{\rho}_0^{(-)} : (0.96, 0.98, 1.01, 1.04)$, $\tilde{\kappa}^{(-)} : (5.86, 5.88, 5.89, 5.93)$, для случая $\phi_0 = \pi/4$ рассчитанный на основе алгоритма (4.116) профиль функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики $\tilde{\phi}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\phi_{+\alpha}, \bar{\phi}_{+\alpha})$, имеет вид, изображенный на рисунке 4.56.

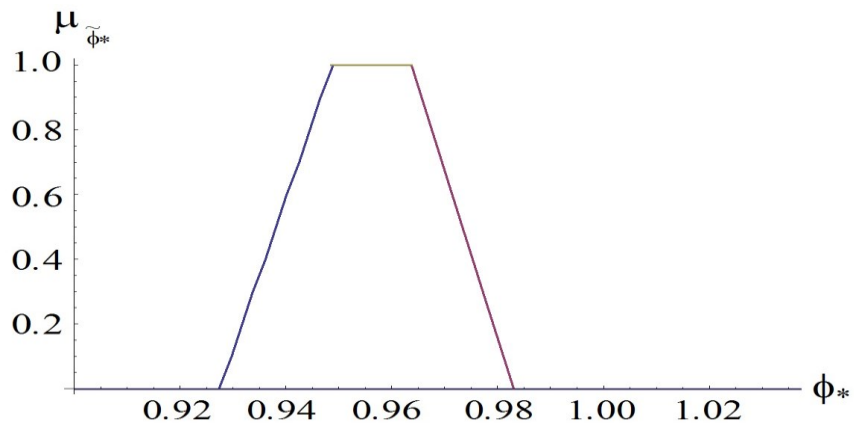


Рис. 4.56. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\phi}_+$

Разработанный метод анализа нечетко-множественной модели наклонного падения гидроакустической волны на однослойный изотропный экран обобщен также применительно к случаю экранирующего слоя с нерастяжимым гибким герметизирующим покрытием на гранях [58]. При этом отличия в соотношениях рассматриваемой модели состоят в модификации граничных условий (4.141) на поверхностях экрана, имеющих в этом случае вид

$$(P^{(-)})_{x_3=0} = (\sigma_{33})_{x_3=0}, \quad (v_3^{(-)})_{x_3=0} = (-i\omega u_3)_{x_3=0}, \quad (u_1)_{x_3=0} = 0, \quad (4.147)$$

$$(P^{(+)})_{x_3=h} = (\sigma_{33})_{x_3=h}, \quad (v_3^{(+)})_{x_3=h} = (-i\omega u_3)_{x_3=h}, \quad (u_1)_{x_3=h} = 0;$$

и соответствующих изменениях в представлениях для отдельных элементов матрицы в системе линейных алгебраических уравнений (4.143):

$$s_{32} = -s_{33} = -\Delta_{13}^{(P)}, \quad s_{34} = -s_{35} = -\Delta_{13}^{(S)}, \quad s_{42} = \zeta_P^{(-)} \exp(ik_P n_3^{(P)} h), \quad s_{62} = -\Delta_{13}^{(P)} \exp(ik_P n_3^{(P)} h), \\ s_{63} = \Delta_{13}^{(P)} \exp(-ik_P n_3^{(P)} h), \quad s_{64} = -\Delta_{13}^{(S)} \exp(ik_S n_3^{(S)} h), \quad s_{65} = \Delta_{13}^{(S)} \exp(-ik_S n_3^{(S)} h).$$

Для данного варианта конструкции экрана с применением разработанного программного приложения при задании экзогенных нечетко-интервальных нормированных параметров модели в виде

$$\tilde{\rho}_0^{(+)} = (1.26, 1.28, 1.29, 1.33), \quad \tilde{\kappa}^{(+)} = (6.02, 6.05, 6.07, 6.09), \quad \tilde{\rho}_0^{(-)} = (0.96, 0.98, 1.01, 1.04),$$

$$\tilde{\kappa}^{(-)} = (5.86, 5.88, 5.89, 5.93), \quad \tilde{\lambda} = (8.3, 8.6, 8.8, 9.2), \quad \tilde{\mu} = (2.2, 2.4, 2.5, 2.8),$$

$$\tilde{\omega} = (0.57, 0.59, 0.61, 0.63), \quad \tilde{\rho} = (2.52, 2.68, 2.82, 2.94), \quad \tilde{h} = (0.0097, 0.0099, 0.0101, 0.0105),$$

получены описания нечетко-множественной характеристики $\tilde{\phi}_+ = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\phi_{+\alpha}, \bar{\phi}_{+\alpha})$

для трех точных значений углов падения $\phi_0 = 2\pi/9 \approx 0.698$, $\phi_0 = \pi/3 \approx 1.047$, $\phi_0 = 4\pi/9 \approx 1.396$. Профили функций принадлежности для соответствующих величин $\tilde{\phi}_+$ приведены на рисунках 4.57 – 4.59. Рассчитаны также нечетко-множественные оценки потенциалов генерируемых в жидкости за экраном и отраженных волн давления для соответствующих началу периода рассматриваемого волнового процесса моментов времени при ряде величин угла падения ϕ_0 и при наличии нечетко-интервального разброса значений только для параметра толщины имеющего мембранные покрытия граней экрана. Оставшиеся

исходные параметры в этих расчетах полагались контрастными с нормированными приведенными значениями $\rho_0^{(+)} = 1.27$; $\rho_0^{(-)} = 0.995$; $\kappa^{(+)} = 6.06$; $\kappa^{(-)} = 5.885$; $\lambda = 8.7$; $\mu = 2.45$; $\rho = 2.75$; $\omega = 0.1$. Имеющие разбросы экзогенные параметры толщины задавалась с варьируемыми нечетко-интервальными значениями $\tilde{h}_1 : (0.195, 0.2, 0.21, 0.22)$, $\tilde{h}_2 : (0.95, 1.0, 1.1, 1.2)$, $\tilde{h}_3 : (1.95, 2.0, 2.1, 2.2)$.

Обнаруживаемым при расчетах свойством является увеличение степени разбросов для эндогенного параметра $\tilde{Q}_{02}^{(-)}$ с ростом относительной толщины экрана. Для случая падения гидроакустической волны под углом $\phi_0 = 70^\circ$ на экраны нечеткой толщины \tilde{h}_2 и \tilde{h}_3 , профили функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{Q}_{02}^{(-)}$ соответственно представлены на рисунках 4.60 – 4.61.

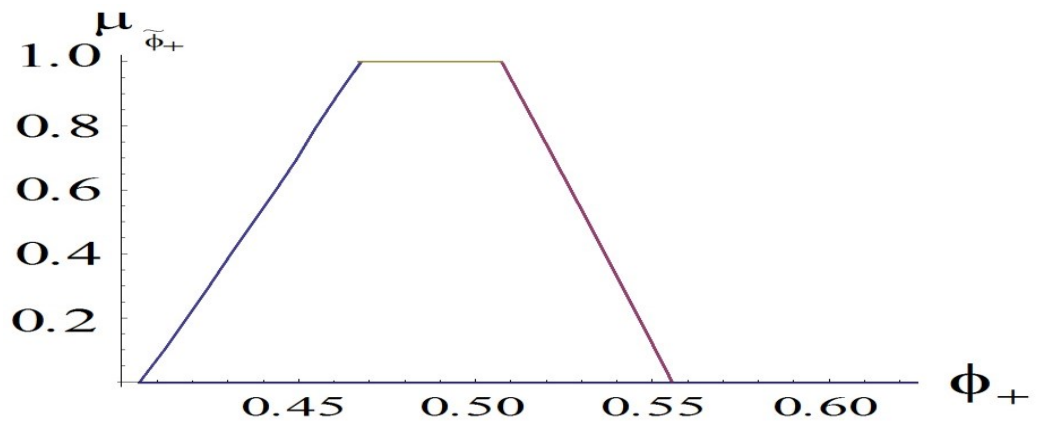


Рис. 4.57. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\phi}_+$ при $\phi_0 = 2\pi/9$

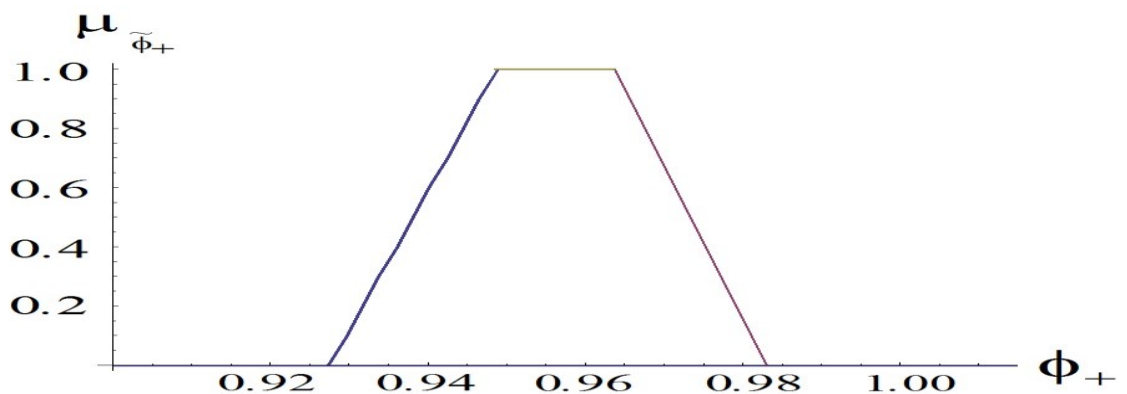


Рис. 4.58. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\phi}_+$ при $\phi_0 = \pi/3$

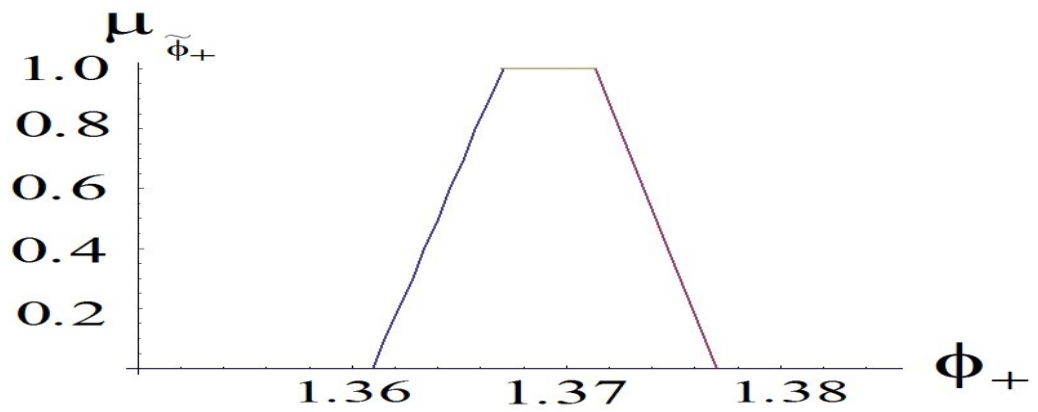


Рис. 4.59. Профиль функции принадлежности для $\tilde{\phi}_+$ при $\phi_0 = 4\pi/9$

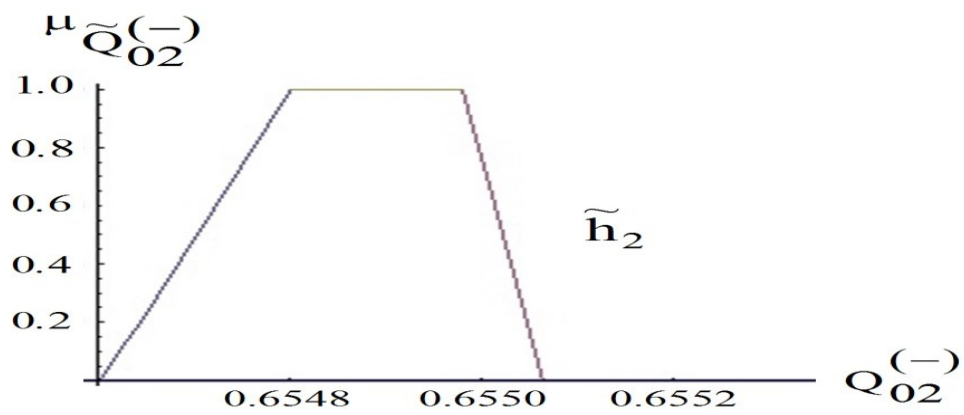


Рис. 4.60. Профиль функции принадлежности $\tilde{Q}_{02}^{(-)}$ для волны, отраженной от экрана нечеткой толщины \tilde{h}_2 при $\phi_0 = 70^\circ$.

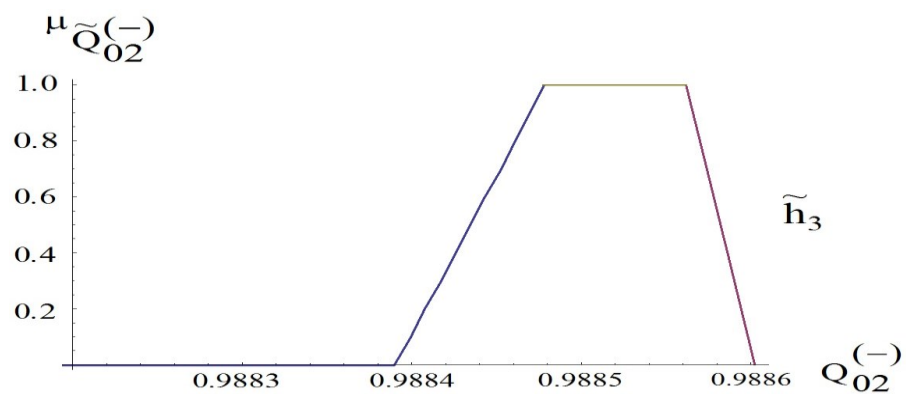


Рис. 4.61. Профиль функции принадлежности $\tilde{Q}_{02}^{(-)}$ для волны, отраженной от экрана нечеткой толщины \tilde{h}_3 при $\phi_0 = 70^\circ$.

В качестве выводов по результатам расчетов можно также указать на изменение профиля $\mu_{\tilde{Q}_0^{(+)}}$ по сравнению с профилями $\mu_{\tilde{Q}_{02}^{(-)}}$, и существенное увеличение степени неопределенности $\tilde{Q}_0^{(+)}$. В целом, разработанный метод является эффективным инструментом для прогнозирования возможных разбросов в оценках параметров отраженных и генерируемых за экраном гидроакустических волн при учета экспериментальных погрешностей и технологических допусков исходных параметров проектируемых конструкций технических систем виброакустического экранирования.

4.9. Выводы по разделу 4

1. Разработан метод получения нечетко-множественных оценок для эндогенных параметров ряда расчетных моделей теории объемных волн деформаций, включая модели расчета фазовых скоростей объемных волн и импедансов в изотропных линейно-упругих средах, скоростей объемных электроупругих волн в пьезокристаллической среде тетрагонального класса и в магнитно-изотропной диэлектрической пьезокерамической среде гексагонального класса, скоростей и параметров рассеяния объемных волн в многокомпонентных упруго-пористых сатурированных и водонасыщенных средах при учета разбросов в их физико-механических параметров.

2. Разработан метод нечетко-множественного оценивания эндогенных характеристик в моделях с неконтрастными исходными параметрами для расчета фазовых скоростей ультразвуковых поверхностных упругих волн релеевского типа в изотропных и трансверсально-изотропных полупространствах; фазовых скоростей поверхностных сдвиговых электроакустических волн Гуляева-Блюстейна в полупространстве пьезоэлектрика класса 6mm гексагональной системы.

3. Разработан метод получения нечетко-множественных оценок для эндогенных кинематических и энергетических характеристик в моделях расчета коэффициентов отражения и преломления упругих волн, в том числе при

нормальном падении продольных гармонических объемных волн с плоским фронтом на границу идеального механического контакта разнородных изотропных либо трансверсально-изотропных полупространств, при падении плоской сдвиговой электроупругой волны на границу контакта двух полубесконечных тел из линейно-поляризованной пьезокерамики класса 6mm при учета неконтрастности параметров среды распространения.

4. Разработан метод получения нечетко-множественных оценок в модели расчета характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде с разбросами значений физико-механических параметров.

5. Разработан метод получения нечетко-множественных оценок для модели расчета характеристик нормальных волн деформаций в однослойных и двухслойных упругих волноводах в виде мембранированной ортотропной пластины, трансверсально-изотропного упругого слоя со свободными либо жестко закрепленными гранями, трансверсально-изотропного функционально-градиентного экспоненциально-неоднородного по толщине упругого слоя с жестко закрепленными граничными поверхностями при учете неконтрастности свойств конструкционных материалов и геометрических параметров рассматриваемых объектов исследования.

6. Разработан метод получения нечетко-множественных оценок для модели расчета фазовых скоростей нормальных упругих волн в призматических прямолинейно-ортотропных волноводах прямоугольного сечения с различными сочетаниями условий наличия мембранных покрытий либо проскальзывающего закрепления граней при учете факторов неопределенности для значений исходных параметров.

7. Разработан метод нечетко-множественного анализа факторов неопределенности в моделях функционирования пористых и перфорированных гидроакустических экранов, в том числе получения нечетко-множественных оценок для эффективных характеристик микронеоднородных материалов конструкций гидроакустического экранирования, нечетких оценок в расчетных

моделях импеданса тонкого поперечно-анизотропного перфорированного гидроакустического покрытия с различными типами герметизации воздухозаполненных полостей.

8. Разработан нечетко-множественный метод оценивания разбросов в значениях исходных физико-механических и геометрических параметров на показатели эффективности функционирования плоских анизотропных гидроакустических экранов применительно к модели нормального падения волны давления на однослойный плоский гидроакустический экран из поперечно-анизотропного вязкоупругого функционально-градиентного материала; модели наклонного падения волны давления на однослойный изотропный экран в случаях наличия либо отсутствия на гранях экранирующего слоя тонких гибких нерастяжимых покрытий.

9. Разработан комплекс программных приложений для компьютерной реализации нечетко-множественных методов анализа представленных в разделе моделей распространения, дисперсии и трансформации объемных и поверхностных упругих волн с неопределенными исходными параметрами.

РАЗДЕЛ 5. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН, ПАНЕЛЕЙ И ЦИЛИНДРОВ

5.1. Алгоритм учета факторов неопределенности экзогенных параметров в модели колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин

Согласно [42, 166], объектом рассмотрения, в связи с анализом проблемы поперечных колебаний тонкой пластинки кристаллического графита, является симметричный по толщине пакет, включающий $n+1$ слой пренебрежимо малой толщины из графена с плотностью ρ_0 и модулями упругости E_{ij}, G_{ij} , а также n межслойных промежутков толщины h_0 , заполненных изотропной средой с податливостью $G_{13}^{(0)}$ и исчезающе малыми плотностью и жесткостью. Срединная плоскость пакета лежит в координатной плоскости Ox_1x_2 связываемой с пластиной системы координат $Ox_1x_2x_3$. При определении интегральных параметров изгибной жесткости D и жесткости на поперечный сдвиг Γ для шарнирно опертой по краям нанопластины-пакета толщины $h = nh_0$ со сторонами l_1, l_2 и с занимающей область $S = \{x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2]\}$ срединной плоскостью, учитывается изгибная жесткость D_0 и жесткость на растяжение K_0 отдельных графеновых слоев, в результате чего для D, Γ получены [166] представления

$$D = (n+1)D_0 + \alpha_n h_0^2 K_0 = \alpha_n h_0^2 K_0 (1 + \xi_n), \quad \xi_n = (n+1)D_0 / (\alpha_n h_0^2 K_0), \quad K_0 = E_0 h_0, \quad (5.1)$$

$$\alpha_n = n(n+1)(n+2)/12, \quad \Gamma = 5h_0 G_{13}^{(0)} / (6\gamma_n), \quad E_0 = E_{11} - E_{13}^2 E_{33}^{-1}, \quad \gamma_n = (n^2 + 2n + 2) / (n(n+1)(n+2)).$$

Применительно к случаям колебаний с параметрами изменяемости p, q для амплитудных форм поперечных смещений $w_{pq}(x_1, x_2) = w_0 \sin(pr_1 x_1) \sin(qr_2 x_2)$ вводится также безразмерный сдвиговой параметр

$$g_{pq} = Dr_{pq}^2 / \Gamma = \delta_n K_0 \mu_{0pq}^2 / G, \quad r_{pq} = \pi(p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2})^{1/2}, \quad (5.2)$$

$$r_j = \pi / l_j, \quad \mu_{0pq} = r_{pq} h_0, \quad G = G_{13}^{(0)} h_0, \quad \delta_n = (n^2 + 2n + 2) / 10;$$

G – жесткость нанопластины на поперечный сдвиг [166]. Как отмечается в работе [166], величиной ξ_n в представлении (5.1), ввиду малости изгибной жесткости

отдельных графеновых слоев, можно пренебречь и, таким образом, использовать для расчета D выражение

$$D = \alpha_n h_0^2 K_0. \quad (5.3)$$

В рамках описанной модели, приближенные значения технических собственных частот f_{npq} поперечных колебаний с формами (p, q) для шарнирно-опертой по краям прямоугольной $(n+1)$ -слойной графеновой нанопластины со сторонами l_1, l_2 и с массой единицы площади $q_{0n} = (n+1)\rho_0$ определяются [166] соотношением

$$f_{npq} = (2\pi)^{-1} r_{pq}^2 (D / (q_{0n} (1 + g_{npq})))^{1/2}, \quad (5.4)$$

которое в случае использования представления (5.3) принимает вид

$$f_{npq} = \mu_{0pq}^2 v_* (n(n+2) / (1 + g_{npq}))^{1/2}, \quad v_* = (2\pi)^{-1} (K_0 / (h_0^2 \rho_0))^{1/2}, \quad (5.5)$$

$$g_{npq} = (n^2 + 2n + 2) \mu_{0pq}^2 g_*, \quad g_* = K_0 / (10 h_0 G_{13}^{(0)}).$$

С использованием соотношений (5.1) – (5.5) величина f_{npq} может быть выражена через исходные параметры модели в форме

$$f_{npq} = F_{npq}(l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}, n, p, q) = (h_0^{3/2} / (2\pi)) (p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2}) \rho_0^{-1/2} \cdot \\ \cdot ((n(n+2))^{1/2} (E_{11} - E_{13} / E_{33}))^{1/2} (1 + \delta_n (E_{11} - E_{13} / E_{33}) \pi^2 h_0^2 (p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2}) / G_{13}^{(0)})^{-1/2}. \quad (5.6)$$

Представление (5.6) является соотношением детерминистического варианта модели, подлежащим, в принципе, использованию в алгоритме формирования нечетких оценок \tilde{f}_{npq} для частотных характеристик f_{npq} при учете разбросов в значениях экзогенных параметров $l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}$. При последующем переходе к модели нечеткого оценивания, соотношение (5.6) для оптимизации рассматриваемого ниже расчетного алгоритма целесообразно преобразовать к виду

$$f_{npq} = \Phi_{npq}(\rho_0, G_{13}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q) = (2/\pi) \rho_0^{-1/2} K_0^{1/2} R_{pq} ((n(n+2))^{1/2} \cdot \\ \cdot (1 + \delta_n K_0 R_{pq} / G_{13}^{(0)})^{-1/2}; \quad K_0 = (E_{11} - E_{13} / E_{33}) h_0, \quad R_{pq} = h_0 \pi^2 (p^2 l_1^{-2} + q^2 l_2^{-2}). \quad (5.7)$$

Нечетко-множественная процедура получения оценок для неопределенных собственных частот \tilde{f}_{npq} поперечных колебаний рассматриваемой шарнирно-

опертой по краям прямоугольной нанопластины при учете возможных технологических разбросов в значениях ее экзогенных геометрически и физико-механических параметров $l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}$ базируется на применении альфа-уровневой формы модифицированного эвристического принципа обобщения к четким аналитическим функциональным соотношениям (5.7). Вводится предположение о возможности эффективного описания неконтрастных величин экзогенных параметров $l_1, l_2, h_0, \rho_0, E_{11}, E_{13}, E_{33}, G_{13}^{(0)}$ рассматриваемой модели нормальными трапецеидальными нечеткими интервалами $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \tilde{h}_0, \tilde{\rho}_0, \tilde{E}_{11}, \tilde{E}_{13}, \tilde{E}_{33}, \tilde{G}_{13}^{(0)}$, задаваемыми при помощи кортежей реперных точек

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 &= (l_{11}, l_{12}, l_{13}, l_{14}), \quad \tilde{l}_2 = (l_{21}, l_{22}, l_{23}, l_{24}), \quad \tilde{h}_0 = (h_{01}, h_{02}, h_{03}, h_{04}), \quad \tilde{\rho}_0 = (\rho_{01}, \rho_{02}, \rho_{03}, \rho_{04}), \quad (5.8) \\ \tilde{E}_{11} &= (E_{111}, E_{112}, E_{113}, E_{114}), \quad \tilde{E}_{13} = (E_{131}, E_{132}, E_{133}, E_{134}), \quad \tilde{E}_{33} = (E_{331}, E_{332}, E_{333}, E_{334}), \\ \tilde{G}_{13}^{(0)} &= (G_{131}, G_{132}, G_{133}, G_{134}), \end{aligned}$$

с соответствующими функциями принадлежности $\mu_{\tilde{l}_1}(l_1), \mu_{\tilde{l}_2}(l_2), \mu_{\tilde{h}_0}(h_0), \mu_{\tilde{\rho}_0}(\rho_0), \mu_{\tilde{E}_{11}}(E_{11}), \mu_{\tilde{E}_{13}}(E_{13}), \mu_{\tilde{E}_{33}}(E_{33}), \mu_{\tilde{G}_{13}^{(0)}}(G_{13}^{(0)})$. Для нечетко-множественных величин $\tilde{K}_0, \tilde{R}_{pq}$ при переходе в соответствующих соотношениях (5.7) к нечетким аргументам и использовании арифметики нечетких интервалов [29–30] получаются нечетко-интервальные представления

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 &= (K_1, K_2, K_3, K_4), \quad \tilde{R}_{pq} = (R_{pq1}, R_{pq2}, R_{pq3}, R_{pq4}), \quad (5.9) \\ K_1 &= (E_{111} - E_{134}/E_{331})h_{01}, \quad K_2 = (E_{112} - E_{133}/E_{332})h_{02}, \quad K_3 = (E_{113} - E_{132}/E_{333})h_{03}, \\ K_4 &= (E_{114} - E_{131}/E_{334})h_{04}, \quad R_{pq1} = \pi^2 h_{01}(p^2/l_{14}^2 + q^2/l_{24}^2), \quad R_{pq2} = \pi^2 h_{02}(p^2/l_{13}^2 + q^2/l_{23}^2), \\ R_{pq3} &= \pi^2 h_{03}(p^2/l_{12}^2 + q^2/l_{22}^2), \quad R_{pq4} = \pi^2 h_{04}(p^2/l_{11}^2 + q^2/l_{21}^2). \end{aligned}$$

Каждый из описывающих неопределенные экзогенные параметры нечетких интервалов представляется разложением по множествам α - срезов

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0\alpha}, \bar{\rho}_{0\alpha}], \quad \underline{\rho}_{0\alpha} = (1-\alpha)\rho_{01} + \alpha\rho_{02}, \quad \bar{\rho}_{0\alpha} = \alpha\rho_{03} + (1-\alpha)\rho_{04}; \\ \tilde{G}_{13}^{(0)} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{G}_{13\alpha}, \bar{G}_{13\alpha}], \quad \underline{G}_{13\alpha} = (1-\alpha)G_{131} + \alpha G_{132}, \quad \bar{G}_{13\alpha} = \alpha G_{133} + (1-\alpha)G_{134}; \\ \tilde{K}_0 &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{K}_{0\alpha}, \bar{K}_{0\alpha}], \quad \underline{K}_{0\alpha} = (1-\alpha)K_1 + \alpha K_2, \quad \bar{K}_{0\alpha} = \alpha K_3 + (1-\alpha)K_4; \end{aligned}$$

$$\tilde{R}_{pq} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{pq\alpha}, \bar{R}_{pq\alpha}], \quad \underline{R}_{pq\alpha} = (1-\alpha)R_{pq1} + \alpha R_{pq2}, \quad \bar{R}_{pq\alpha} = \alpha R_{pq3} + (1-\alpha)R_{pq4}.$$

При этом для нечеткой оценки \tilde{f}_{npq} собственных частот поперечных колебаний рассматриваемой шарнирно-опертой по краям прямоугольной графеновой нанопластины с учетом свойств $\partial\Phi_{npq}/\partial\rho_0 < 0$, $\partial\Phi_{npq}/\partial G_{13}^{(0)} > 0$, записывается представление

$$\tilde{f}_{npq} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [f_{npq\alpha}, \bar{f}_{npq\alpha}], \quad (5.10)$$

$$f_{npq\alpha} = \inf_{\substack{K_0 \in [\underline{K}_{0\alpha}, \bar{K}_{0\alpha}] \\ R_{pq} \in [\underline{R}_{pq\alpha}, \bar{R}_{pq\alpha}]}} \Phi_{npq}(\bar{\rho}_{0\alpha}, \underline{G}_{13\alpha}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q), \quad \bar{f}_{npq\alpha} = \sup_{\substack{K_0 \in [\underline{K}_{0\alpha}, \bar{K}_{0\alpha}] \\ R_{pq} \in [\underline{R}_{pq\alpha}, \bar{R}_{pq\alpha}]}} \Phi_{npq}(\underline{\rho}_{0\alpha}, \bar{G}_{13\alpha}^{(0)}, K_0, R_{pq}, n, p, q).$$

Алгоритм получения нечетких оценок для технических собственных частот поперечных колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин с учетом факторов неопределенности их физико-механических и геометрических параметров в качестве примера реализован применительно к случаю определения характеристик \tilde{f}_{n11} для $n=4$, $n=10$ при задании следующих нечетко-интервальных экзогенных параметров:

$$\begin{aligned} \tilde{l}_1 &= (3,25; 3,39; 3,42; 3,45) \text{ [нм]}, \quad \tilde{l}_2 = (3,125; 3,180; 3,190; 3,245) \text{ [нм]}, \\ \tilde{h}_0 &= (0,310; 0,325; 0,335; 0,345) \text{ [нм]}, \quad \tilde{\rho}_0 = (7,580; 7,608; 7,610; 7,625) \text{ [} 10^{-7} \text{ кг/м}^2 \text{]}, \\ \tilde{E}_{11} &= (1030; 1050; 1110; 1170) \text{ [ГПа]}, \quad \tilde{E}_{13} = (6,5; 8,9; 10,0; 17,5) \text{ [ГПа]}, \\ \tilde{E}_{33} &= (36,5; 36,9; 37,6; 38,9) \text{ [ГПа]}, \quad \tilde{G}_{13}^{(0)} = (3,9; 4,7; 4,95; 5,35) \text{ [ГПа]}. \end{aligned}$$

Вид функций принадлежности для нечетко-интервальных характеристик K_0, R_{11} представлен на рис. 5.1 – 5.2. Результаты расчетов функций соответствующих функций принадлежности для \tilde{f}_{411} и $\tilde{f}_{10,11}$ даны на рис. 5.3 и рис. 5.4. При расчетах приведенных на рисунках графиков функций принадлежности использовалось разбиение на α -срезы с равномерным шагом $\Delta\alpha = 0.01$ варьирования параметра α . Представленные оценки описывают относительные показатели степени уверенности в том, что технические собственные частоты поперечных колебаний рассматриваемых тонких четырехслойных и десятислойных графеновых нанопластин будут принимать соответствующие

значения с учетом заданных ошибок рассеяния в значениях экзогенных параметров рассматриваемой модели

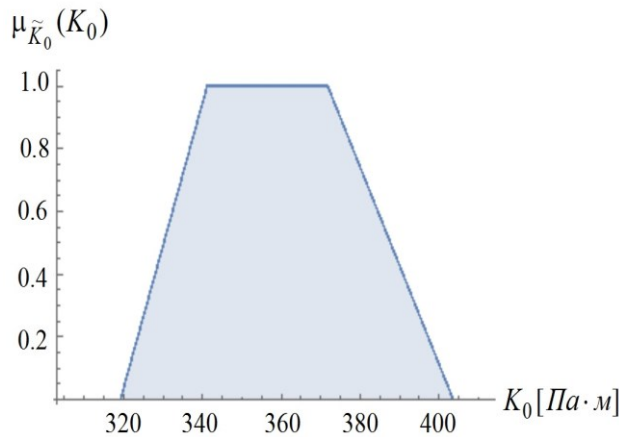


Рис. 5.1. Профиль функции $\mu_{\tilde{K}_0}(K_0)$

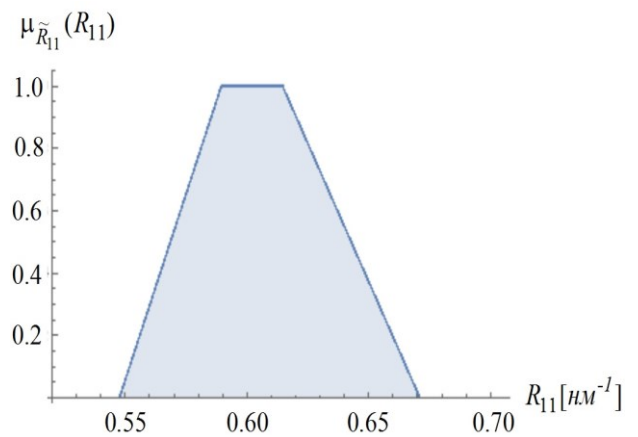


Рис. 5.2. Профиль функции $\mu_{\tilde{R}_{11}}(R_{11})$

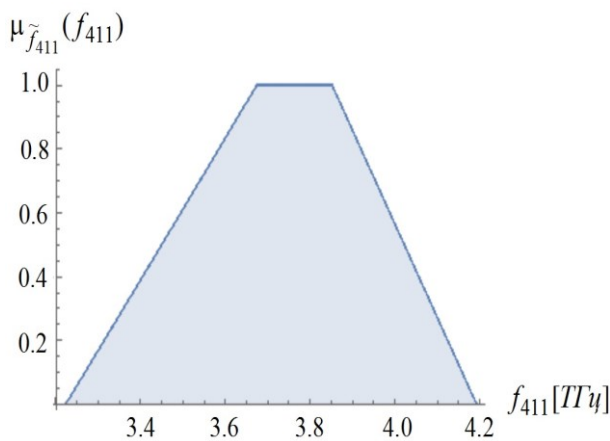


Рис. 5.3. Профиль функции $\mu_{\tilde{f}_{411}}(f_{411})$

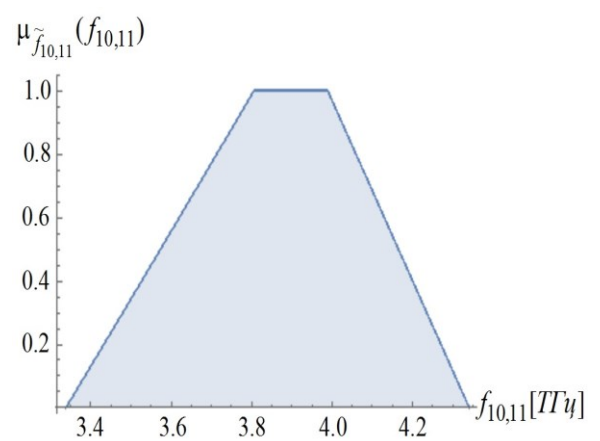


Рис. 5.4. Профиль функции $\mu_{\tilde{f}_{10,11}}(f_{10,11})$

Они позволяют, в частности, сделать выводы о диапазонах наиболее достоверных значений собственных частот, а также о границах предельно возможных разбросов для данных характеристик, и, тем самым, повысить достоверность расчетных результатов предпроектного моделирования конструкций графеновых нанорезонаторов. Результаты расчетов иллюстрируют также степень увеличения значений низшей собственной частоты для нанопластины фиксированных поперечных размеров при рассматриваемых вариантах наращивания численности слоев в пакете.

5.2. Нечетко-множественный анализ факторов неопределенности при исследовании модели собственных колебаний цилиндрических трехслойных композитных панелей

В конструкциях современных поколений приборов, машин, устройств аэрокосмической и энергетической техники, находят эффективное применение системы активного демпфирования механических упругих колебаний их компонентов в виде изготовленных из анизотропных композиционных материалов цилиндрических тонких панелей многослойной структуры, используемых в качестве составных частей корпусов, несущих приборных плат, перегородок и элементов иного функционального назначения. Наиболее важным для обеспечения требуемых эксплуатационных режимов является демпфирование собственных резонансных колебаний. Активное виброгашение для указанных конструкций может быть обеспечено на основе привнесения в их многослойную структуру специальных слоев, изготавливаемых из пьезоактивных материалов [131–132, 307–308, 347]. Указанные слои в рамках технологий активного виброгашения выполняют роль датчиков и актуаторов демпфирующих воздействий. При разработке и эксплуатации систем активного виброгашения, ключевым фактором для обеспечения наиболее высокой степени эффективного подавления резонансных вибраций является получение максимально адекватных расчетных оценок для величин частот собственных колебаний с учетом влияния реально существующих факторов неопределенности геометрических и физико-механических экзогенных параметров в моделях стационарных упругих колебаний многослойных композитных цилиндрических панелей с присутствием в пакете слоев из пьезоэлектрических материалов. Факторами неопределенности в первую очередь являются разбросы в значениях физико-механических и геометрических параметров конструкций, обусловленные вариациями экспериментальных данных о свойствах конструкционных материалов, технологическим допусками при проектировании и изготовлении конструкций, особенностями эксплуатационных режимов. Методы моделирования указанных неопределенных разбросов должны учитывать особенности природы имеющейся

в распоряжении проектировщиков исходной информации, зачастую не имеющей корректного статистического характера ввиду отсутствия обширных однородных выборок экспериментальных данных. Особо значимыми являются разбросы свойств для панелей из материалов, обладающих низкой степенью вязкости, применительно к которым, как отмечается в [131–132], больше расхождения показаний датчиков вблизи частот резонансных вибраций имеют место даже при незначительных разбросах в параметрах механических свойств материалов.

В контексте изложенного, в качестве эффективного подхода к решению актуальной прикладной задачи нахождения адекватных практике оценок неопределенных эндогенных параметров резонансных частот вибраций для конструкций в виде трехслойных композитных вязкоупругих цилиндрических панелей при учете разбросов значений их конструктивных параметров, может рассматриваться применение разрабатываемого в данном подразделе нечетко-множественного метода анализа рассматриваемой модели.

Разрабатываемый метод базируется на использовании результатов теоретического исследования детерминистической версии модели определения собственных частот поперечных колебаний прямоугольной трехслойной ортотропной цилиндрической панели малой кривизны с радиусом R , имеющей шарнирно закрепленные края. Область, занимаемая панелью в декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$, имеет вид $V = \{x_1 \in [0, l_1], x_2 \in [0, l_2], x_3 \in [-(h_1 + h_0/2), (h_1 + h_0/2)]\}$. В конструкции панели имеется центральный слой с толщиной h_0 из неспециального вязкоупругого ортотропного материала и идеально контактирующие с ним имеющие одинаковую толщину h_1 внешние электродированные по граничным поверхностям слои из однотипных по физико-механическим свойствам, но имеющих противоположные направления поляризации вязкоупругих трансверсально-изотропных пьезоэлектрических материалов. Материалы компонентов панели имеют следующие характеристики: для центрального слоя – параметр плотности ρ_0 , коэффициенты Пуассона $\nu_1^{(0)}$ и $\nu_2^{(0)}$, модули Юнга E_1 и E_2 , сдвиговая жесткость G_{12} ; для внешних

противоположных слоев из пьезоэлектрического материала – параметр плотности ρ_1 , параметр диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{33}^{(T)}$, деформационные постоянные $S_{11}^{(E)}$ и $S_{12}^{(E)}$, электромеханическая константа d_{31} , причем для внешних противоположных слоев $d_{31} = -d_{31}$. При исследуемых стационарных гармонических колебаниях вязкоупругий материал среднего слоя характеризуется соответствующими комплексными параметрами $E_j^{(0)} = E_{jR}^{(0)} - iE_{jI}^{(0)}$, $\nu_j^{(0)} = \nu_{jR}^{(0)} - i\nu_{jI}^{(0)}$, $G_{12}^{(0)} = G_{12R}^{(0)} - iG_{12I}^{(0)}$.

Для панели с описанной структурой и свойствами в случае шарнирного закрепления боковых кромок собственные частоты поперечных колебаний с формами, имеющими показателями изменчивости вдоль координатных направлений $m, n = \overline{1, \infty}$, в рамках прикладной теории изгибного динамического деформирования описываются полученными в [131–132] представлениями

$$\omega_{mn} = [\rho_*^{-1} (D_{11R} k_m^4 + 2(D_{12R} + 2D_{66R}) k_m^2 p_n^2 + D_{22R} p_n^4 + k_m^4 \Delta_{mnR} (R^2 (\Delta_{mnR}^2 + \Delta_{mnl}^2))^{-1})]^{1/2}, \quad (5.11)$$

в которых

$$k_m = m\pi d_1^{-1}, \quad p_n = n\pi d_2^{-1}, \quad \rho_* = \rho_0 h_0 + 2\rho_1 h_1, \quad (5.12)$$

$$\Delta_{mn} = \Delta_{mnR} + i\Delta_{mnl} = A_{22} k_m^4 + (A_{66} - 2A_{12}) k_m^2 p_n^2 + A_{11} p_n^4,$$

$$A_{11} = C_{22} \Delta^{-1}, \quad A_{22} = C_{11} \Delta^{-1}, \quad A_{66} = C_{66}^{-1}, \quad A_{12} = C_{12} \Delta^{-1}, \quad \Delta = C_{11} C_{22} - C_{12}^2,$$

$$C_{qj} = C_{qjR} + iC_{qjI} = h_0 B_{qj}^{(0)} + 2h_1 B_{qj}^{(1)}, \quad B_{11}^{(0)} = E_1^{(0)} (1 - \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)}), \quad B_{22}^{(0)} = E_2^{(0)} (1 - \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)}),$$

$$B_{12}^{(0)} = \nu_1^{(0)} E_1^{(0)} (1 - \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)}) = \nu_2^{(0)} E_2^{(0)} (1 - \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)}), \quad B_{66}^{(0)} = G_{12}^{(0)},$$

$$B_{11}^{(1)} = B_{22}^{(1)} = (1 - (\nu^{(1)})^2) S_{11}^{(1)}, \quad B_{12}^{(1)} = \nu^{(1)} B_{11}^{(1)}, \quad B_{66}^{(1)} = (1 - \nu^{(1)}) B_{11}^{(1)} / 2,$$

$$D_{qj} = D_{qjR} + iD_{qjI} = (h_0^3 / 12) B_{qj}^{(0)} + (2/3) (B_{qj}^{(1)} + ((1 + \nu^{(1)}) / 2) B_{11}^{(1)} (k_p^{(1)})^2 / (2(1 - (k_p^{(1)})^2)) \times \\ \times (1 - (3/(4h_1)) [(h_0/2 + h_1)^2 - (h_0/2)^2]^2 / [(h_0/2 + h_1)^3 - (h_0/2)^3]) ((h_0/2 + h_1)^3 - (h_0/2)^3),$$

$$(k_p^{(1)})^2 = 2d_{31}^2 / (\varepsilon_{33}^{(T)} S_{11}^{(E)} (1 - (\nu^{(1)})^2)), \quad \nu^{(1)} = -S_{12}^{(E)} / S_{11}^{(E)}.$$

Соотношение (5.11) описывает аналитическую функциональную зависимость частот резонансных колебаний рассматриваемой панели от девятнадцати экзогенных независимых параметров $E_{jR}^{(0)}$, $E_{jI}^{(0)}$, $\nu_{jR}^{(0)}$, $\nu_{jI}^{(0)}$ ($j = \overline{1, 2}$), $G_{12R}^{(0)}$, $G_{12I}^{(0)}$, ρ_0 , h_0 , $S_{11}^{(E)}$, $S_{12}^{(E)}$, d_{31} , $\varepsilon_{33}^{(T)}$, ρ_1 , h_1 , R физико-механической и геометрической природы, а

также от двух целочисленных параметров формы колебаний на резонансной частоте, наиболее опасными из которых с точки зрения нарушения работоспособности конструкции являются колебания с формами $m = n = 1$ при наименьшей собственной частоте.

Разрабатываемый нечетко-множественный метод оценивания степени влияния разбросов экзогенных параметров модели изгибного динамического деформирования на резонансные частоты колебаний трехслойной цилиндрической панели, включает этап фаззификации неконтрастных исходных данных с переходом к представлениям физико-механических и геометрических характеристик конструкции выпуклыми нечеткими множествами $\tilde{E}_{jR}^{(0)}$, $\tilde{E}_{jI}^{(0)}$, $\tilde{v}_{jR}^{(0)}$, $\tilde{v}_{jI}^{(0)}$ ($j = \overline{1, 2}$), $\tilde{G}_{12R}^{(0)}$, $\tilde{G}_{12I}^{(0)}$, $\tilde{\rho}_0$, \tilde{h}_0 , $\tilde{S}_{11}^{(E)}$, $\tilde{S}_{12}^{(E)}$, \tilde{d}_{31} , $\tilde{\varepsilon}_{33}^{(T)}$, $\tilde{\rho}_1$, \tilde{h}_1 , \tilde{R} в форме трапецеидальных нормальных нечетких интервалов $\tilde{E}_{jR}^{(0)} = (E_{1jR}, E_{2jR}, E_{3jR}, E_{4jR})$, ..., $\tilde{h}_1 = (h_{1r}, h_{2r}, h_{3r}, h_{4r})$, $\tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ с разложениями по множествам α -срезов

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{jR}^{(0)} &= \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{E}_{jR\alpha}, \bar{E}_{jR\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [(1 - \alpha)E_{1jR} + \alpha E_{2jR}, \alpha E_{3jR} + (1 - \alpha)E_{4jR}], \dots, & (5.13) \\ \tilde{h}_1 &= \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{h}_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}] = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [(1 - \alpha)h_{1r} + \alpha h_{2r}, \alpha h_{3r} + (1 - \alpha)h_{4r}], \\ \tilde{R} &= \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] = \bigcup_{\alpha \in [0, 1]} [(1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4]. \end{aligned}$$

После введения представлений (5.13) реализуется переход к нечетко-интервальным параметрам в функциональном соотношении (5.11) с поочередным фрагментированным применением аппарата арифметики нечетких трапецеидальных интервалов, а также с использованием модифицированной α -уровневой формы эвристического принципа расширения, что предусматривает этап исследования свойств знакоопределенности частных производных от функции (5.11) по обладающим разбросами значений аргументам в области определения всей совокупности переменных. В рамках описанного подхода, с использованием правил арифметики нечетких интервалов и соотношений (5.12) последовательно рассчитываются нечетко-интервальные величины $\tilde{\rho}_*$, \tilde{D}_{11R} , \tilde{D}_{12R} ,

$\tilde{D}_{22R}, \tilde{D}_{66R}, \tilde{\Delta}_{mnR}, \tilde{\Delta}_{mnl}$, а затем, соответственно, границы интервалов α -срезов $\underline{\rho}_{*\alpha}, \bar{\rho}_{*\alpha}, \underline{D}_{11R\alpha}, \bar{D}_{11R\alpha}, \dots, \underline{\Delta}_{mnl\alpha}, \bar{\Delta}_{mnl\alpha}$. Затем, с учетом получаемых оценок

$$\rho_*^{-1}(D_{11R}k_m^4 + 2(D_{12R} + 2D_{66R})k_m^2 p_n^2 + D_{22R}p_n^4 + k_m^4 \Delta_{mnR}(R^2(\Delta_{mnR}^2 + \Delta_{mnl}^2))^{-1}) > 0, \quad (5.15)$$

$$D_{11R} > 0, D_{12R} > 0, D_{22R} > 0, D_{66R} > 0, \Delta_{mnR} > 0, \Delta_{mnl} < 0, R > 0, \partial\omega_{mn}/\partial\rho_* < 0,$$

$$\partial\omega_{mn}/\partial D_{11R} > 0, \partial\omega_{mn}/\partial D_{12R} > 0, \partial\omega_{mn}/\partial D_{22R} > 0, \partial\omega_{mn}/\partial D_{66R} > 0, \partial\omega_{mn}/\partial R < 0,$$

$$\partial\omega_{mn}/\partial\Delta_{mnl} > 0, \partial\omega_{mn}/\partial\Delta_{mnR} < 0,$$

в соответствии с α -уровневой модифицированной версией эвристического принципа расширения записывается искомое нечетко-множественное представление для параметра частоты резонансных колебаний, имеющее вид

$$\tilde{\omega}_{mn} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{mn\alpha}, \bar{\omega}_{mn\alpha}] \quad (5.16)$$

$$\underline{\omega}_{mn\alpha} = [\underline{\rho}_{*\alpha}^{-1}(\underline{D}_{11R\alpha}k_m^4 + 2(\underline{D}_{12R\alpha} + 2\underline{D}_{66R\alpha})k_m^2 p_n^2 + \underline{D}_{22R\alpha}p_n^4 + k_m^4 \underline{\Delta}_{mnR\alpha}(\underline{R}_\alpha^2(\underline{\Delta}_{mnR\alpha}^2 + \underline{\Delta}_{mnl\alpha}^2))^{-1})]^{1/2},$$

$$\bar{\omega}_{mn\alpha} = [\bar{\rho}_{*\alpha}^{-1}(\bar{D}_{11R\alpha}k_m^4 + 2(\bar{D}_{12R\alpha} + 2\bar{D}_{66R\alpha})k_m^2 p_n^2 + \bar{D}_{22R\alpha}p_n^4 +$$

$$+ k_m^4 \bar{\Delta}_{mnR\alpha}(\bar{R}_\alpha^2(\bar{\Delta}_{mnR\alpha}^2 + \bar{\Delta}_{mnl\alpha}^2))^{-1}]^{1/2}.$$

Для компьютерной реализации представленного метода разработано программное приложение. В вычислительном эксперименте с его использованием рассмотрен пример расчета нечетко-множественного параметра резонансной частоты применительно к панели, в которой средний слой изготовлен из имеющего показатель армирования 55% волокнистого углепластика [134], а внешними являются слои из керамики титаната-цирконата свинца [131]. В иллюстрируемом случае расчеты как неконтрастные рассматриваются параметры плотностей внешних ρ_1 и внутреннего ρ_0 слоев, а также показатель кривизны панели R , с задаваемыми нечетко-интервальными представлениями:

$$\tilde{R} = (2.81l_*, 2.95l_*, 3.03l_*, 3.20l_*), \quad \tilde{\rho}_0 = (1.65\rho_{0*}, 1.73\rho_{0*}, 1.78\rho_{0*}, 1.89\rho_{0*}),$$

$$\tilde{\rho}_1 = (7.38\rho_{0*}, 7.45\rho_{0*}, 7.51\rho_{0*}, 7.62\rho_{0*}), \quad l_* = 1[m], \quad \rho_{0*} = 10^3[kg/m^3].$$

Оставшиеся параметры расчетной модели рассматриваются как величины без ошибок разбросов и имеют значения

$$E_{1R}^{(0)} = 8.45c_*, E_{2R}^{(0)} = 4.20c_*, E_{1I}^{(0)} = -0.0220c_*, E_{2I}^{(0)} = -0.0103c_*, v_{1R}^{(0)} = 0.21, v_{2R}^{(0)} = 0.11, \\ v_{1I}^{(0)} = -0.002, v_{2I}^{(0)} = -0.001, G_{12R}^{(0)} = 1.24c_*, G_{12I}^{(0)} = -0.0072c_*, h_0 = 0.005l_*, S_{11}^{(E)} = 13,2s_*, \\ S_{12}^{(E)} = -4.1s_*, d_{31} = -110d_*, \varepsilon_{33}^{(T)} = 1160\varepsilon_*, h_1 = 0.002l_*, c_* = 10^{10}[Pa], s_* = 10^{-12}[m^2/N], l_1 = l_*, \\ l_2 = 1.2l_*, d_* = 10^{-12}[C/N], \varepsilon_* = 8.84194 \cdot 10^{-12}[F/m].$$

Параметр приведенной плотности $\tilde{\rho}_*$ по вышеуказанным данным путем нечетко-интервальных вычислений по формуле из (5.12) получен в виде

$$\tilde{\rho}_* = (34.47 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}, 34.99 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}, 35.38 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}, 36.15 \cdot 10^{-3} \rho_{0*}).$$

Рассчитанный профиль функции принадлежности для нечетко-множественного эндогенного параметра $\tilde{\omega}_{11}$ при описанном варианте задания неконтрастных параметров модели изображен на рисунке 5.5. Его анализ позволяет оценивать меру уверенности в том, что параметр низшей резонансной частоты колебаний рассматриваемой панели при учете оговоренных уровней разбросов в значениях исходных параметров рассматриваемой модели будет принимать соответствующие значения из интервала носителя построенного нечеткого множества.

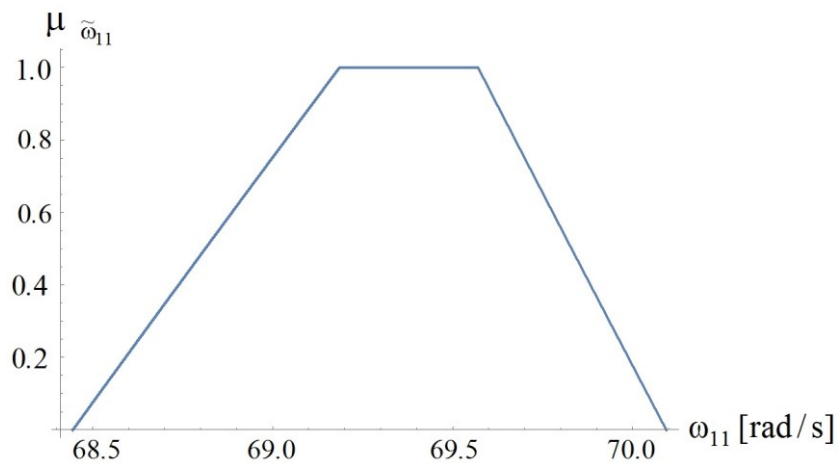


Рис. 5.5. Профиль функции принадлежности для нечетко-множественной оценки $\tilde{\omega}_{11}$ низшей резонансной частоты упругих колебаний панели.

5.3. Нечетко-множественный метод учета неопределенности экзогенных параметров в модели собственных колебаний предварительно напряженных прямоугольных пластин

В данном подразделе работы представлены вопросы учета неопределенности экзогенных параметров в моделях колебаний предварительно напряженных прямоугольных пластин [110, 269–270] на основе нечетко-интервальной интерпретации параметров с разбросами и перехода к нечетко-интервальным аргументам в аналитических представлениях характеристик исследуемых колебательных процессов с применением модифицированной формы эвристического принципа обобщения.

Цикл соотношений для приведенных частотных характеристик собственных поперечных колебаний предварительно-напряженных изотропных прямоугольных пластин толщины $2h$, занимающих в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ область $V = \{0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, -h \leq x_3 \leq h\}$, при различных типах краевых условий на боковых граничных поверхностях представлен в работах [269–270]. Рассматриваемые пластины изготовлены из изотропного материала с параметрами Ламе λ, μ и плотностью ρ , а их начальное однородное деформированное состояние описывается заданием функций упругих перемещений вида $u_1 = a_0x_1, u_2 = a_0x_2, u_3 = c_2a_0$.

Для шарнирно закрепленной по контуру пластины рассматриваемого вида приведенные частоты собственных поперечных колебаний $\gamma_{jmn}^{(1)}$ с показателями изменяемости формы (m, n) в срединной поверхности описываются соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_{jmn}^{(1)} &= h [-\delta_{2mn1} + (-1)^{j+1} (\delta_{2mn1}^2 - 4\delta_{1mn1}\delta_{3mn1})] [2\delta_{1mn1}]^{-1} = \\ &= F_{1j}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) \quad (j = \overline{1, 2}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

в которых

$$\begin{aligned} \delta_{1mn1} &= \rho_1 [3\lambda + 7\mu + \mu(a_0 + 6c_2) + 3\lambda c_2] \cdot [\mu(\lambda + 2\mu)(1 + a_0)(1 + c_2)]^{-1}, \\ \delta_{2mn1} &= -(4\pi^2 [(3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu) + 2(c_2 - a_0)/(1 + a_0)] \zeta_{mn} + 1), \end{aligned}$$

$$\delta_{3mn1} = 8\pi^4 \zeta_{mn}^2 \rho_1^{-1} (1 + c_2) \mu (\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu), \quad \rho_1 = \rho ((1 + a_0^2)(1 + c_2))^{-1},$$

$$\zeta_{mn} = (n/l_1)^2 + (m/l_2)^2.$$

Для пластины с жестко закрепленным контуром низшие приведенные резонансные частоты поперечных колебаний имеют представления вида

$$\gamma_{jmn}^{(2)} = h [-\delta_{2mn2} + (-1)^{j+1} (\delta_{2mn2}^2 - 4\delta_{1mn2} \delta_{3mn2})] [2\delta_{1mn2}]^{-1} = \quad (5.18)$$

$$= F_{2j}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) \quad (j = \overline{1, 2}),$$

в которых

$$\delta_{1mn2} = \eta_2^4 (1 - \pi/4) \rho_1 [3\lambda + 7\mu + \mu(a_0 + 6c_2) + 3\lambda c_2] \cdot [\mu(\lambda + 2\mu)(1 + a_0)(1 + c_2)]^{-1},$$

$$\delta_{2mn2} = -\eta_2^2 (4[(3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu) + 2(c_2 - a_0)/(1 + a_0)](2 - \pi/4 - 2/\pi)(1 + \eta_1^2)/2 + (l_1/\pi)^2 (1 - \pi/4)),$$

$$\delta_{3mn2} = 16\zeta_{mn}^2 \rho_1^{-1} (1 + c_2) \mu (\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) (1 + \eta_1^2 (1 - 2/\pi)), \quad \eta_1 = l_1/l_2.$$

Для пластины, у которой два противоположных края $x_1 = 0$, $x_1 = l_1$ свободны, а два других жестко закреплены

$$\gamma_{jmn}^{(3)} = h [-\delta_{2mn3} + (-1)^{j+1} (\delta_{2mn3}^2 - 4\delta_{1mn3} \delta_{3mn3})] [2\delta_{1mn3}]^{-1} = \quad (5.19)$$

$$= F_{3j}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) \quad (j = \overline{1, 2}),$$

где

$$\delta_{1mn3} = \eta_2^4 (1 - 3\pi/16) \rho_1 [3\lambda + 7\mu + \mu(a_0 + 6c_2) + 3\lambda c_2] \cdot [\mu(\lambda + 2\mu)(1 + a_0)(1 + c_2)]^{-1},$$

$$\delta_{2mn3} = -\eta_2^2 (4[(3\lambda + 4\mu)/(\lambda + 2\mu) + 2(c_2 - a_0)/(1 + a_0)]((1 - 3\pi/16)(1 + 2\eta_1^2)/2 + (1 - 3/2\pi))),$$

$$\delta_{3mn3} = 8\rho_1^{-1} (1 + c_2) \mu (\lambda + \mu) / (\lambda + 2\mu) (2 + \eta_1^2 (2 - 3\pi/16 - 3/2\pi) - 3\pi/16).$$

Алгоритм получения нечетко-множественных оценок для значений приведенных резонансных частот поперечных колебаний предварительно напряженных прямоугольных пластин реализуется с введением нечетко-интервальных представлений для обладающих разбросами геометрических и физико-механических параметров модели $h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho$

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{l}_j = (l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}, l_{j4}), \quad \tilde{a}_0 = (a_{01}, a_{02}, a_{03}, a_{04}), \quad (5.20)$$

$$\tilde{c}_2 = (c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}), \quad \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad \tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4),$$

а также их описанием в форме суперпозиций альфа-срезов

$$\tilde{h} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], \tilde{l}_j = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{l}_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}], \tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}], \quad (5.21)$$

$$\tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}], \tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}], \tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}], \tilde{a}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}],$$

где

$$\underline{h}_\alpha = (1-\alpha)h_1 + \alpha h_2, \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1-\alpha)h_4, \quad (5.22)$$

$$\underline{l}_{j\alpha} = (1-\alpha)l_{j1} + \alpha l_{j2}, \bar{l}_{j\alpha} = \alpha l_{j3} + (1-\alpha)l_{j4}, \dots,$$

$$\underline{\rho}_\alpha = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \bar{\rho}_\alpha = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4.$$

С учетом справедливых в областях определения функций (5.17) – (5.19) оценок знакоопределенности производных

$$\partial F_{pj}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) / \partial h \geq 0, \quad (5.23)$$

$$\partial F_{pj}(h, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \rho, m, n) / \partial \rho \leq 0,$$

искомые оценки для неопределенных резонансных частот получены в виде

$$\tilde{\gamma}_{jmn}^{(p)} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)}, \bar{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)}]; \quad (5.24)$$

$$\underline{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)} = \inf_{\substack{l_j \in [\underline{l}_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}] \\ a_0 \in [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}] \\ c_2 \in [\underline{c}_{2j\alpha}, \bar{c}_{2\alpha}] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} \{F_{pj}(\underline{h}_\alpha, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \bar{\rho}_\alpha, m, n),$$

$$\bar{\gamma}_{jmn\alpha}^{(p)} = \sup_{\substack{l_j \in [\underline{l}_{j\alpha}, \bar{l}_{j\alpha}] \\ a_0 \in [\underline{a}_{0\alpha}, \bar{a}_{0\alpha}] \\ c_2 \in [\underline{c}_{2j\alpha}, \bar{c}_{2\alpha}] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha] \\ \mu_j \in [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha]}} \{F_{pj}(\bar{h}_\alpha, l_1, l_2, a_0, c_2, \lambda, \mu, \underline{\rho}_\alpha, m, n).$$

Численная реализация полученных соотношений позволяет получать оценки влияния факторов неопределенности в виде разбросов экспериментальных и технологических значений исходных геометрических и физико-механических параметров в задачах о поперечных собственных колебаниях предварительно напряженных прямоугольных изотропных пластин при краевых условиях закрепления либо шарнирного опирания участков контура.

5.4. Нечеткая идентификация механических характеристик тонких изотропных плит на основе резонансно-волновой методики.

Экспериментальные методы ультразвуковых измерений являются одними из наиболее эффективных методов идентификации значений упругих постоянных конструкционных материалов [136, 258, 278]. Однако, непосредственно измеряемые в рамках применения этих методов характеристики динамических деформационных процессов в виде скоростей упругих волн различных типов, резонансных частот колебаний рассматриваемых объектов, представляют собой неопределенные величины с некоторыми уровнями разбросов фиксируемых значений, обусловленных техникой измерений, выбором образцов и целым рядом иных факторов. Соответственно, алгоритмы определения значений упругих постоянных по данным экспериментальных замеров должны учитывать фактор наличия указанных разбросов и природу информации относительно их характеристик.

В контексте охарактеризованной проблемы, в данном подразделе работы представлено описание теоретического алгоритма получения оценок разбросов в значениях упругих постоянных конструкционных изотропных материалов, определяемых на основе использования неконтрастных экспериментальных данных измерения скоростей упругих волн и величин резонансных частот изгибных колебаний тонких плит прямоугольной либо круговой формы. Алгоритм базируется на нечетко-интервальной интерпретации данных экспериментальных измерений и на использовании альфа-уровневой модификации эвристического принципа обобщения при переходе к нечетким представлениям экзогенных параметров-аргументов в соотношениях связи модуля Юнга и коэффициента Пуассона со скоростью поперечных упругих волн в материале плиты, а также из связи со значениями низших частот собственных поперечных колебаний плит в рамках прикладной теории их динамического изгиба. В этих целях могут применяться методы теории нечетких множеств, в частности прием использования модифицированного эвристического принципа обобщения для перехода к нечетким аргументам в аналитических расчетных

соотношениях, связывающих в рамках детерминистического варианта прикладной модели динамического изгиба экспериментально определяемые характеристики скоростей упругих волн и частот собственных изгибных колебаний плит различной формы с искомыми величинами модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала плиты.

Применительно к рассматриваемым в декартовых координатах $Ox_1x_2x_3$ прямоугольным тонким плитам с длинами сторон a_1 , a_2 и толщиной h , имеющим свободно опертые кромки и занимающим области $V = \{0 \leq x_1 \leq a_1, 0 \leq x_2 \leq a_2, -h/2 \leq x_3 \leq h/2\}$, описываемая методика базируется на предположении о том, что экспериментальными замерах могут быть определены скорость поперечных упругих волн вдоль срединной плоскости плиты \tilde{V}_s и низшая собственная циклическая частота поперечных гармонических колебаний $\tilde{\omega}_{11}$, а характер устанавливаемых разбросов этих измерений позволяет описывать соответствующие неопределенные экзогенные параметры скоростей и резонансных частот трапецеидальными нечеткими интервалами с кортежами реперных точек $(V_s^{(1)}, V_s^{(2)}, V_s^{(3)}, V_s^{(4)})$, $(\omega_{11}^{(1)}, \omega_{11}^{(2)}, \omega_{11}^{(3)}, \omega_{11}^{(4)})$ и функциями принадлежности $\mu_{\tilde{V}_s}(V_s)$, $\mu_{\tilde{\omega}_{11}}(\omega_{11})$.

С учетом предположения о малости относительной толщины плиты $h \ll a_j$ и соответствующей возможности применения модели динамического обобщенного плоского напряженного состояния и прикладной модели изгибных колебаний в рамках гипотезы прямых нормалей [21, 255] для описания деформационных колебательных процессов в плите, для определения параметров скорости сдвиговых волн в материале плиты [2, 65], а также собственных частот поперечных колебаний свободно опертых прямоугольных плит с показателями изменчивости форм n_1, n_2 , могут быть записаны соотношения

$$V_s = (E/(2\rho(1+\nu)))^{1/2}, \quad (5.25)$$

$$\omega_{n_1 n_2} = h\pi^2((n_1/a_1)^2 + (n_2/a_2)^2)(E/(12\rho(1-\nu^2)))^{1/2} \quad (n_1, n_2 \geq 1),$$

в которых ρ, ν, E – соответственно параметры плотности, коэффициента Пуассона и модуля Юнга материала плиты. Из соотношений (5.25), в предположении о том, что значение низшей резонансной частоты изгибных колебаний ω_{11} известно, могут быть получены представления вида

$$\begin{aligned} \nu &= 1 - (V_s / \omega_{11})^2 h^2 \pi^4 ((n_1 / a_1)^2 + (n_2 / a_2)^2)^2 / 6, \\ E &= 2\rho V_s^2 (2 - (V_s / \omega_{11})^2) h^2 \pi^4 ((1 / a_1)^2 + (1 / a_2)^2)^2 / 6, \end{aligned} \quad (5.26)$$

используемые при дальнейшем построении описываемой методики.

При разработке алгоритма получения нечетких оценок прочностных свойств рассматриваемой конструкции вводится предположение о том, что параметр плотности материала плиты ρ и ее геометрические параметры a_1, a_2, h не подвергаются эксплуатационным изменениям, и оцениваемыми характеристиками являются неконтрастные значения механических параметров $\tilde{\nu}, \tilde{E}$. Для нечетко-интервальных экспериментальных значений экзогенных параметров модели $\tilde{V}_s, \tilde{\omega}_{11}$ вводятся представления в виде суперпозиций множеств α -срезов:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_s &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (V_{s\alpha}, \bar{V}_{s\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)V_s^{(1)} + \alpha V_s^{(2)}, \alpha V_s^{(3)} + (1-\alpha)V_s^{(4)}), \\ \tilde{\omega}_{11} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\omega_{11\alpha}, \bar{\omega}_{11\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} ((1-\alpha)\omega_{11}^{(1)} + \alpha\omega_{11}^{(2)}, \alpha\omega_{11}^{(3)} + (1-\alpha)\omega_{11}^{(4)}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Искомые нечеткие оценки $\tilde{V}_s, \tilde{\omega}_{11}$ также формируются в виде суперпозиций по множествам α - уровня

$$\tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\nu_\alpha, \bar{\nu}_\alpha), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (E_\alpha, \bar{E}_\alpha), \quad (5.28)$$

причем в рассматриваемом случае с учетом свойств

$$\begin{aligned} \partial \nu / \partial V_s &= -(2V_s / \omega_{11}^2) h^2 \pi^4 ((1 / a_1)^2 + (1 / a_2)^2)^2 / 6 < 0, \\ \partial \nu / \partial \omega_{11} &= (2V_s^2 / \omega_{11}^3) h^2 \pi^4 ((1 / a_1)^2 + (1 / a_2)^2)^2 / 6 > 0, \\ \partial E / \partial V_s &= 2\rho V_s^2 (2 - (V_s / \omega_{11})^2) h^2 \pi^4 ((1 / a_1)^2 + (1 / a_2)^2)^2 / 6 = \\ &= 8\rho V_s - 8\rho (V_s^3 / \omega_{11}^2) h^2 \pi^4 ((1 / a_1)^2 + (1 / a_2)^2)^2 / 6 = 8V_s \rho \nu > 0, \\ \partial E / \partial \omega_{11} &= 4\rho V_s^2 (V_s^2 / \omega_{11}^3) h^2 \pi^4 ((1 / a_1)^2 + (1 / a_2)^2)^2 / 6 > 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

для характеристик $\underline{v}_\alpha, \bar{v}_\alpha$ и $\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha$ соответственно могут быть записаны представления

$$\underline{v}_\alpha = 1 - (\bar{V}_{s\alpha} / \underline{\omega}_{11\alpha})^2 h^2 \pi^4 ((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2 / 6, \quad (5.30)$$

$$\bar{v}_\alpha = 1 - (\underline{V}_{s\alpha} / \bar{\omega}_{11\alpha})^2 h^2 \pi^4 ((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2 / 6,$$

$$\underline{E}_\alpha = 2\rho \underline{V}_{s\alpha}^2 (2 - (\underline{V}_{s\alpha} / \underline{\omega}_{11\alpha})^2 h^2 \pi^4 ((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2 / 6),$$

$$\bar{E}_\alpha = 2\rho \bar{V}_{s\alpha}^2 (2 - (\bar{V}_{s\alpha} / \bar{\omega}_{11\alpha})^2 h^2 \pi^4 ((1/a_1)^2 + (1/a_2)^2)^2 / 6).$$

В качестве примера реализации описываемой методики представлены результаты получения нечетких оценок \tilde{v}, \tilde{E} для характеристик v, E плиты из алюминия [116] с параметрами

$$a_1 = 1.0 [m], a_2 = 0.5 [m], h = 0.01 [m], \rho = 2700 [kg/m^3]$$

по результатам имеющих разбросы экспериментальных замеров, приводящих к оценкам

$$\tilde{V}_s = (3.010 \cdot 10^6, 3.070 \cdot 10^6, 3.095 \cdot 10^6, 3.135 \cdot 10^6) [m/sec], \quad (5.31)$$

$$\tilde{\omega}_{11} = (740, 760, 770, 785) [rad/sec]. \quad (5.32)$$

При этом с применением соотношений (5.28), (5.30) для анализируемых характеристик получены нечеткие оценки, характеризующиеся функциями принадлежности для \tilde{v}, \tilde{E} , представленными на рис. 5.6 – 5.7.

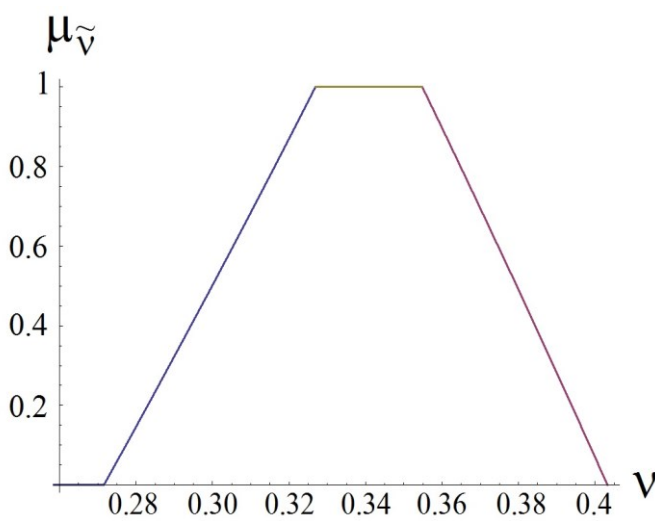


Рис. 5.6. Функция принадлежности для характеристики \tilde{v} .

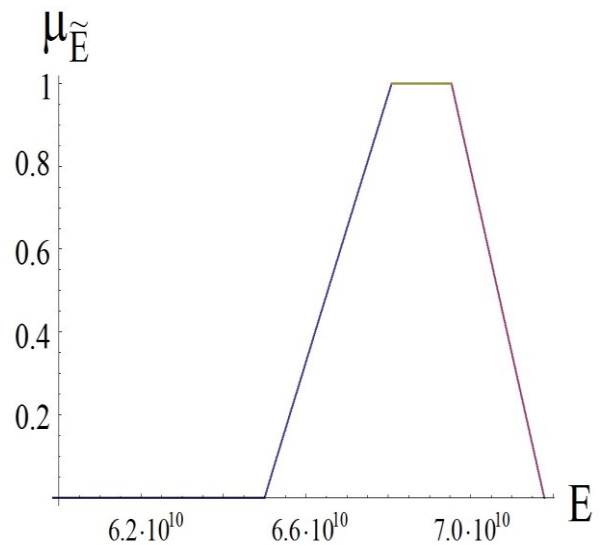


Рис. 5.7. Функция принадлежности для характеристики \tilde{E} .

Применение аналогичной схемы нечеткой идентификации механических характеристик на основе неконтрастных данных экспериментов с тонкими закрепленными по контуру плитами кругового очертания также базируется на соотношении (5.25) для скорости сдвиговых волн в плоскости плиты и на представлении резонансных частот поперечных колебаний с окружным волновым числом n для круглой изотропной плиты радиуса R с закрепленным контуром

$$\omega_{jn} = h(\beta_{jn}^2 / R^2)(E / (12\rho(1 - \nu^2)))^{1/2}, \quad (5.33)$$

в котором β_{jn} – корни трансцендентного уравнения

$$J_n(\beta_n)I'_n(\beta_n) - J'_n(\beta_n)I_n(\beta_n) = 0. \quad (5.34)$$

Безразмерное значение β_{10} , соответствующее низшей частоте осесимметричных резонансных колебаний равно $\beta_{10} = 3.196$.

Из соотношений (5.25), (5.33) следует

$$\nu = 1 - (V_s^2 / 6)h^2\omega_{jn}^{-2}\beta_{jn}^4R^{-4}, \quad (5.35)$$

$$E = 2\rho V_s^2(2 - (V_s^2 / 6)h^2\omega_{jn}^{-2}\beta_{jn}^4R^{-4}). \quad (5.36)$$

Согласно описанной выше схеме применения к соотношениям (5.35), (5.36) эвристического принципа расширения в α - уровневой форме исходя из предположения о задании характеристик V_s, ω_{jn} как нечетко-интервальных аргументов с представлениями вида (5.27) и с учетом свойств

$$\partial \nu / \partial V_s = -(2V_s / \omega_{jn}^2)h^2\beta_{jn}^4R^{-4} / 6 < 0, \quad (5.37)$$

$$\partial \nu / \partial \omega_{jn} = (2V_s^2 / \omega_{jn}^3)h^2\beta_{jn}^4R^{-4} / 6 > 0,$$

$$\partial E / \partial V_s = 8V_s\rho\nu > 0, \quad \partial E / \partial \omega_{jn} = 4\rho V_s^2(V_s^2 / \omega_{jn}^3)h^2\beta_{jn}^4R^{-4} / 6 > 0,$$

формируются представления

$$\tilde{\nu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{\nu}_\alpha, \bar{\nu}_\alpha), \quad \tilde{E} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{E}_\alpha, \bar{E}_\alpha). \quad (5.38)$$

Здесь

$$\underline{\nu}_\alpha = 1 - (\bar{V}_{s\alpha} / \underline{\omega}_{jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4} / 6, \quad (5.39)$$

$$\bar{\nu}_\alpha = 1 - (\underline{V}_{s\alpha} / \bar{\omega}_{jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4} / 6,$$

$$\underline{E}_\alpha = 2\rho \underline{V}_{s\alpha}^2 (2 - (\underline{V}_{s\alpha} / \underline{\omega}_{jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4} / 6),$$

$$\bar{E}_\alpha = 2\rho\bar{V}_{s\alpha}^2(2 - (\bar{V}_{s\alpha} / \bar{\omega}_{jn\alpha})^2 h^2 \beta_{jn}^4 R^{-4} / 6).$$

В примере реализации этого варианта методики также рассматривается получение нечетких оценок $\tilde{\nu}$, \tilde{E} для характеристик ν , E плиты радиуса $R = 0.5[m]$ и толщины $h = 0.01[m]$ из алюминия с плотностью $\rho = 2700[kg/m^3]$ по результатам неконтрастного экспериментальных замера низшей частоты осесимметричных колебаний с оценкой $\tilde{\omega}_{01} = (625, 630, 635, 640)[rad/sec]$. Экспериментальная оценка для параметра \tilde{V}_s имеет вид (5.31). Полученные в результате расчетов с использованием соотношений (5.38), (5.39) нечеткие оценки для $\tilde{\nu}$, \tilde{E} характеризуются функциями принадлежности, представленными на рис. 5.8 – 5.9.

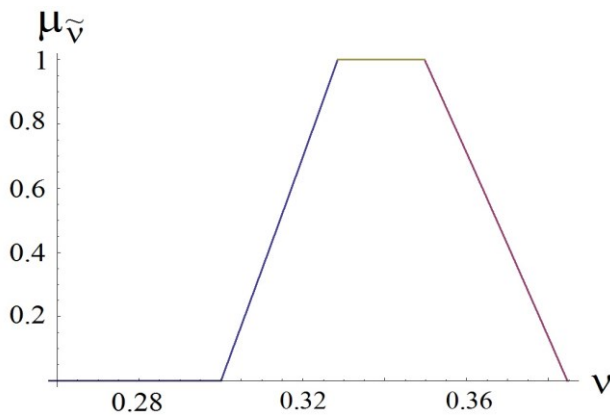


Рис. 5.8. Функция принадлежности для нечеткой характеристики $\tilde{\nu}$

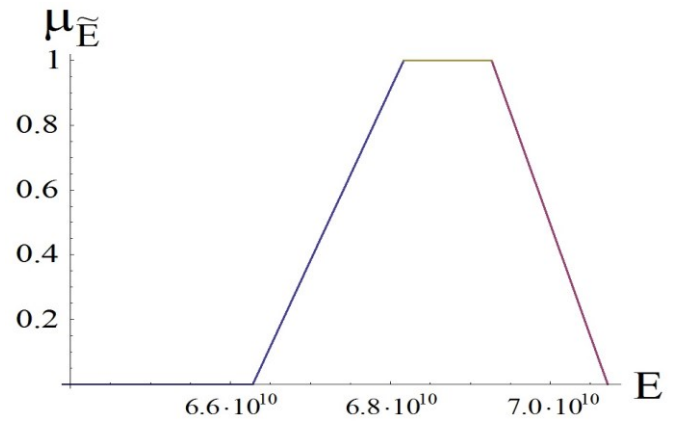


Рис. 5.9. Функция принадлежности для нечеткой характеристики \tilde{E}

Они позволяют, в частности, сделать выводы о диапазонах наиболее достоверных значений механических постоянных материала плиты, а также о границах предельно возможных разбросов для соответствующих характеристик, идентифицируемых на базе экспериментальных данных при применении резонансно-волновой методики.

5.5. Модель нечеткой идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики

Использование современных функционально-градиентных анизотропных нанокompозитных материалов [290, 305] в пластинчатых конструкциях является одним из новых важных направлений в машиностроении и аэрокосмических технологиях. Эффективность использования пластинчатых конструкций из таких материалов, в том числе материалов с экспоненциальным типом неоднородности деформационных свойств [299, 353], во многом зависит от точности определения их реальных физико-механических параметров. Одним из возможных перспективных способов идентификации этих характеристик является использование различных видов данных ультразвуковой диагностики [300, 353] неоднородных по толщине трансверсально-изотропных нанокompозитных пластин. В частности, возможно использование экспериментальных данных нечеткого оценивания длины нормальных упругих волн сдвига [2, 65] и экспериментальные значения критических частот для различных мод бегущих волн в рассматриваемых пластинах. Создание теоретико-экспериментальной модели нечеткого оценивания физико-механических параметров трансверсально-изотропных функционально-градиентных нанокompозитных пластинчатых конструкций с экспоненциальной неоднородностью по толщине является актуальной проблемой при совершенствовании методов расчета прочности и надежности машиностроительных и аэрокосмических конструкций. Для ее решения в данном подразделе работы предлагается численно-аналитическая методика формирования нечетких оценок неопределенных физико-механических параметров на основе перехода к нечетко-множественным аргументам в получаемых аналитических соотношениях связи физико-механических параметров функционально-градиентных трансверсально-изотропных нанокompозитных материалов с характеристиками ультразвуковых измерений. Применяется также модифицированная форма эвристического принципа обобщения в теории нечетких вычислений. Предварительно рассматривается

получение аналитического решения задачи о распространении нормальных упругих волн сдвига в функционально-градиентном трансверсально-изотропном деформируемом слое с модулями упругости и плотностью, изменяющимися по экспоненциальному закону вдоль поперечной координаты [73].

В разрабатываемом методе используются результаты исследования детерминистического варианта модели распространения гармонической нормальной сдвиговой горизонтально поляризованной волны сдвига вдоль произвольного направления в плоскости функционально-градиентного трансверсально-изотропного упругого слоя с экспоненциальной толщинной неоднородностью физико-механических свойств. Занимаемая рассматриваемым слоем область в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$ имеет описание $V = \{-\infty < x_1, x_2 < \infty, -h \leq x_3 \leq h\}$; ось изотропии материала слоя ориентирована вдоль ортогонального его свободным от напряжений граням $x_3 = \pm h$ координатного направления Ox_3 . При выборе в качестве направления распространения рассматриваемой SH волны с волновым числом k и круговой частотой ω оси Ox_1 , ее комплексные характеристики колебательных волновых смещений $u_j(x_1, x_2, x_3, t)$ описываются общим представлением вида

$$u_2(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi(x_3) \exp(-i(\omega t - kx_1)), \quad u_1(x_1, x_2, x_3, t) = u_3(x_1, x_2, x_3, t) \equiv 0.$$

Характеристики анализируемого волнового процесса подлежат определению из краевой задачи вида

$$\partial_1 \sigma_{21} + \partial_3 \sigma_{23} - \rho_f \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_t^2 u_2 = 0, \quad (5.40)$$

$$\sigma_{21} = c_{66} \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_1 u_2, \quad \sigma_{23} = c_{44} \exp(\lambda x_3) \cdot \partial_3 u_2, \quad \rho_f = \rho \exp(\lambda x_3),$$

$$(\partial_3 u_2)_{x_3=\pm h} = 0,$$

в соотношениях которой ρ_f , c_{44} , c_{66} – функциональные параметры плотности и упругих свойств неоднородного по толщине слоя материала; $\partial_j = \partial / \partial x_j$, $\partial_t = \partial / \partial t$ – операторы частного дифференцирования по координатным переменным и по параметру времени; λ – параметр экспоненциального закона неоднородности физико-механических свойств по толщине слоя. При подстановке исходной

формы $u_2(x_1, x_2, x_3, t)$ в соотношения краевой задачи (5.40), интегрирование ее дифференциального уравнения приводит к представлению для $\varphi(x_3)$ вида

$$\varphi(x_3) = d_+ \exp(\gamma_+ x_3) + d_- \exp(\gamma_- x_3), \gamma_{\pm} = -(\lambda/2) \pm ((\lambda/2)^2 - \beta^2)^{1/2} \quad (5.41)$$

$$\beta^2 = (\rho\omega^2 - c_{66}k^2) / c_{44},$$

содержащему неопределенные постоянные d_+ , d_- , а при последующем использовании выражения (5.41) для записи краевых условий $(\varphi'(x_3))_{x_3=\pm h} = 0$, из него может быть получена однородная система линейных алгебраических уравнений для определения величин d_{\pm} . Следствием приравнивания нулю определителя этой системы является дисперсионное уравнение для моды рассматриваемых нормальных волн с номером p ($p = \overline{0, \infty}$), записываемое в форме

$$\omega = [\zeta_{66}k_p^2 + \zeta_{44}(\tau + \Delta_p)]^{1/2}, \zeta_{ij} = c_{ij} / \rho, \tau = \lambda^2 / 4, \Delta_p = (p\pi / (2h))^2, \quad (5.42)$$

либо в виде функционального выражения для характеристики длины рассматриваемой нормальной волны δ_p

$$\delta_p = (4\pi^2 \zeta_{66} / (\omega^2 - \zeta_{44}(\tau + \Delta_p)))^{1/2}. \quad (5.43)$$

Методика дальнейшего анализа модели волновой идентификации параметров слоя в детерминистической версии, базируется на предположении о технической возможности экспериментального определения параметра удельной массы m для элемента пластины с единичной площадью и параметров длины δ_{01} и δ_{02} ($\delta_{01} > \delta_{02}$) для двух распространяющихся нормальных SH волн с частотами ω_1 и ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$), принадлежащих низшей моде $p=0$ волнового спектра для рассматриваемого слоя. Аналогично, параметры длин δ_{03} и δ_{14} ($\delta_{14} > \delta_{03}$) могут быть, соответственно, экспериментальными способами определены для волны из моды $p=0$ дисперсионного спектра, имеющей частоту частотой ω_3 , а также для волны с частотой ω_4 ($\omega_4 > \omega_3$) из моды спектра $p=1$. Характеристика ρ , фигурирующая в вышеприведенных выражениях, связана с экспериментально определяемым значением m соотношением $\rho = m\lambda / (2sh(\lambda h))$. В рамках данных

предположений, для параметров ζ_{66} , ζ_{44} и τ расчетных соотношений записываются представления

$$\zeta_{66} = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})), \quad (5.44)$$

$$\zeta_{44} = (\gamma_4 - \gamma_3) / (\Delta_1 - \Delta_0) = (\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0),$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 &= \omega_3^2 - 4\pi^2 \zeta_{66} \delta_{03}^{-2}, \quad \gamma_4 = \omega_4^2 - 4\pi^2 \zeta_{66} \delta_{14}^{-2}, \quad \tau = \gamma_3 \zeta_{44}^{-1} - \Delta_0 = \\ &= (\omega_3^2 - 4\pi^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2})) \delta_{03}^{-2}) / ((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) \cdot \\ &\quad \cdot (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0, \end{aligned}$$

на базе которых, в итоге, могут быть получены аналитические явные функциональные зависимости для описания идентифицируемых параметров λ , ρ , c_{66} , c_{44} рассматриваемой модели через совокупность экзогенных параметров $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, m, h$:

$$\lambda = \Phi_\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = 2[(\omega_3^2 - 4\pi^2 ((\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2}) / ((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2},$$

$$\begin{aligned} \rho &= \Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = 2m [(\omega_3^2 - 4\pi^2 ((\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2}) / \\ &((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2} / [2sh(2h((\omega_3^2 - 4\pi^2 \\ &(\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2} ((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0)^{1/2}], \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$c_{66} = \Phi_{66}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))$$

$$2m [(\omega_3^2 - 4\pi^2 ((\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2}) /$$

$$\begin{aligned} &((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2} / [2sh(2h((\omega_3^2 - 4\pi^2 \\ &(\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2} ((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0)^{1/2}] \end{aligned}$$

$$c_{44} = \Phi_{44}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) = [(\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2})$$

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)] 2m [(\omega_3^2 - 4\pi^2 ((\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2}) /$$

$$\begin{aligned} &((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0]^{1/2} / [2sh(2h((\omega_3^2 - 4\pi^2 \\ &(\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) \delta_{03}^{-2} ((\omega_4^2 - \omega_3^2 + 4\pi^2 (\delta_{03}^{-2} - \delta_{14}^{-2}) (\omega_2^2 - \omega_1^2) / (4\pi^2 (\delta_{02}^{-2} - \delta_{01}^{-2}))) / (\Delta_1 - \Delta_0)) - \Delta_0)^{1/2}]. \end{aligned}$$

Метод волновой нечетко-множественной идентификации характеристик материала слоя основывается на использовании полученных функциональных

расчетных соотношений (5.45) и введении для параметров $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, m$, определяемых с погрешностями экспериментальных измерений, нечетко-множественных описаний $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3, \tilde{\omega}_4, \tilde{\delta}_{01}, \tilde{\delta}_{02}, \tilde{\delta}_{03}, \tilde{\delta}_{14}, \tilde{m}$ в виде представляемых суперпозициями α -срезов трапецеидальных нормальных нечетких интервалов

$$\tilde{m} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [m_\alpha, \bar{m}_\alpha]; \quad \tilde{\omega}_j = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\omega}_{j\alpha}, \bar{\omega}_{j\alpha}] \quad (j = \overline{1,4}); \quad \tilde{\delta}_{0j} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \bar{\delta}_{0j\alpha}] \quad (j = \overline{1,3});$$

$$\tilde{\delta}_{14} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\delta}_{14\alpha}, \bar{\delta}_{14\alpha}]; \quad \tilde{m} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [m_\alpha, \bar{m}_\alpha].$$

с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{\omega}_j}$ ($j = \overline{1,4}$), $\mu_{\tilde{\delta}_{0j}}$ ($j = \overline{1,3}$), $\mu_{\tilde{\delta}_{14}}$, $\mu_{\tilde{m}}$.

Толщина слоя h интерпретируется как точно заданный параметр без разбросов значений. Далее в отношениях (5.45) реализуется переход в нечетко-интервальным аргументам с использованием α -уровневой модифицированной версии эвристического принципа расширения, в результате чего для эндогенных нечетко-множественных характеристик $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{c}_{66} , \tilde{c}_{44} идентифицируемых параметров получены представления

$$\tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \quad \tilde{\rho} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha], \quad \tilde{c}_{66} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{66\alpha}, \bar{c}_{66\alpha}], \quad \tilde{c}_{44} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{c}_{44\alpha}, \bar{c}_{44\alpha}]; \quad (5.46)$$

$$\underline{\lambda}_\alpha = \inf_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \bar{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \bar{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \bar{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [m_\alpha, \bar{m}_\alpha]}} \{ \Phi_\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) \},$$

$$\bar{\lambda}_\alpha = \sup_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \bar{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \bar{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \bar{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [m_\alpha, \bar{m}_\alpha]}} \{ \Phi_\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) \};$$

$$\underline{\rho}_\alpha = \inf_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \bar{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \bar{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \bar{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [m_\alpha, \bar{m}_\alpha]}} \{ \Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) \},$$

$$\bar{\rho}_\alpha = \sup_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \bar{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \bar{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \bar{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [m_\alpha, \bar{m}_\alpha]}} \{ \Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m) \};$$

$$\underline{c}_{66\alpha} = \inf_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \overline{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \overline{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \overline{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]}} \{\Phi_{66}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)\},$$

$$\overline{c}_{66\alpha} = \sup_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \overline{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \overline{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \overline{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]}} \{\Phi_{66}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)\};$$

$$\underline{c}_{44\alpha} = \inf_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \overline{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \overline{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \overline{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]}} \{\Phi_{44}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)\},$$

$$\overline{c}_{44\alpha} = \sup_{\substack{\omega_j \in [\underline{\omega}_{j\alpha}, \overline{\omega}_{j\alpha}] \\ \delta_{0j} \in [\underline{\delta}_{0j\alpha}, \overline{\delta}_{0j\alpha}] \\ \delta_{14} \in [\underline{\delta}_{14\alpha}, \overline{\delta}_{14\alpha}] \\ m \in [\underline{m}_\alpha, \overline{m}_\alpha]}} \{\Phi_{44}(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)\}.$$

Число варьируемых в вышеприведенных соотношениях (5.46) параметров может быть сокращено на основе анализа свойств знакоопределенности аналитических представлений для первых частных производных по аргументам для функциональных зависимостей $\Phi_\lambda(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)$, $\Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)$, $\Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)$, $\Phi_\rho(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \delta_{01}, \delta_{02}, \delta_{03}, \delta_{14}, h, m)$ во всей области определения.

Для реализации представленного метода разработано программное приложение. В качестве примера расчетов с его использованием рассмотрено задание нечетко-множественной идентификации физико-механических параметров пластины, имеющей приведенную толщину $h=1.0$, в варианте использования набора экспериментальных данных с нечетко-интервальными описаниями

$$\begin{aligned} \rho_* &= 10^3; \quad \tilde{\delta}_{01} : (2.06, 2.29, 2.31, 2.34); \quad \tilde{\delta}_{02} : (8.72, 8.84, 8.93, 9.05); \quad \tilde{\delta}_{03} : (5.74, 5.91, 5.99, 6.15); \\ \tilde{\delta}_{14} &: (7.02, 7.18, 7.23, 7.45); \quad \rho_* = 10^3; \quad \tilde{\omega}_1 : (0.49, 0.50, 0.51, 0.53); \quad \tilde{\omega}_2 : (0.98, 0.99, 1.00, 1.03); \\ \tilde{\omega}_3 &: (1.49, 1.50, 1.52, 1.54); \quad \tilde{\omega}_4 : (1.97, 1.99, 2.01, 2.04); \quad \tilde{m} : (1.96, 1.99, 2.03, 2.10); \quad c_* = 10^{10}. \end{aligned}$$

Профили функций принадлежности для нормированных нечетко-множественных эндогенных параметров $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{c}_{66} , \tilde{c}_{44} представлены на рисунках

5.10 – 5.13. Их описания позволяют получать оценки показателей меры уверенности в том, значения идентифицируемых параметров рассматриваемой модели будут принимать соответствующие значения из интервалов носителей нечетких множеств $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\rho}$, \tilde{c}_{66} , \tilde{c}_{44} при учете влияния погрешностей в данных экспериментальных замеров.

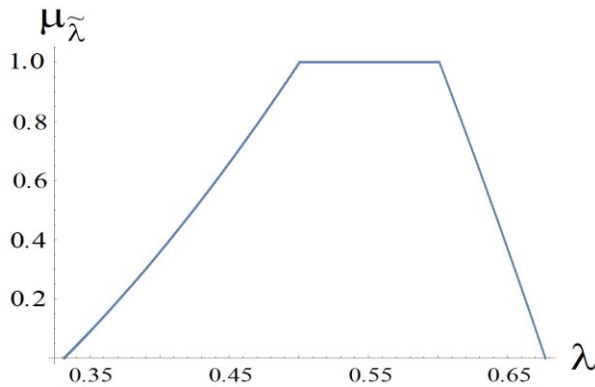


Рис. 5.10. Вид функции принадлежности для $\tilde{\lambda}$

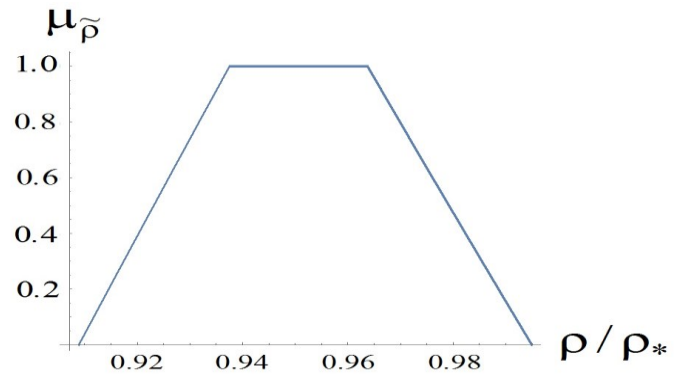


Рис. 5.11. Вид функции принадлежности для $\tilde{\rho}$

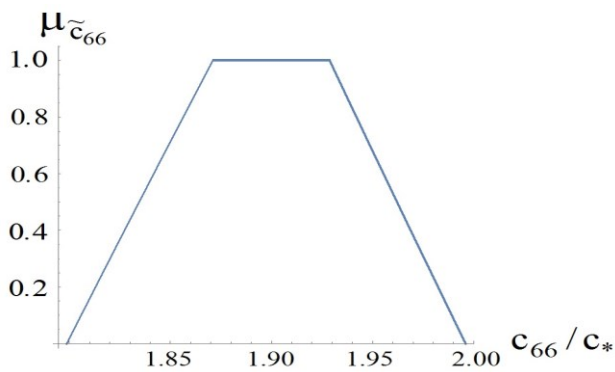


Рис. 5.12. Вид функции принадлежности для \tilde{c}_{66}

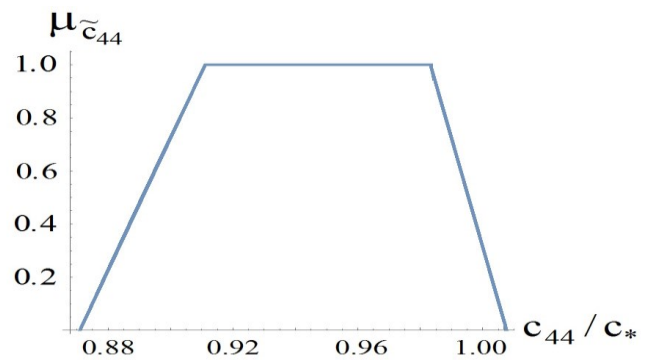


Рис. 5.13. Вид функции принадлежности для \tilde{c}_{44}

5.6. Выводы по разделу 5

1. Разработан нечетко-множественный алгоритм учета факторов неопределенности экзогенных параметров в модели поперечных колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин.

2. Разработан нечетко-множественный метод анализа факторов неопределенности в модели резонансных колебаний трехслойных композитных цилиндрических панелей

3. Разработан нечетко-множественный метод учета разбросов в значениях экзогенных параметров в модели собственных колебаний предварительно напряженных изотропных прямоугольных пластин.

4. Разработан нечетко-множественный метод идентификации механических характеристик тонких изотропных плит на основе резонансно-волновой методики.

5. Разработан метод анализа модели нечетко-множественной идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин с использованием неопределенных экспериментальных данных ультразвуковой диагностики.

6. Разработан и апробирован комплекс программных приложений для численной реализации предложенных алгоритмов нечетко-множественного моделирования в прямых и обратных задачах теории резонансных колебаний упругих пластин, панелей и цилиндров.

РАЗДЕЛ 6. НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ УЧЕТА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В МОДЕЛЯХ РАССЕЯНИЯ ОХЛАЖДАЮЩИХ ЖИДКОСТЕЙ, ГАЗОЖИДКОСТНОЙ ТЕРМОСТАБИЛИЗАЦИИ И ТЕПЛОВОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ

Проблемы термостабилизации являются важнейшим предметом исследований в связи с самым широким распространением процессов обеспечения температурных режимов в промышленных технологиях. Их постановка и исследование связаны с проектированием систем охлаждения, защиты от воздействия тепловых излучений, устройств теплообмена. Связанное с предпроектными расчетами и конструированием промышленных агрегатов и технологий математическое моделирование сталкивается с необходимостью учета большого числа факторов неопределенности, обусловленных, прежде всего, свойствами неконтрастности исходных теплофизических, механических и геометрических параметров ввиду существования разбросов их экспериментальных измерений и технологических допусков при выборе рабочих характеристик соответствующих технических устройств и технологических процессов. В этой связи, проблема учета эффектов неопределенности экзогенных параметров играет важнейшую роль в обеспечении адекватности результатов моделирования, и так же, как и рассмотренные в предшествующих разделах работы модели деформационных процессов, может быть эффективно исследована на основе применения методов теории нечетких множеств. К подлежащим анализу моделям прежде всего относятся модели создания аэрозольных газожидкостных сред с использованием распылителей и форсунок различных типов для применения в системах охлаждения и теплообмена. К их числу следует отнести форсунки центробежного и центробежно-струйного типа, параметры функционирования которых, такие как свойства распыляемых жидкостей, параметры потерь в различных подводящих каналах устройств, эксплуатационные изменения их геометрических характеристик являются величинами с высокой степенью неопределенности, разбросов допускаемых значений. В равной степени

это относится и к расчетным моделям ротационных распылителей, моделям оттеснения обтекающих плазменных потоков, моделям теплового экранирования. В этой связи, данный раздел работы посвящен разработке и алгоритмической реализации методов исследования моделей аэрозольного рассеяния охлаждающих реагентов, моделей теплообмена на границах контакта охлаждающих аэрозольных потоков и высокотемпературных поверхностей, моделей теплового экранирования с применением многослойных теплоотражающих пакетов.

6.1. Оценивание характеристик функционирования центробежных и центробежно-струйных форсунок с применением нечетко-множественного анализа.

Используемые при исследовании детерминированные модели функционирования центробежно-струйных форсунок, описание их характерных параметров, основных физических принципов работы, а также данные об их конструктивных особенностях изложены в публикациях [11–12, 15, 59, 63, 192–193, 216]. К исходным параметрам этих моделей относятся [192–193]: площадь сечения S_c и диаметр d_c цилиндрического канала сопла; диаметр d_0 , длина l_0 и площадь сечения S_0 , центрального осевого цилиндрического канала форсунки центробежно-струйного типа; диаметры d_{jb} , длины l_{jb} ($j = \overline{1, N}$) и площади сечений S_{jb} и винтовых закручивающих цилиндрических каналов. Центры сечений винтовых каналов расположены на окружности с радиусом R_b в перпендикулярной осевому каналу плоскости с полюсом в его центре, а их оси в плоскостях продольных сечений, коллинеарных основному осевому направлению, имеют угол наклона γ к направлению центрального канала. Введены также обозначения для радиуса вихря в камере форсунки R_v , радиуса сопла форсунки R_c , коэффициента заполнения соплового канала $\varphi = 1 - R_v^2 / R_c^2$. Параметрами модели являются также λ_{jb} и λ_0 – коэффициенты трения в закручивающих и центральном осевом каналах; ξ_{jb} и ξ_0 – коэффициенты потерь на местные

сопротивления в закручивающих и центральном осевом каналах. По предположению, закручивающие каналы и осевой канал имеют полное жидкостное заполнение. Плечо закручивания поступающей по винтовым цилиндрическим каналам жидкости характеризуется параметром R_b . Конечными искомыми параметрами расчетных моделей распыления охлаждающей жидкости в форсунках центробежно-струйного типа являются параметры дисперсности создаваемой аэрозольной среды, параметры расхода распыляемой жидкости, а также угловые параметры факела распыления и скорости истечения аэрозольной смеси из сопла форсунки.

Применяемые на практике детерминистические модели течения идеальных и реальных жидкостей центробежно-струйными форсунками и методики расчета характеристик эффективности процесса распыления представлены в работах [11–12, 15, 59, 63, 192–193, 216]. Данные модели базируются на принципе обеспечения максимального расхода протекающей через форсунки жидкости, а также на использовании закона сохранения момента количества движения. Для варианта модели функционирования центробежно-струйной форсунки, описываемого в работе [193], эндогенный параметр расхода распыляемой идеальной жидкости или жидкости малой вязкости имеет представление, в котором фигурирует геометрическая характеристика конструкции A^* (для случая учета вязкости реальной жидкости – A_v^*). Для случая распыления идеальной жидкости характеристика A^* описывается соотношением

$$A^* = 2 \sin \gamma \cdot (R_b / R_c) (S_c \cdot \sum_{j=1}^N S_{jb}) / (S_0 + \sum_{j=1}^N S_{jb})^2. \quad (6.1)$$

В свою очередь, представление A_v^* имеет вид

$$A_v^* = 2 \sin \gamma \cdot (R_b / R_c) (S_c \cdot \sum_{j=1}^N S_{jb}) / ((S_0 \lambda + \sum_{j=1}^N S_{jb})^2). \quad (6.2)$$

В (6.1), (6.2) λ – приведенный коэффициент потерь в устройстве формирования потоков (в подводящих каналах), задаваемый формулой

$$\lambda = [(\sum_{j=1}^N (\lambda_{jb} l_{jb} / d_{jb} + \xi_{jb})) / (\lambda_0 l_0 / d_0 + \xi_0)]. \quad (6.3)$$

В случае распыления в центробежно-струйной форсунке идеальной жидкости коэффициент расхода μ определяется соотношением [28]

$$\mu = ((A^*)^2(2 - \varphi)^{-2} + \varphi^{-2})^{-1/2}. \quad (6.4)$$

Другие основные эндогенные параметры рассматриваемых моделей – коэффициент заполнения сопла φ и угол раствора факела распыления β также определяющим образом зависят от расчетных геометрических параметров A^* и A_v^* [27 – 28]. В частности, зависимость коэффициента φ заполнения сопла от геометрического параметра A^* определяется принципом максимума расхода

$$\partial\mu/\partial\varphi = 0, \quad (6.5)$$

и имеет в случае идеальной жидкости вид

$$A^* = ((2 - \varphi)/\varphi)^{3/2}. \quad (6.6)$$

Из (6.6), соответственно, следует

$$\varphi = 2/(1 + (A^*)^{2/3}), \quad \mu = (\varphi^3/2)^{1/2} = 2(1 + (A^*)^{2/3})^{-3/2}. \quad (6.7)$$

Величина угла раскрытия для факела распыления, определяемого по расчетным значениям A^* и φ , определяется по формуле

$$\beta = 2\arctg(A^*\varphi/(2 - \varphi)) = 2\arctg(((2 - \varphi)/\varphi)^{1/2}). \quad (6.8)$$

В случае полного ($\varphi=1$) заполнения канала сопла центробежно-струйной форсунки параметр A^* имеет значение $A^*=1$; ситуация полного заполнения соплового канала имеет место и при $A^* < 1$. В случае же $A^* > 1$ в сопловом канале возникает газовый вихрь.

Эндогенным параметром данной модели является также величина скорости аэрозольного потока V_{fc} на выходе из соплового отверстия центробежно-струйной форсунки. Величина этого параметра задается выражением

$$V_{fc} = (P_f\varphi/\rho_f)^{1/2}, \quad (6.9)$$

в котором ρ_f – плотность распыляемой жидкости, P_f – экзогенный параметр давления распыляемой жидкости в подводящем трубопроводе.

Разрабатываемая нечетко-множественная модель учета разбросов в значениях исходных параметров и получения неконтрастных оценок для

параметров процесса распыления рассматриваемой как идеальная жидкость охлаждающей жидкой субстанции в центробежно-струйной форсунке основывается на использовании эвристического принципа обобщения (принципа расширения) для перехода к неопределенным, неконтрастным аргументам нечетко-множественной природы в расчетных соотношениях (6.1) – (6.4), (6.6) – (6.9) детерминированной версии соответствующей модели.

При построении теоретического алгоритма получения нечетко-множественных оценок для эндогенных параметров модели распыления идеальной жидкости в центробежно-струйной форсунке применяются описываемые формулами (6.4), (6.7) – (6.9) функциональные аналитические представления $\varphi(A^*)$, $\mu(A^*)$, $\beta(A^*)$, $V_{fc}(A^*, P_f, \rho_f)$ эндогенных параметров A^* , φ , μ , β , V_{fc} через исходные геометрические параметры модели S_0 , S_c , S_{jb} , R_b , R_c , γ .

На исходном этапе построения алгоритма нечетко-множественного оценивания, на базе соотношений (6.1), (6.7), (6.8) в рассмотрение вводятся функциональные зависимости

$$A^* = A^*(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) = F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad (6.10)$$

$$\varphi = F_\varphi(A^*) = F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad (6.11)$$

$$\mu = F_\mu(A^*) = F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad (6.12)$$

$$\beta = F_\beta(A^*) = F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad (6.13)$$

$$V_{fc} = F_f(A^*, P_f, \rho_f) = F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f). \quad (6.14)$$

Нечетко-множественная методика получения неконтрастных оценок эндогенных параметров распыления охлаждающей субстанции в виде идеальной несжимаемой жидкости базируется на применении к расчетным соотношениям детерминистической версии модели (6.10) – (6.14) эвристического принципа обобщения с переходом в них к неконтрастным аргументам нечетко-множественного типа. При этом используются функциональные выражения характеристик A^* , φ , μ , β через экзогенные параметры S_0 , S_c , S_{jb} , R_b , R_c , γ и аналитические соотношения связи V_{fc} с параметрами S_0 , S_c , S_{jb} , R_b , R_c , γ , P_f , ρ_f .

Для неконтрастных, имеющих разбросы значений исходных параметров S_0 , S_c , S_{jb} , R_b , R_c , γ , P_f , ρ_f , реализуется процедура фаззификации и вводятся нечетко-множественные описания \tilde{S}_0 , \tilde{S}_c , \tilde{S}_{jb} , \tilde{R}_b , \tilde{R}_c , $\tilde{\gamma}$, \tilde{P}_f , $\tilde{\rho}_f$. Введенные нечеткие множества соответственно характеризуются функциями принадлежности $\mu_{\tilde{S}_0}(S_0)$, $\mu_{\tilde{S}_c}(S_c)$, $\mu_{\tilde{S}_{jb}}(S_{jb})$, $\mu_{\tilde{R}_b}(R_b)$, $\mu_{\tilde{R}_c}(R_c)$, $\mu_{\tilde{\gamma}}(\gamma)$, $\mu_{\tilde{P}_f}(P_f)$, $\mu_{\tilde{\rho}_f}(\rho_f)$.

Формируемые итоговые неконтрастные оценки для эндогенных параметров модели в рамках применяемого подхода также имеют форму нечетких множеств \tilde{A}^* , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{V}_{fc} . При учете малости разбросов в значениях геометрических конструктивных параметров форсунки дальнейшие исследования целесообразно проводить в рассматриваемых отдельно диапазонах их вариаций

$$S_0 S_c < \left(\sum_{j=1}^N S_{jb} \right)^2, \quad (6.15)$$

и

$$S_0 S_c \geq \left(\sum_{j=1}^N S_{jb} \right)^2. \quad (6.16)$$

При этом, все вышеуказанные экзогенные и эндогенные нечетко-множественные параметры записываются в форме суперпозиций множеств α -уровня.

На этапе фаззификации неконтрастных экзогенных параметров конструируются два варианта предлагаемой нечетко-множественной методики соответственно двум версиям выбора формы представления исходной неопределенной информации. Для неконтрастных величин экзогенных параметров S_0 , S_c , S_{jb} , R_b , R_c , γ , P_f , ρ_f в первом случае вводятся описания в виде трапецеидальных нормальных нечетких интервалов \tilde{S}_0 , \tilde{S}_c , \tilde{S}_{jb} , \tilde{R}_b , \tilde{R}_c , $\tilde{\gamma}$, \tilde{P}_f , $\tilde{\rho}_f$, представляемых кортежами реперных значений

$$\tilde{S}_0 = (S_{10}, S_{20}, S_{30}, S_{40}), \quad \tilde{S}_c = (S_{1c}, S_{2c}, S_{3c}, S_{4c}), \quad \tilde{S}_{jb} = (S_{1jb}, S_{2jb}, S_{3jb}, S_{4jb}), \quad (6.17)$$

$$\tilde{R}_b = (R_{1b}, R_{2b}, R_{3b}, R_{4b}), \quad \tilde{R}_c = (R_{1c}, R_{2c}, R_{3c}, R_{4c}), \quad \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4),$$

$$\tilde{P}_f = (P_1, P_2, P_3, P_4), \quad \tilde{\rho}_f = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4),$$

и записываемых, далее, в форме разложений по множествам α - срезов

$$\begin{aligned} \tilde{R}_b &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}], \quad \underline{R}_{b\alpha} = (1-\alpha)R_{1b} + \alpha R_{2b}, \quad \bar{R}_{b\alpha} = \alpha R_{3b} + (1-\alpha)R_{4b}; \quad (6.18) \\ \tilde{R}_c &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{c\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}], \quad \underline{R}_{c\alpha} = (1-\alpha)R_{1c} + \alpha R_{2c}, \quad \bar{R}_{c\alpha} = \alpha R_{3c} + (1-\alpha)R_{4c}; \quad \tilde{S}_0 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{0\alpha}], \\ &\quad \underline{S}_{0\alpha} = (1-\alpha)S_{10} + \alpha S_{20}, \quad \bar{S}_{0\alpha} = \alpha S_{30} + (1-\alpha)S_{40}; \\ \tilde{S}_c &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}], \quad \underline{S}_{c\alpha} = (1-\alpha)S_{1c} + \alpha S_{2c}, \quad \bar{S}_{c\alpha} = \alpha S_{3c} + (1-\alpha)S_{4c}; \\ \tilde{S}_{jb} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{S}_{jb\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}], \quad \underline{S}_{jb\alpha} = (1-\alpha)S_{1jb} + \alpha S_{2jb}, \quad \bar{S}_{jb\alpha} = \alpha S_{3jb} + (1-\alpha)S_{4jb}; \\ \tilde{P}_f &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{P}_{f\alpha}, \bar{P}_{f\alpha}], \quad \underline{P}_{f\alpha} = (1-\alpha)P_1 + \alpha P_2, \quad \bar{P}_{f\alpha} = \alpha P_3 + (1-\alpha)P_4; \\ \tilde{\gamma} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha], \quad \underline{\gamma}_\alpha = (1-\alpha)\gamma_1 + \alpha\gamma_2, \quad \bar{\gamma}_\alpha = \alpha\gamma_3 + (1-\alpha)\gamma_4, \\ \tilde{\rho}_f &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{f\alpha}, \bar{\rho}_{f\alpha}], \quad \underline{\rho}_{f\alpha} = (1-\alpha)\rho_1 + \alpha\rho_2, \quad \bar{\rho}_{f\alpha} = \alpha\rho_3 + (1-\alpha)\rho_4. \end{aligned}$$

Для второго варианта предлагаемого алгоритма получения нечетко-множественных оценок параметров \tilde{A}^* , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{V}_{fc} для функций принадлежности экзогенных неопределенных параметров $\mu_{\tilde{S}_0}(S_0)$, $\mu_{\tilde{S}_c}(S_c)$, $\mu_{\tilde{S}_{jb}}(S_{jb})$, $\mu_{\tilde{R}_b}(R_b)$, $\mu_{\tilde{R}_c}(R_c)$, $\mu_{\tilde{\gamma}}(\gamma)$, $\mu_{\tilde{P}_f}(P_f)$, $\mu_{\tilde{\rho}_f}(\rho_f)$ вводятся представления, соответствующие гауссовым нечетким числам

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{S}_0}(S_0) &= \exp(-(S_0 - m_{*S_0})^2 / (2\sigma_{*S_0}^2)), \quad \mu_{\tilde{S}_c}(S_c) = \exp(-(S_c - m_{*S_c})^2 / (2\sigma_{*S_c}^2)), \quad (6.19) \\ \mu_{\tilde{S}_{jb}}(S_{jb}) &= \exp(-(S_{jb} - m_{*S_{jb}})^2 / (2\sigma_{*S_{jb}}^2)), \quad \mu_{\tilde{R}_b}(R_b) = \exp(-(R_b - m_{*R_b})^2 / (2\sigma_{*R_b}^2)), \\ \mu_{\tilde{R}_c}(R_c) &= \exp(-(R_c - m_{*R_c})^2 / (2\sigma_{*R_c}^2)), \quad \mu_{\tilde{\gamma}}(\gamma) = \exp(-(\gamma - m_{*\gamma})^2 / (2\sigma_{*\gamma}^2)), \\ \mu_{\tilde{P}_f}(P_f) &= \exp(-(P_f - m_{*P_f})^2 / (2\sigma_{*P_f}^2)), \quad \mu_{\tilde{\rho}_f}(\rho_f) = \exp(-(\rho_f - m_{*\rho_f})^2 / (2\sigma_{*\rho_f}^2)), \end{aligned}$$

и по форме отвечающие функциям плотности для статистических нормальных распределений с параметрами среднеквадратических отклонений σ_{*S_0} , σ_{*S_c} , $\sigma_{*S_{jb}}$, σ_{*R_b} , σ_{*R_c} , $\sigma_{*\gamma}$, σ_{*P_f} , $\sigma_{*\rho_f}$ и средних значений m_{*S_0} , m_{*S_c} , $m_{*S_{jb}}$, m_{*R_b} , m_{*R_c} , $m_{*\gamma}$, m_{*P_f} , $m_{*\rho_f}$.

При этом

$$\begin{aligned}
\underline{R}_{b\alpha} &= m_{*R_b} - \sigma_{*R_b} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{R}_{b\alpha} = m_{*R_b} + \sigma_{*R_b} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{R}_{c\alpha} &= m_{*R_c} - \sigma_{*R_c} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{R}_{c\alpha} = m_{*R_c} + \sigma_{*R_c} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{S}_{0\alpha} &= m_{*S_0} - \sigma_{*S_0} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{S}_{0\alpha} = m_{*S_0} + \sigma_{*S_0} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{S}_{c\alpha} &= m_{*S_c} - \sigma_{*S_c} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{S}_{c\alpha} = m_{*S_c} + \sigma_{*S_c} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{S}_{jb\alpha} &= m_{*S_{jb}} - \sigma_{*S_{jb}} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{S}_{jb\alpha} = m_{*S_{jb}} + \sigma_{*S_{jb}} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{P}_{f\alpha} &= m_{*P_f} - \sigma_{*P_f} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{P}_{f\alpha} = m_{*P_f} + \sigma_{*P_f} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{\gamma}_{\alpha} &= m_{*\gamma} - \sigma_{*\gamma} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{\gamma}_{\alpha} = m_{*\gamma} + \sigma_{*\gamma} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}; \\
\underline{\rho}_{f\alpha} &= m_{*\rho_f} - \sigma_{*\rho_f} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}, \quad \overline{\rho}_{f\alpha} = m_{*\rho_f} + \sigma_{*\rho_f} (\ln \alpha^{-2})^{1/2}.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Соответственно для нечетко-множественных эндогенных характеристик \tilde{A}^* , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{V}_{fc} в рамках разрабатываемой методики вводятся представления

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^* &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_{\alpha}^*, \overline{A}_{\alpha}^*], \quad \tilde{\varphi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{\alpha}, \overline{\varphi}_{\alpha}], \quad \tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{\alpha}, \overline{\mu}_{\alpha}], \quad \tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_{\alpha}, \overline{\beta}_{\alpha}], \\
\tilde{V}_{fc} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{fc\alpha}, \overline{V}_{fc\alpha}].
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Способ получения нечетко-множественных оценок \tilde{A}^* , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{V}_{fc} базируется на использовании α -уровневой формы эвристического принципа обобщения в процессе перехода от четких аналитических функциональных соотношений (6.10) – (6.14), полученных при анализе детерминистического варианта модели распыления идеальной жидкости в центробежно-струйной форсунке к их нечетко-множественным обобщениям на основе расширения областей определения рассматриваемых соотношений на аргументы нечетко-множественного типа. С учетом выражений (6.18) – (6.21) для нечетко-множественных величин \tilde{A}^* , $\tilde{\mu}$, $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{V}_{fc} записываются представления

$$\tilde{A}^* = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_{\alpha}^*, \overline{A}_{\alpha}^*], \tag{6.22}$$

$$\underline{A}_\alpha^* = \inf_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad \overline{A}_\alpha^* = \sup_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma);$$

$$\tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \overline{\mu}_\alpha],$$

$$\underline{\mu}_\alpha = \inf_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad \overline{\mu}_\alpha = \sup_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma);$$

$$\tilde{\varphi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha],$$

$$\underline{\varphi}_\alpha = \inf_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad \overline{\varphi}_\alpha = \sup_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma);$$

$$\tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_\alpha, \overline{\beta}_\alpha],$$

$$\underline{\beta}_\alpha = \inf_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma), \quad \overline{\beta}_\alpha = \sup_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha]}} F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma);$$

$$\tilde{V}_{fc} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{fc\alpha}, \overline{V}_{fc\alpha}],$$

$$\underline{V}_{fc\alpha} = \inf_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ P_f \in [\underline{P}_{f\alpha}, \overline{P}_{f\alpha}] \\ \rho_f \in [\underline{\rho}_{f\alpha}, \overline{\rho}_{f\alpha}]}} F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f), \quad \overline{V}_{fc\alpha} = \sup_{\substack{S_0 \in [\underline{S}_{0\alpha}, \overline{S}_{0\alpha}] \\ S_c \in [\underline{S}_{c\alpha}, \overline{S}_{c\alpha}] \\ S_{jb} \in [\underline{S}_{jb\alpha}, \overline{S}_{jb\alpha}] \\ R_b \in [\underline{R}_{b\alpha}, \overline{R}_{b\alpha}] \\ R_c \in [\underline{R}_{c\alpha}, \overline{R}_{c\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ P_f \in [\underline{P}_{f\alpha}, \overline{P}_{f\alpha}] \\ \rho_f \in [\underline{\rho}_{f\alpha}, \overline{\rho}_{f\alpha}]}} F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f).$$

В качестве приема численной реализации предлагаемой методики нечетко-множественного исследования модели функционирования центробежно-струйных

форсунок с неконтрастными исходными параметрами, в представлениях \tilde{A} , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$ суперпозициями (6.22) по множествам α - уровня осуществляется замена континуального множества $\alpha \in [0, 1]$ его дискретным подмножеством $\{\alpha_m\}_{m=1}^{M_\alpha} = \Xi_\alpha$, $\Xi_\alpha \subset [0, 1]$ с последующим переходом к представлениям вида $\tilde{A}^* = \bigcup_{\alpha \in \Xi_\alpha} [\underline{A}_\alpha^*, \overline{A}_\alpha^*]$ при соответствующем контроле полноты и информативности получаемых таким образом конечных оценок. На основе соотношений (6.22) описывается общий подход к получению нечетко-множественных оценок для неконтрастных нечетко-множественных эндогенных параметров \tilde{A}^* , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$, \tilde{V}_{jc} модели аэрозольного распыления идеальной несжимаемой охлаждающей жидкости в центробежных форсунках. При этом более эффективным в процессе численной реализации является применение модифицированной альфа-уровневой версии эвристического принципа расширения, для использования которого предварительно осуществляется анализ свойств знакоопределенности частных производных рассматриваемых функциональных отображений в областях их определения при ограничениях (6.15). В результате такого исследования устанавливаются такие свойства:

$$\partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 < 0, \quad \partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c > 0, \quad (6.23)$$

$$\partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} < 0, \quad \partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b > 0,$$

$$\partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c < 0, \quad \partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma > 0;$$

$$\partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 > 0, \quad \partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c < 0, \quad (6.24)$$

$$\partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} > 0, \quad \partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b < 0,$$

$$\partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c > 0, \quad \partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma < 0;$$

$$\partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 > 0, \quad \partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c < 0, \quad (6.25)$$

$$\partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} > 0, \quad \partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b < 0,$$

$$\partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c > 0, \quad \partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma < 0;$$

$$\partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 < 0, \quad \partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c > 0, \quad (6.26)$$

$$\partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} < 0, \quad \partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b > 0,$$

$$\begin{aligned}
& \partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c < 0, \quad \partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma > 0; \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial S_0 > 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial S_c < 0; \quad (6.27) \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial S_{jb} > 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial R_b > 0, \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial R_c < 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial \gamma > 0, \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial P_f > 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial \rho_f < 0.
\end{aligned}$$

На основе оценок (6.23) – (6.27) записываются следующие представления

$$\begin{aligned}
\bar{A}_\alpha^* &= F_{A^*}(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha), \quad \bar{A}_\alpha = F_{A^*}(\underline{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha); \quad (6.28) \\
\bar{\varphi}_\alpha &= F_\varphi(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha), \quad \bar{\varphi}_\alpha = F_\varphi(\bar{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha); \\
\bar{\mu}_\alpha &= F_\mu(\underline{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha), \quad \bar{\mu}_\alpha = F_\mu(\bar{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha); \\
\bar{\beta}_\alpha &= F_\beta(\bar{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha), \quad \bar{\beta}_\alpha = F_\beta(\underline{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha); \\
\underline{V}_{f\alpha} &= F_f(\underline{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha, \underline{P}_{f\alpha}, \bar{\rho}_{f\alpha}), \\
\bar{V}_{f\alpha} &= F_f(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_\alpha, \bar{P}_{f\alpha}, \underline{\rho}_{f\alpha}).
\end{aligned}$$

В альтернативном случае выполнения в областях определения аргументов функций $F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma)$, $F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma)$, $F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma)$, $F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f)$, $F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \lambda)$, ограничения (6.16).

$$\partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 < 0, \quad \partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c > 0, \quad (6.29)$$

$$\partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} > 0, \quad \partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b > 0,$$

$$\partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c < 0, \quad \partial F_{A^*}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma > 0;$$

$$\partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 > 0, \quad \partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c < 0, \quad (6.30)$$

$$\partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} < 0, \quad \partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b < 0,$$

$$\partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c > 0, \quad \partial F_\varphi(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma < 0;$$

$$\partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 > 0, \quad \partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c < 0, \quad (6.31)$$

$$\partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} < 0, \quad \partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b < 0,$$

$$\partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c > 0, \quad \partial F_\mu(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma < 0;$$

$$\partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_0 < 0, \quad \partial F_\beta(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_c > 0, \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned}
& \partial F_{\beta}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial S_{jb} > 0, \quad \partial F_{\beta}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_b > 0, \\
& \partial F_{\beta}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial R_c < 0, \quad \partial F_{\beta}(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma) / \partial \gamma > 0; \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial S_0 > 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial S_c < 0; \quad (6.33) \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial S_{jb} < 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial R_b > 0, \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial R_c < 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial \gamma > 0, \\
& \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial P_f > 0, \quad \partial F_f(S_0, S_c, S_{jb}, R_b, R_c, \gamma, P_f, \rho_f) / \partial \rho_f < 0.
\end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned}
\underline{A}_{\alpha}^* &= F_{A^*}(\underline{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \underline{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \underline{\gamma}_{\alpha}), \quad \bar{A}_{\alpha}^* = F_{A^*}(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_{\alpha}); \quad (6.34) \\
\underline{\varphi}_{\alpha} &= F_{\varphi}(\underline{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \underline{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \underline{\gamma}_{\alpha}), \quad \bar{\varphi}_{\alpha} = F_{\varphi}(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_{\alpha}); \\
\underline{\mu}_{\alpha} &= F_{\mu}(\underline{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \underline{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \underline{\gamma}_{\alpha}), \quad \bar{\mu}_{\alpha} = F_{\mu}(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_{\alpha}); \\
\underline{\beta}_{\alpha} &= F_{\beta}(\underline{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \underline{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \underline{\gamma}_{\alpha}), \quad \bar{\beta}_{\alpha} = F_{\beta}(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_{\alpha}); \\
\underline{V}_{fc\alpha} &= F_f(\underline{S}_{0\alpha}, \underline{S}_{c\alpha}, \underline{S}_{jb\alpha}, \underline{R}_{b\alpha}, \underline{R}_{c\alpha}, \underline{\gamma}_{\alpha}, \underline{P}_{f\alpha}, \underline{\rho}_{f\alpha}), \quad \bar{V}_{fc\alpha} = F_f(\bar{S}_{0\alpha}, \bar{S}_{c\alpha}, \bar{S}_{jb\alpha}, \bar{R}_{b\alpha}, \bar{R}_{c\alpha}, \bar{\gamma}_{\alpha}, \bar{P}_{f\alpha}, \bar{\rho}_{f\alpha}).
\end{aligned}$$

Использование соотношений (6.21), (6.28), (6.34) представляет собой наиболее аффективный вариант процедуры численной реализации нечетко-множественного метода анализа рассматриваемой модели с множеством подлежащих одновременному учету неконтрастных исходных параметров.

Варианты расчетной реализации представленного метода даны для центробежно-струйной форсунки, которая имеет шесть закручивающих винтовых каналов, равномерно расположенных в окружном направлении и имеющих одинаковые геометрические характеристики. В качестве идеальной распыляемой жидкости используется вода. Для экзогенных геометрических параметров, определяющих значение комплекса A^* , в реализуемом исследовании последовательно используются оба вышеописанных варианта фаззификации неконтрастных исходных параметров с переходом к их описаниям в виде нечетких трапецеидальных нечетких интервалов и нечетких гауссовых чисел.

При нечетко-интервальном описании исходных параметров с разбросами, они задаются в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{1b} &= \tilde{d}_{2b} = \dots = \tilde{d}_{6b} = \tilde{d}_b, \quad \tilde{d}_b = (2.91l_*, 2.98l_*, 3.02l_*, 3.08l_*); \\ \tilde{d}_0 &= (4.81l_*, 4.95l_*, 5.03l_*, 5.5l_*); \quad \tilde{d}_c = (3.78l_*, 3.97l_*, 4.03l_*, 4.16l_*); \\ R_b &= (14.96l_*, 14.98l_*, 15.01l_*, 15.07l_*); \quad \tilde{\gamma} = (0.99\gamma_*, 1.05\gamma_*, 1.08\gamma_*, 1.15\gamma_*); \\ \tilde{P}_f &= (3.55P_*, 4.05P_*, 4.46P_*, 5.67P_*); \quad \tilde{\rho}_f = (0.98\rho_*, 1.0\rho_*, 1.04\rho_*, 1.1\rho_*); \\ l_* &= 10^{-3}[\text{м}]; \quad \rho_* = 10^3[\text{кг/м}^3]; \quad P_* = 10^6[\text{Па}]; \quad \gamma_* = 1[\text{рад}]. \end{aligned}$$

Данный вариант задания параметров приводит к расчетным характеристикам

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= (18.17l_*^2, 19.24l_*^2, 19.87l_*^2, 23.57l_*^2); \quad \tilde{S}_c = (11.22l_*^2, 12.38l_*^2, 12.76l_*^2, 13.59l_*^2); \\ \tilde{S}_b &= \tilde{S}_{jb} = (6.65l_*^2, 6.97l_*^2, 7.16l_*^2, 7.45l_*^2); \end{aligned}$$

и отвечает случаю выполнения ограничений (6.15). Результаты расчетов с использованием соотношений (6.21), (6.28) приведены на рисунках 6.1 – 6.4. и описывают вид функций принадлежности для оцениваемых нечетко-множественных эндогенных параметров.

Для случая описания неконтрастных экзогенных параметров нечеткими гауссовыми числами, в расчетах принимается $m_{*S_0} = 19.56l_*^2$, $m_{*S_c} = 12.57l_*^2$, $m_{*S_{jb}} = 7.07l_*^2$, $m_{*R_b} = 15.0l_*$, $m_{*R_c} = 2.0l_*$, $m_{*\gamma} = 1.07\gamma_*$, $m_{*P_f} = 4.26P_*$, $m_{*\rho_f} = 1.02\rho_*$; $\sigma_{*S_0} = 3.912l_*^2$, $\sigma_{*S_c} = 2.514l_*^2$, $\sigma_{*S_{jb}} = 1.414l_*^2$, $\sigma_{*R_b} = 3.0l_*$, $\sigma_{*R_c} = 0.4l_*$, $\sigma_{*\gamma} = 0.214\gamma_*$, $\sigma_{*P_f} = 0.852P_*$, $\sigma_{*\rho_f} = 0.204\rho_*$. Графики функций принадлежности нечетких гауссовых чисел, отвечающих такому варианту задания исходных параметров, приведены на рисунках 6.5 – 6.12. Результаты расчета функций принадлежности для соответствующих нечетко-множественных эндогенных характеристик рассматриваемой модели отражены на рисунках 6.13 – 6.16. Они иллюстрируют показатели степени уверенности в том, что при учете принимаемых уровней погрешностей для величин экзогенных параметров модели соответствующие эндогенные характеристики функционирования форсунки центробежно-струйного типа будут принимать различные значения из интервалов носителей полученных нечетких множеств.

Для рассматриваемой далее модели аэрозольного распыления охлаждающих жидкостей в центробежных форсунках в качестве расчетных эндогенных

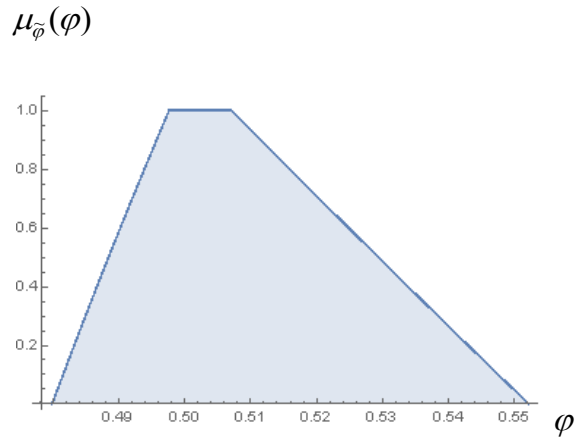
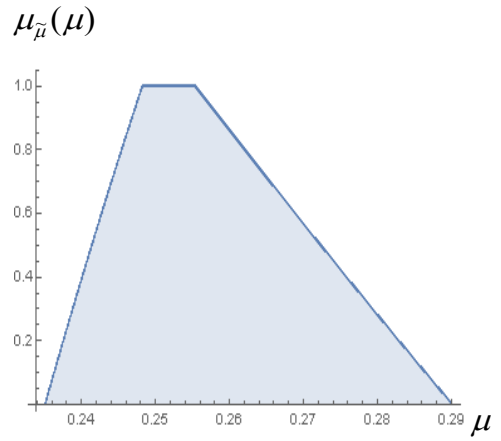
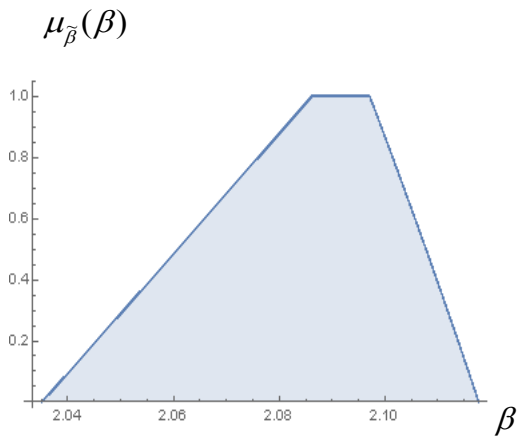
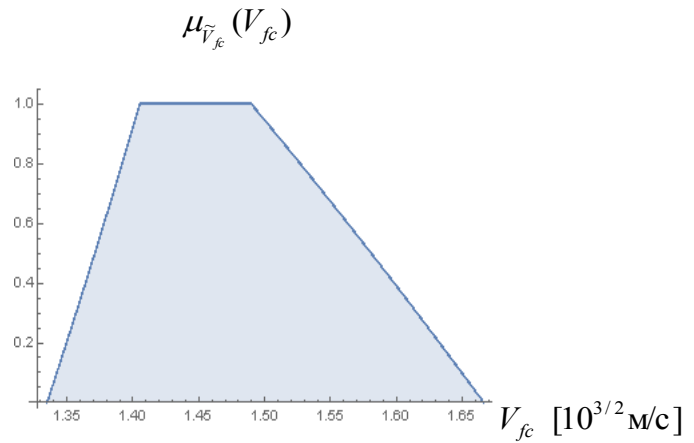
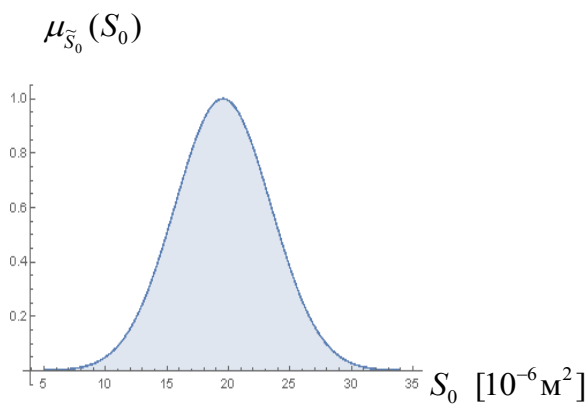
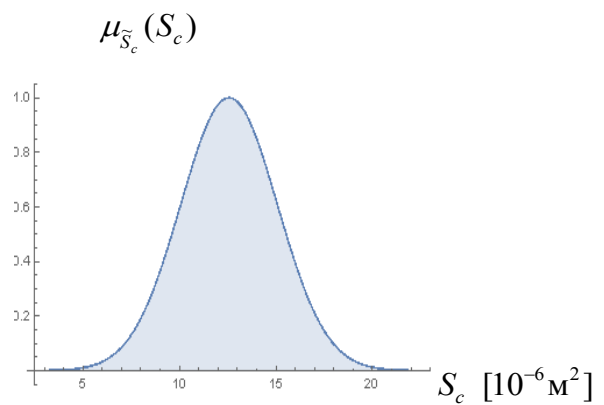
характеристик выступают параметры дисперсности создаваемой аэрозольной среды, угловые параметры факела распыления газокапельной смеси и параметры расхода распыляемой жидкости. В исследованиях также используются описываемые в работах [86, 104, 154, 167, 193, 264] апробированные версии детерминистических моделей течения реальной и идеальной жидкостей в распылителях центробежных форсунок и расчетные схемы для определения эндогенных параметров распыления. Моделирование рабочих процессов распыления в центробежных форсунках также основывается на использовании принципов сохранения момента количества движения и обеспечения максимального расхода жидкости, протекающей через форсунки. Аналогично центробежно-струйным форсункам, для центробежного распылителя параметр расхода жидкости также описывается соотношением, связывающим его с геометрическими характеристиками A или A_v [167, 193, 264]. Полагается, что величина A , которая вводится для случая распыления несжимаемой идеальной жидкости, прямо пропорциональна показателю степени закрутки потока в камере форсунки и выражается формулой

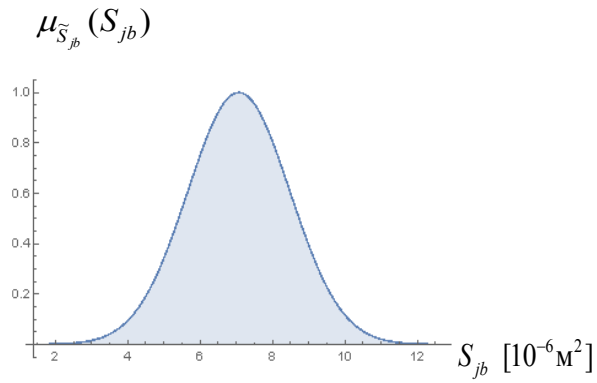
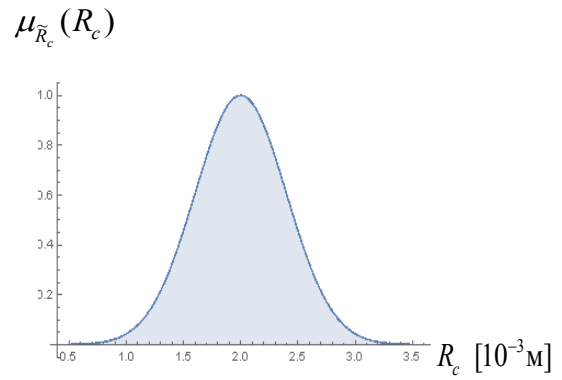
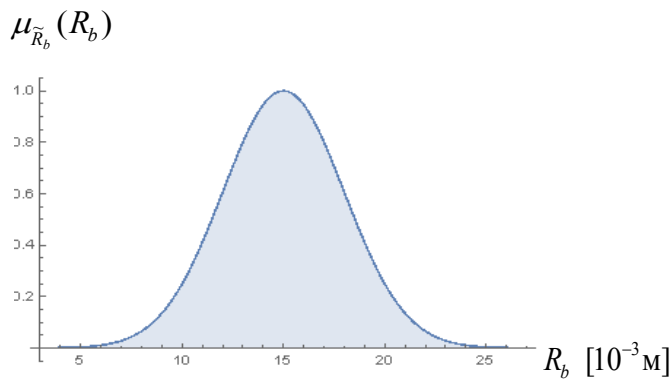
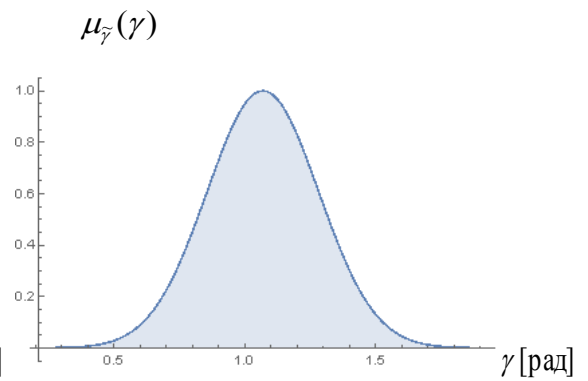
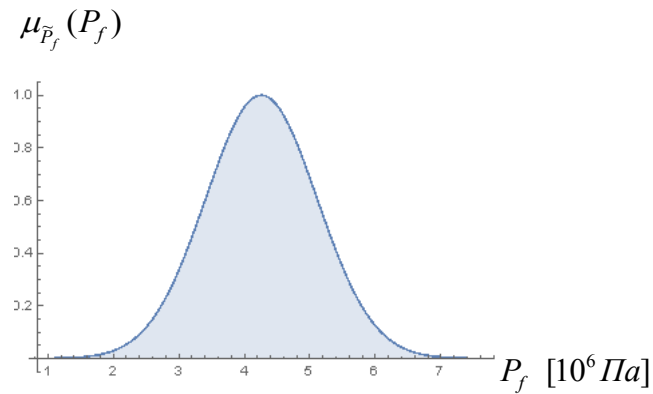
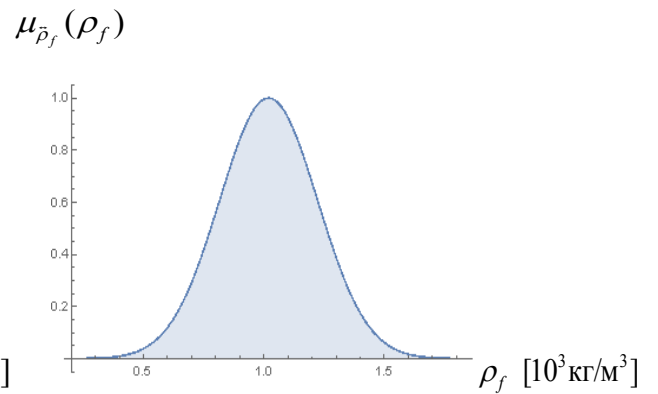
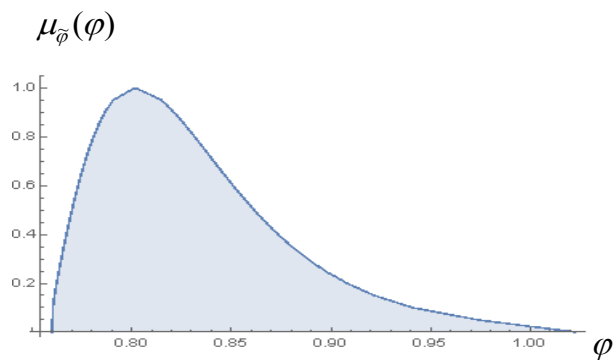
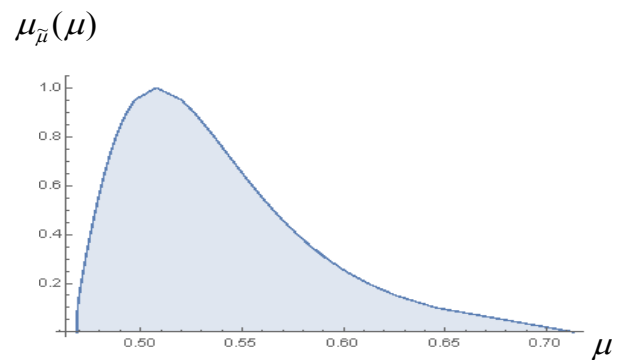
$$A = R_b r_c n_b^{-1} r_b^{-2} \sin \gamma = \pi R_b r_c n_b^{-1} F_b^{-1} \sin \gamma, \quad (6.35)$$

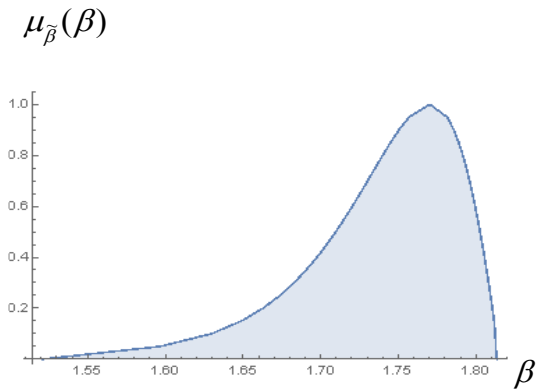
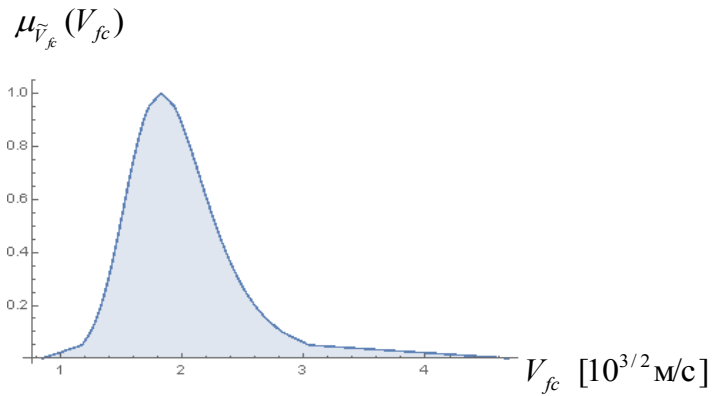
интерпретируемой далее как функциональная зависимость

$$A = F_A(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma). \quad (6.36)$$

Данная геометрическая характеристика однозначно определяет коэффициент расхода охлаждающей жидкой субстанции, а использующая этот параметр методика обеспечивает приемлемую точность вычислений для процессов функционирования форсунок с высокой чистотой обработки поверхности рабочей камеры, имеющих достаточно большие размеры.

Рис. 6.1. Вид функции $\mu_{\bar{\varphi}}(\varphi)$.Рис. 6.2. Вид функции $\mu_{\bar{\mu}}(\mu)$.Рис. 6.3. Вид функции $\mu_{\bar{\beta}}(\beta)$.Рис. 6.4. Вид функции $\mu_{\bar{V}_{fc}}(V_{fc})$.Рис. 6.5. Вид функции $\mu_{\bar{S}_0}(S_0)$.Рис. 6.6. Вид функции $\mu_{\bar{S}_c}(S_c)$.

Рис. 6.7. Вид функции $\mu_{\tilde{S}_{jb}}(S_{jb})$.Рис. 6.8. Вид функции $\mu_{\tilde{R}_c}(R_c)$.Рис. 6.9. Вид функции $\mu_{\tilde{R}_b}(R_b)$.Рис. 6.10. Вид функции $\mu_{\tilde{\gamma}}(\gamma)$.Рис. 6.11. Вид функции $\mu_{\tilde{P}_f}(P_f)$.Рис. 6.12. Вид функции $\mu_{\tilde{\rho}_f}(\rho_f)$.Рис. 6.13. Вид функции $\mu_{\tilde{\varphi}}(\varphi)$.Рис. 6.14. Вид функции $\mu_{\tilde{\mu}}(\mu)$.

Рис. 6.15. Вид функции $\mu_{\beta}(\beta)$.Рис. 6.16. Вид функции $\mu_{V_{fc}}(V_{fc})$.

Вследствие проявлений вязкости реальной жидкости, у стенки распылителя возникают силы трения, снижающие величину момента количества движения в выходном сечении сопла форсунки в сравнении с величиной момента в зоне входа в камеру закручивания [104, 167, 193, 264], что влечет за собой рост коэффициента расхода распыляемой жидкости и уменьшение раствора угла распыления аэрозольной смеси. С целью учета эффектов малой вязкости реальной распыляемой жидкости, согласно [193], вместо характеристики A вводится эквивалентная характеристика

$$A_v = F_{A_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda) = A(\varepsilon_d + \lambda A(R_b / r_c - 1) / 2)^{-1}. \quad (6.37)$$

Соответственно, в соотношениях (6.35) – (6.37) параметрами модифицируемых моделей являются радиус сопла r_c ; число n_b входных каналов с равными площадями поперечных сечений F_b ; плечо закручивания R_b в центробежной форсунке, то есть радиус вращения во входном сечении; угол γ наклона осей входных каналов по отношению к оси сопла форсунки; радиус входных каналов r_b ; коэффициент деформации ε_d струи на входе в камеру закручивания, изменяющийся в диапазоне 0,75–1 [193] в зависимости от величины соотношения r_b / R_b ; условный коэффициент трения λ , связанный эмпирической зависимостью $\lambda \approx 1,05 / (R_e^{0,3})$ с числом Рейнольдса R_e , соответствующим течению жидкости по фиктивному отверстию, имеющему площадь сечения, равную суммарной площади сечений всех входных каналов [167, 193].

Приближенная версия представленных соотношений является корректной и для условного случая неодинаковых входных каналов [167, 193], возможно имеющих некруговые сечения с суммарной общей площадью F_s . Соответственно данному случаю

$$A = \pi R_b r_c F_s^{-1} \sin \gamma, \quad A_v = A(\varepsilon_d + \lambda(R_b^2 / r_s^2 - A) / 2)^{-1}, \quad r_s = (F_s / \pi)^{1/2}. \quad (6.38)$$

Для используемых моделей центробежных форсунок основные эндогенные параметры, включая коэффициент расхода μ распыляемой идеальной охлаждающей жидкости или же охлаждающей жидкой субстанции с малой вязкостью, а также коэффициент заполнения сопла φ , угол факела распыления (угол раствора конусного потока распыляемой охлаждающей жидкости) β определяющим образом зависят от геометрического параметра A и эквивалентного обобщенного геометрического параметра A_v конструкции форсунки [167, 193, 264]. Соответственно, коэффициент расхода μ является отношением величины расхода жидкости, протекающей через отверстие сопла Q_c к величине теоретического расхода Q . Применительно к случаю идеальной жидкости [167, 193] Q_c описывается выражением

$$Q_c = (2P / \rho)^{1/2} (1 + A^2 \varphi^2 (1 - \varphi)^{-2})^{-1/2}, \quad Q = (2P / \rho)^{1/2} \varphi, \quad (6.39)$$

в котором P – давление и ρ – плотность подводимой к форсунке жидкости, а также

$$\mu = (A^2 (1 - \varphi)^{-1} + \varphi^{-2})^{-1/2}. \quad (6.40)$$

При учете малой вязкости жидкости для описания величины μ_v в работе [167] введено соотношение

$$\mu_v = (A_v^2 (1 - \varphi)^{-1} + \varphi^{-2} + \Delta_b + \Delta_k + \Delta_c)^{-1/2}. \quad (6.41)$$

Его параметры Δ_b , Δ_k , Δ_c характеризуют, соответственно, потери для момента количества движения, возникающие при учете сил трения такой жидкости со стенками входных каналов и камеры закручивания, а также вследствие перетекания жидкости из камеры закручивания в сопло форсунки. Связывающие параметры A , μ и коэффициент φ заполнения сопла соотношения

являются следствиями принципа максимума расхода $\partial\mu/\partial\varphi=0$. Применительно к случаю идеальной жидкости они имеют вид

$$A = (1 - \varphi)(\varphi^3 / 2)^{-1/2}, \quad (6.42)$$

$$\mu = F_\mu(R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma) = \varphi(\varphi/(2 - \varphi))^{1/2}. \quad (6.43)$$

Соответственно, характеристика определяется экзогенными геометрическими параметрами модели $R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma, F_s$ и имеет вид минимального действительного корня имеющего положительный дискриминант кубического уравнения

$$A^2\varphi^3 - 2\varphi^2 + 4\varphi - 2 = 0. \quad (6.44)$$

Для определяемой из (6.44) характеристики φ записываются аналитические представления вида

$$\varphi = F_\varphi(A) = F_\varphi(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma) \quad (6.45)$$

$$\varphi = \min\{F_\varphi^{(1)}(A), F_\varphi^{(2)}(A), F_\varphi^{(3)}(A)\}, \quad (6.46)$$

где

$$F_\varphi^{(1)}(A) = \Phi_1(A) + \Phi_2(A) + 2A^{-2}/3, \quad (6.47)$$

$$F_\varphi^{(2)}(A) = -(\Phi_1(A) + \Phi_2(A))/2 + i(3/4)^{1/2}(\Phi_1(A) - \Phi_2(A)) + 2A^{-2}/3,$$

$$F_\varphi^{(3)}(A) = -(\Phi_1(A) + \Phi_2(A))/2 - i(3/4)^{1/2}(\Phi_1(A) - \Phi_2(A)) + 2A^{-2}/3,$$

$$\Phi_1(A) = (-\Delta_1(A))/2 + (((\Delta_2(A))/3)^3 + ((\Delta_1(A))/2)^2)^{1/2})^{1/3},$$

$$\Phi_2(A) = (-\Delta_1(A))/2 - (((\Delta_2(A))/3)^3 + ((\Delta_1(A))/2)^2)^{1/2})^{1/3},$$

$$\Delta_1(A) = -(16/27)A^{-6} + (8/3)A^{-4} - 2A^{-2}, \Delta_2(A) = -(4/3)A^{-4} + 4A^{-2}.$$

Значение параметра угла раскрытия для факела распыления идеальной охлаждающей жидкости соответственно задается выражением

$$\beta = F_\beta(R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma) = \arctg((\varphi/8)^{-1/2}(1 - \varphi)/((1 + (1 - \varphi)^{1/2})\varphi^{1/3})). \quad (6.48)$$

При учете свойства малой вязкости охлаждающей жидкости функциональная зависимость A_v от φ имеет вид, аналогичный соотношению (6.42)

$$A_v = (1 - \varphi)/(\varphi^3 / 2)^{-1/2}, \quad (6.49)$$

а выражение

$$\varphi = F_{\varphi}(A_v) = F_{\varphi v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda) \quad (6.50)$$

сохраняет задаваемую формулами (6.46), (6.47) структуру при замене A на A_v . В свою очередь, характеристика μ_v выражается через величину φ формулой (6.40).

Применение аппарата теории нечетких множеств для описания неконтрастных эндогенных характеристик A , φ , μ , β модели распыления центробежной форсункой идеальной охлаждающей жидкости с учетом разбросов в значениях экзогенных параметров $R_b, r_c, n_b, r_b, \gamma$ предполагает переход к аргументам нечетко-множественной типа в аналитических функциональных представлениях (6.34) – (6.35), (6.43), (6.45) – (6.47), (6.48). При этом вводятся описания экзогенных параметров R_b, r_c, r_b, γ нечетко-множественными величинами $\tilde{R}_b, \tilde{r}_c, \tilde{r}_b, \tilde{\gamma}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{R}_b}(R_b), \mu_{\tilde{r}_c}(r_c), \mu_{\tilde{r}_b}(r_b), \mu_{\tilde{\gamma}}(\gamma)$. В рамках разрабатываемой методики для неконтрастных нечетко-множественных исходных параметров $\tilde{R}_b, \tilde{r}_c, \tilde{r}_b, \tilde{\gamma}$ вводятся описания трапецеидальными нормальными нечеткими интервалами, задаваемыми кортежами реперных точек

$$\tilde{R}_b = (R_1, R_2, R_3, R_4), \quad \tilde{r}_c = (r_{c1}, r_{c2}, r_{c3}, r_{c4}), \quad \tilde{r}_b = (r_{b1}, r_{b2}, r_{b3}, r_{b4}), \quad \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4), \quad (6.51)$$

и суперпозициями α - срезов

$$\tilde{R}_b = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha], \quad \underline{R}_\alpha = (1-\alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1-\alpha)R_4; \quad (6.52)$$

$$\tilde{r}_c = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{r}_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}], \quad \underline{r}_{c\alpha} = (1-\alpha)r_{c1} + \alpha r_{c2}, \quad \bar{r}_{c\alpha} = \alpha r_{c3} + (1-\alpha)r_{c4};$$

$$\tilde{r}_b = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{r}_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}], \quad \underline{r}_{b\alpha} = (1-\alpha)r_{b1} + \alpha r_{b2}, \quad \bar{r}_{b\alpha} = \alpha r_{b3} + (1-\alpha)r_{b4};$$

$$\tilde{\gamma} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\gamma}_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha], \quad \underline{\gamma}_\alpha = (1-\alpha)\gamma_1 + \alpha\gamma_2, \quad \bar{\gamma}_\alpha = \alpha\gamma_3 + (1-\alpha)\gamma_4.$$

Эндогенные нечетко-множественные параметры \tilde{A} , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$ рассматриваемой модели также представляются в форме разложений по множествам α - уровней

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_\alpha, \bar{A}_\alpha], \quad \tilde{\varphi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha], \quad \tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \quad \tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_\alpha, \bar{\beta}_\alpha]. \quad (6.53)$$

Получение представлений для \tilde{A} , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$, в свою очередь, базируется на использовании альфа-уровневой версии модифицированного эвристического принципа расширения в процессе перехода к аргументам нечетко-множественного типа в функциональных аналитических представлениях A , φ , μ , β вида (6.35) – (6.36), (16.43), (6.45), (6.48), полученных при исследовании детерминистического варианта рассматриваемой модели.

Таким образом, для случая распыления центробежной форсункой идеальной несжимаемой охлаждающей жидкости, базирующиеся на представлениях (6.52), (6.53) соотношения алгоритма расчета нечетко-множественных оценок \tilde{A} , $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{\beta}$ с учетом разбросов значений исходных параметров R_b, r_c, r_b, γ имеют вид

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [A_\alpha, \bar{A}_\alpha], \quad \underline{A}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_A(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma), \quad \bar{A}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_A(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma); \quad (6.54)$$

$$\tilde{\varphi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\varphi_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha], \quad \underline{\varphi}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\varphi(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma), \quad \bar{\varphi}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\varphi(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma);$$

$$\tilde{\mu} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\mu_\alpha, \bar{\mu}_\alpha], \quad \underline{\mu}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\mu(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma), \quad \bar{\mu}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\mu(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma);$$

$$\tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\beta_\alpha, \bar{\beta}_\alpha], \quad \underline{\beta}_\alpha = \inf_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\beta(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma), \quad \bar{\beta}_\alpha = \sup_{\substack{R_b \in [R_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ r_c \in [r_{c\alpha}, \bar{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [r_{b\alpha}, \bar{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\gamma_\alpha, \bar{\gamma}_\alpha]}} F_\beta(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma).$$

В случае модели учета эффектов малой вязкости для распыляемой реальной охлаждающей жидкости алгоритм формирования нечетко-множественных оценок для эндогенных параметров оценок при учете разбросов исходных характеристик $R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda$ включает все приведенные ранее соотношения, в которых характеристика A подлежит замене на A_v , а также учитываются дополнительные,

представляемые кортежами реперных значений $\tilde{\varepsilon}_d = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$, $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ нечетко-интервальные экзогенные параметры с разложениями по α - срезам

$$\tilde{\varepsilon}_d = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha], \quad \underline{\varepsilon}_\alpha = (1-\alpha)\varepsilon_1 + \alpha\varepsilon_2, \quad \overline{\varepsilon}_\alpha = \alpha\varepsilon_3 + (1-\alpha)\varepsilon_4; \quad (6.55)$$

$$\tilde{\lambda} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha], \quad \underline{\lambda}_\alpha = (1-\alpha)\lambda_1 + \alpha\lambda_2, \quad \overline{\lambda}_\alpha = \alpha\lambda_3 + (1-\alpha)\lambda_4. \quad (6.56)$$

Функциональная зависимость между A_v и φ сохраняет вид (6.42). В итоге, для эндогенных параметров данной версии модели распыления охлаждающей жидкости расчетные соотношения принимают форму:

$$\tilde{A}_v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{A}_{v\alpha}, \overline{A}_{v\alpha}], \quad (6.57)$$

$$\underline{A}_{v\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{A_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda), \quad \overline{A}_{v\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{A_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda);$$

$$\tilde{\varphi}_v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{v\alpha}, \overline{\varphi}_{v\alpha}],$$

$$\underline{\varphi}_{v\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{\varphi_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda), \quad \overline{\varphi}_{v\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{\varphi_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda);$$

$$\tilde{\beta}_v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\beta}_{v\alpha}, \overline{\beta}_{v\alpha}],$$

$$\underline{\beta}_{v\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{\beta_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda), \quad \overline{\beta}_{v\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{\beta_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda);$$

$$\tilde{\mu}_v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mu}_{v\alpha}, \overline{\mu}_{v\alpha}],$$

$$\underline{\mu}_{v\alpha} = \inf_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{\mu_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda), \quad \overline{\mu}_{v\alpha} = \sup_{\substack{R_b \in [\underline{R}_\alpha, \overline{R}_\alpha] \\ r_c \in [\underline{r}_{c\alpha}, \overline{r}_{c\alpha}] \\ r_b \in [\underline{r}_{b\alpha}, \overline{r}_{b\alpha}] \\ \gamma \in [\underline{\gamma}_\alpha, \overline{\gamma}_\alpha] \\ \varepsilon_d \in [\underline{\varepsilon}_\alpha, \overline{\varepsilon}_\alpha] \\ \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \overline{\lambda}_\alpha]}} F_{\mu_v}(R_b, r_c, r_b, n_b, \gamma, \varepsilon_d, \lambda).$$

Рассчитываемые характеристики позволяют оценивать степени уверенности в том, что представленные эндогенные параметры рассматриваемой модели аэрозольного распыления идеальной охлаждающей жидкости либо охлаждающей жидкости малой вязкости с использованием центробежных форсунок будут иметь различные значения из интервалов носителей соответствующих нечетких множеств в случае учета оговариваемых уровней погрешностей для расчетных значений исходных параметров модели.

В представляемых вариантах численных исследований, осуществленных с применением разработанных программных приложений для реализации описанных расчетных алгоритмов, рассматривается анализ модели распыления идеальной охлаждающей жидкости. Исследуется конструкция центробежной форсунки, имеющей шесть входных каналов ($n_b = 6$) со следующими нечетко-интервальными разбросами величин конструктивных параметров:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_b &= (32.7l_*, 33l_*, 34l_*, 34.4l_*), \quad \tilde{\gamma} = (0.97\gamma_*, 0.99\gamma_*, \gamma_*, 1.02\gamma_*), \\ \tilde{r}_c &= (0.96l_*, 0.99l_*, 1l_*, 1.03l_*), \quad \tilde{r}_b = (1.7l_*, 1.9l_*, 2l_*, 2.1l_*), \quad l_* = 10^{-3}[\text{м}], \quad \gamma_* = \pi/6. \end{aligned}$$

Получаемые в результате расчетов профили функций принадлежности для эндогенных нечетко-множественных характеристик коэффициента заполнения сопла $\tilde{\varphi}$, угла факела распыления $\tilde{\beta}$ и коэффициента расхода распыляемой идеальной охлаждающей жидкости $\tilde{\mu}$, описываемые соотношениями (6.57), представлены на рисунках 6.17 – 6.19. На основании анализа расчетных результатов можно заключить, что разбросы эндогенных параметров составляют $\approx 3.5\%$ для характеристики φ ; $\approx 3.9\%$ для характеристики μ ; $\approx 2.3\%$ для характеристики β по отношению к средним значениям на интервалах носителей соответствующих нечетких множеств

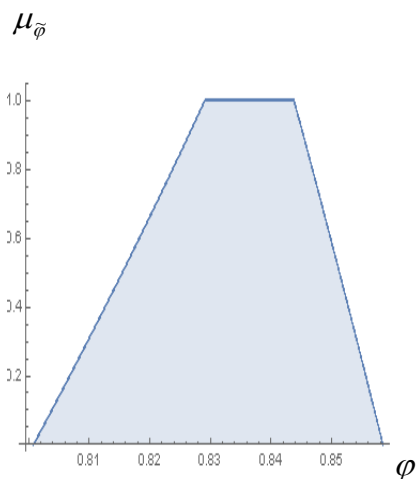


Рис. 6.17. Вид функции принадлежности для $\tilde{\varphi}$.

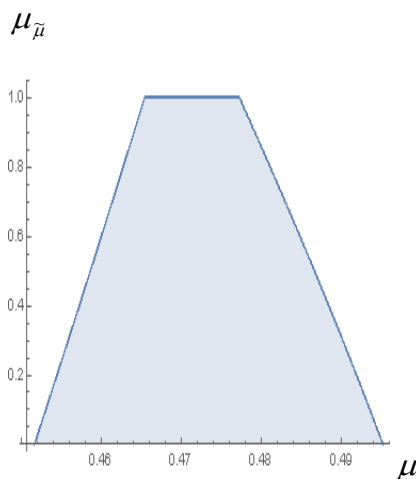


Рис. 6.18. Вид функции принадлежности для $\tilde{\mu}$.

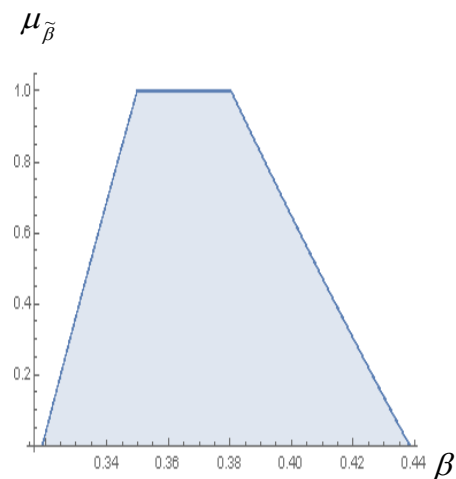


Рис. 6.19. Вид функции принадлежности для $\tilde{\beta}$.

6.2. Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании процессов распада струи жидкости в пневматических и дисковидных распылителях

Пневматически и дисковидные распылители также представляют собой широко распространенный тип устройств в системах термостабилизации с использованием воздушно-капельных, газочапельных аэрозольных смесей. Принципиальная технологическая конструктивная схема функционирования рассматриваемой модели пневматического распылителя охарактеризована на рис. 6.20 – 6.23. Моделируемый процесс распада струи включает первичную фазу формирования жидкостной пленки в результате равномерного растекания поступающей из четырех отверстий с малым диаметром Δ_4 в мембране распылителя охлаждающей жидкости по внутренней цилиндрической поверхности диаметра Δ_1 . В результате создается цилиндрический слой жидкости, имеющий длину L_4 вдоль образующей, внешний диаметр Δ_1 и внутренний диаметр

$$\Delta_2 = (\Delta_1^2 - 4\Delta_4^2)^{1/2}. \quad (6.58)$$

Скорость движения жидкости V_L в описанном пристеночном слое в случае

задания параметра Q_0 расхода охлаждающей жидкости на входе в распылитель описывается выражением

$$V_L = Q_0 / (\pi \Delta_4^2), \quad \Delta_4 = ((\Delta_1^2 - \Delta_2^2) / 4)^{1/2}. \quad (6.59)$$

Моделирование процессов распада и капельного дробления охлаждающей жидкости в пристеночном слое на этапе схода с поверхности длины L_4 и происходящего смешивания с газовым потоком газа реализуется на основе использования модифицированного параметра Вебера We_1 [11–12, 214, 268, 306, 330], описываемого представлением

$$We_1 = \Delta_d V_g^2 \rho_f \alpha^{-1}. \quad (6.60)$$

Параметрами представления (6.60) являются диаметр капель распадающегося пристеночного слоя Δ_d [мкм], относительная скорость обтекающей капли газа V_g [м/с], плотность вязкой распыляемой жидкости ρ_f [кг/м³], а также коэффициент поверхностного натяжения α [Н/м²].

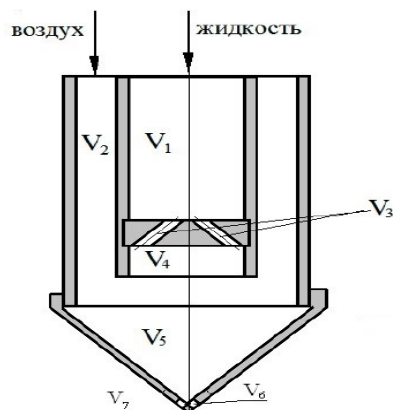


Рис. 6.20. Конструктивная схема распылителя [214].

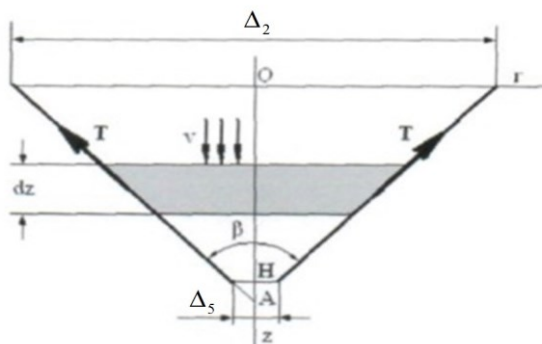


Рис. 6.21. Описание моделируемых процессов в конической зоне распылителя [214].

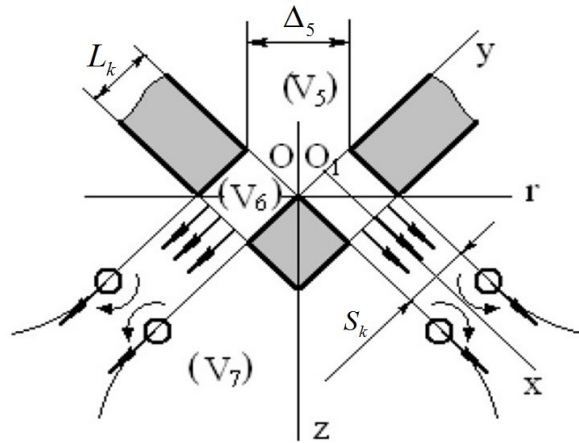


Рис. 6.22. Параметры и конструктивная схема распылительной головки пневматической форсунки [214].

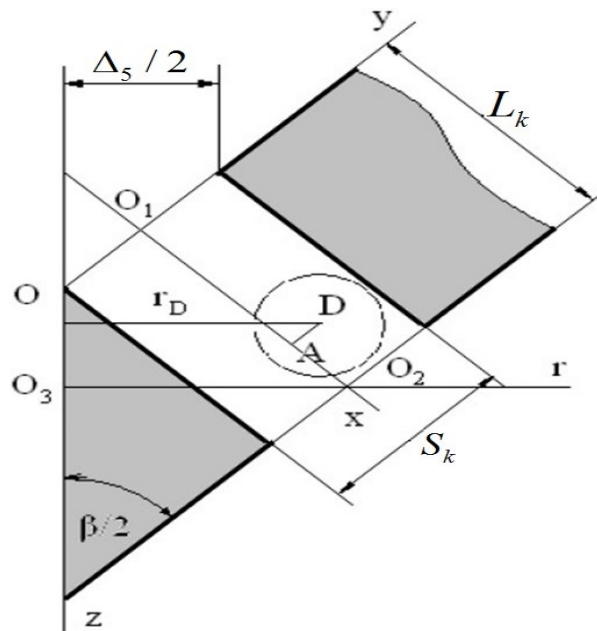


Рис. 6.23. Геометрические параметры канала распылительной головки пневматической форсунки [214].

Параметрами представления (6.60) являются диаметр каплей распадающегося пристеночного слоя Δ_d [мкм], относительная скорость обтекающего капли газа V_g [м/с], плотность вязкой распыляемой жидкости ρ_f [кг/м³], а также коэффициент поверхностного натяжения α [Н/м²]. Градация эффектов каплеобразования в

процессе распадаения пристеночного потока осуществляется на основе введения характеристик

$$We_{1*} = 5(1 + (3/2)L_p^{-0.37}), \quad We_{1**} = 15, \quad We_{1***} = 2L_p^{1/3}, \quad (6.61)$$

выражаемых через параметр Лапласа

$$L_p = \Delta_d \rho_f \mu_f^{-2} \alpha. \quad (6.62)$$

Здесь μ_f – коэффициент вязкости жидкости. На основе трех вариантов оценки значений We_1

$$We_{1*} < We_1 < We_{1**}, \quad We_{1**} < We_1 < We_{1***}, \quad We_{1***} < We_1, \quad (6.63)$$

выделяются также три варианта режимов капельного дробления.

При моделировании динамических процессов для капельной смеси в конической подобласти пневматического распылителя, рассматриваемая смесь интерпретируется как баротропная однородная (однокомпонентная) среда [214], характеризующаяся усредненными по сечениям области в виде усеченного конуса с углом раствора β , высотой h и диаметрами оснований Δ_2 , Δ_5 параметрами плотности ρ_c и осевой скорости V_c . В данной среде параметр давления p_c описывается приведенным уравнением состояния

$$p_c = \rho_c \chi_c, \quad (6.64)$$

где χ_c – феноменологический экспериментально определяемый коэффициент.

Характеристики объемного R_v и массового R_m расходов газочапельной аэрозольной смеси, параметры усредненной плотности ρ_{c0} и средней барицентрической скорости V_{c0} смеси на входе в коническую подобласть пневматического распылителя определяются параметрами плотности ρ_{0g} и скорости V_{0g} газа, а также плотности ρ_f и скорости V_{0f} жидкостной компоненты на основе соотношений

$$R_v = (\pi/4)((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)V_{0g} + \Delta_1^2 V_{0f}), \quad (6.65)$$

$$R_m = (\pi/4)((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g} + \Delta_1^2 \rho_f V_{0f}), \quad (6.66)$$

$$\rho_{c0} = ((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g} + \Delta_1^2 \rho_f V_{0f}) / ((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)V_{0g} + \Delta_1^2 V_{0f}), \quad (6.67)$$

$$V_{c0} = ((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g}^2 + \Delta_1^2\rho_fV_{0f}^2)/((\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g} + \Delta_1^2\rho_fV_{0f}). \quad (6.68)$$

Далее в модели учитывается, что поток газочапельной смеси после прохождения меньшего сечения конической подобласти достигает зоны распылительной головки, а затем вытекает через кольцевое отверстие в нижней конусной части пневматического распылителя.

На этой фазе процесса функционирования распылителя моделируемыми характеристиками являются параметры скорости истечения газочапельной аэрозольной смеси на выходе из кольцевого отверстия V_k и расхода смеси R_k , соответственно описываемые соотношениями

$$V_k = F_V(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta) = 3V_{0k}\Delta_5L_k^2[4S_k(3\Delta_5L_k^2 + 6L_k^3 \cos(\beta/2) - S_k^2\Delta_5 + 2S_k^2L_k \cos(\beta/2))]^{-1}, \quad (6.69)$$

$$R_k = F_R(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta) = 2\pi V_k[\Delta_5 S_k / 2 + L_k S_k \cos(\beta/2) - (\Delta_5 / 2 + L_k \cos(\beta/2))(S_k^3 / (3L_k^2))].$$

Аргументами функциональных соотношений (6.65)–(6.69), наряду с описанными ранее, являются параметры радиальной ширины кольцевого отверстия распылительной головки S_k и толщины стенки конструкции распылительной головки L_k .

Величина V_{0k} в представлениях (6.69) является [214] параметром скорости $V(h)$ аэрозольного газочапельного потока при прохождении нижнего сечения конусной части области его накапливания, имеющего диаметр Δ_5 . Она определяется с применением интерполяционной эмпирической зависимости $V^*(h)$, аппроксимирующей получаемое численными методами решение $V(z)$ $z \in [0, h]$ начальной задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, имеющей вид

$$V'(z) = -[(\lambda\rho(z)V^2(z))/(2\Delta(z)) + (16tg(\beta/2)C_0\chi_c)/(\pi\Delta^3(z)V^2(z))] \cdot$$

$$\cdot [\rho(z)V(z) - (4C_0\chi_c(\pi\Delta^2(z)V^2(z))^{-1})^{-1}], \quad V(0) = V_{c0},$$

где $C_0 = \pi\Delta_2^2\rho_{c0}V_{c0}$, $\Delta(z) = \Delta_5 + 2(h-z)tg(\beta/2)$, а величины ρ_{c0} , V_{c0} определяются соотношениями (6.67), (6.68).

В рамках разрабатываемой с целью учета высокой степени неконтрастности экзогенных параметров рассматриваемой модели методики получения нечетко-

множественных оценок основных эндогенных параметров функционирования распылителя, для имеющих разбросы значений исходных физико-механических и геометрических параметров вводятся представления в виде нормальных трапецеидальных нечетких интервалов. Для диаметра внутренней цилиндрической поверхности трубки Δ_1 и диаметров отверстий в мембране распылителя Δ_4 вводятся нечетко-интервальные расширения

$$\tilde{\Delta}_1 = (\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}), \quad \tilde{\Delta}_4 = (\Delta_{41}, \Delta_{42}, \Delta_{43}, \Delta_{44}). \quad (6.72)$$

Далее с учетом свойств

$$\partial\Delta_2/\partial\Delta_1 > 0, \quad \partial\Delta_2/\partial\Delta_4 < 0, \quad (6.73)$$

определяется следующая из (6.58) нечетко-множественная оценка для внутреннего диаметра Δ_2 растекающегося цилиндрического слоя жидкости вдоль образующей трубки

$$\tilde{\Delta}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Delta}_{2\alpha}, \bar{\Delta}_{2\alpha}], \quad \underline{\Delta}_{2\alpha} = (\underline{\Delta}_{1\alpha}^2 - 4\bar{\Delta}_{4\alpha}^2)^{1/2}, \quad \bar{\Delta}_{2\alpha} = (\bar{\Delta}_{1\alpha}^2 - 4\underline{\Delta}_{4\alpha}^2)^{1/2}, \quad (6.74)$$

$$\underline{\Delta}_{1\alpha} = (1-\alpha)\Delta_{11} + \alpha\Delta_{12}, \quad \bar{\Delta}_{1\alpha} = \alpha\Delta_{13} + (1-\alpha)\Delta_{14}, \quad \underline{\Delta}_{4\alpha} = (1-\alpha)\Delta_{41} + \alpha\Delta_{42}, \quad \bar{\Delta}_{4\alpha} = \alpha\Delta_{43} + (1-\alpha)\Delta_{44}.$$

На основе задания учитывающего разбросы возможных значений нечетко-интервального исходного параметра объемного расхода жидкости на входе в распылитель $\tilde{Q}_0 = (Q_{01}, Q_{02}, Q_{03}, Q_{04})$, а также с учетом свойств

$$\partial V_L/\partial Q_0 > 0, \quad \partial\Delta_2/\partial\Delta_4 < 0, \quad (6.75)$$

находится представление для нечетко-множественной характеристики скорости V_L движения жидкости в пристеночном слое

$$\tilde{V}_L = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{L\alpha}, \bar{V}_{L\alpha}], \quad V_{L\alpha} = \underline{Q}_{0\alpha} / (\pi \bar{\Delta}_{4\alpha}^2), \quad \bar{V}_{L\alpha} = \bar{Q}_{0\alpha} / (\pi \underline{\Delta}_{4\alpha}^2), \quad (6.76)$$

$$\underline{Q}_{0\alpha} = (1-\alpha)Q_{01} + \alpha Q_{02}, \quad \bar{Q}_{0\alpha} = \alpha Q_{03} + (1-\alpha)Q_{04}.$$

Соответственно, при введении нечетко-интервальных экзогенных параметров

$$\tilde{\Delta}_d = (\Delta_{d1}, \Delta_{d2}, \Delta_{d3}, \Delta_{d4}), \quad \tilde{V}_g = (V_{g1}, V_{g2}, V_{g3}, V_{g4}), \quad \tilde{V}_g = (V_{g1}, V_{g2}, V_{g3}, V_{g4}), \quad (6.77)$$

$$\tilde{\rho}_g = (\rho_{g1}, \rho_{g2}, \rho_{g3}, \rho_{g4}), \quad \tilde{\rho}_f = (\rho_{f1}, \rho_{f2}, \rho_{f3}, \rho_{f4}), \quad \tilde{\alpha} = (\alpha_{p1}, \alpha_{p2}, \alpha_{p3}, \alpha_{p4}), \quad \tilde{\mu}_f = (\mu_{f1}, \mu_{f2}, \mu_{f3}, \mu_{f4})$$

и с учетом оценок

$$\partial We_1/\partial\Delta_d > 0, \quad \partial We_1/\partial V_g > 0, \quad \partial We_1/\partial\rho_f > 0, \quad \partial We_1/\partial\alpha < 0, \quad (6.78)$$

нечетко-множественная модификация соотношения (6.60) для определения эндогенного параметра $\tilde{W}e_1$ может быть представлена в виде

$$\tilde{W}e_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [We_{1\alpha}, \overline{W}e_{1\alpha}], \quad \underline{W}e_{1\alpha} = \underline{\Delta}_{d\alpha} \underline{V}_{g\alpha}^2 \underline{\rho}_{g\alpha} \underline{\alpha}_\alpha^{-1}, \quad \overline{W}e_{1\alpha} = \overline{\Delta}_{d\alpha} \overline{V}_{g\alpha}^2 \overline{\rho}_{g\alpha} \overline{\alpha}_\alpha^{-1}, \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{d\alpha} &= (1-\alpha)\Delta_{d1} + \alpha\Delta_{d2}, \quad \overline{\Delta}_{d\alpha} = \alpha\Delta_{d3} + (1-\alpha)\Delta_{d4}; \quad \underline{V}_{g\alpha} = (1-\alpha)V_{g1} + \alpha V_{g2}, \quad \overline{V}_{g\alpha} = \alpha V_{g3} + (1-\alpha)V_{g4}; \\ \underline{\rho}_{f\alpha} &= (1-\alpha)\rho_{f1} + \alpha\rho_{f2}, \quad \overline{\rho}_{f\alpha} = \alpha\rho_{f3} + (1-\alpha)\rho_{f4}; \quad \underline{\alpha}_\alpha = (1-\alpha)\alpha_{p1} + \alpha\alpha_{p2}, \quad \overline{\alpha}_\alpha = \alpha\alpha_{p3} + (1-\alpha)\alpha_{p4}. \end{aligned}$$

Далее определяется нечетко-множественный параметр Лапласа

$$\tilde{L}_p = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [L_{p\alpha}, \overline{L}_{p\alpha}], \quad \underline{L}_{p\alpha} = \underline{\Delta}_{d\alpha} \underline{\rho}_{f\alpha} \underline{\mu}_{f\alpha}^{-2} \underline{\alpha}_\alpha, \quad \overline{L}_{p\alpha} = \overline{\Delta}_{d\alpha} \overline{\rho}_{f\alpha} \overline{\mu}_{f\alpha}^{-2} \overline{\alpha}_\alpha, \quad (6.80)$$

и записываются нечетко-множественные версии представлений (6.61)

$$\tilde{W}e_{1*} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [We_{1*\alpha}, \overline{W}e_{1*\alpha}], \quad \underline{W}e_{1*\alpha} = 5(1 + (3/2)\underline{L}_{p\alpha}^{-0,37}), \quad \overline{W}e_{1*\alpha} = 5(1 + (3/2)\overline{L}_{p\alpha}^{-0,37}); \quad (6.81)$$

$$\tilde{W}e_{1***} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [We_{1***\alpha}, \overline{W}e_{1***\alpha}], \quad \underline{W}e_{1***\alpha} = 2\underline{L}_{p\alpha}^{1/3}, \quad \overline{W}e_{1***\alpha} = 2\overline{L}_{p\alpha}^{1/3}. \quad (6.82)$$

Предусмотренное в рассматриваемой методике анализа модели функционирования пневматического распылителя ранжирование по схеме (6.62), в рамках разрабатываемого нечетко-множественного подхода трансформируется в процедуру сравнения параметров дефаззификации нечетких множеств $\tilde{W}e_1$, $\tilde{W}e_{1*}$, $\tilde{W}e_{1***}$ по методу медиан [296, 348, 354] или в какую-либо иную процедуру сопоставления нечетких множеств [103, 284, 287].

Обобщенные нечетко-множественные версии представлений (6.65) – (6.68) на основе модификации соотношений (6.66) – (6.68)

$$R_m = R_{mg} + R_{mf}, \quad R_{mg} = (\pi/4)(\Delta_2^2 - \Delta_1^2)\rho_{0g}V_{0g}, \quad R_{mf} = (\pi/4)\Delta_1^2\rho_{0f}V_{0f}; \quad (6.83)$$

$$\rho_{c0} = R_m / R_v; \quad V_{c0} = (R_{mg}V_{0g} + R_{mf}V_{0f}) / R_m,$$

а также с учетом также свойств

$$\partial R_v / \partial V_{0g} < 0, \quad \partial R_v / \partial V_{0f} > 0, \quad \partial R_v / \partial \Delta_2 > 0, \quad \partial R_v / \partial \Delta_1 < 0; \quad (6.84)$$

$$\partial R_m / \partial V_{0g} < 0, \quad \partial R_m / \partial V_{0f} > 0, \quad \partial R_m / \partial \Delta_2 > 0, \quad \partial R_m / \partial \Delta_1 > 0, \quad \partial R_m / \partial \rho_{0g} < 0, \quad \partial R_m / \partial \rho_{0f} > 0,$$

и реализующихся в пределах рассматриваемых разбросов априорных оценок $V_{0g} > V_{0f}$, $V_{0g}\rho_{0g} < V_{0f}\rho_{0f}$, записываются в форме

$$\tilde{R}_v = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{v\alpha}, \bar{R}_{v\alpha}], \quad (6.85)$$

$$\underline{R}_{v\alpha} = (\pi/4)((\underline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \bar{\Delta}_{1\alpha}^2)\bar{V}_{0g\alpha} + \bar{\Delta}_{1\alpha}^2 \underline{V}_{0f\alpha}), \bar{R}_{v\alpha} = (\pi/4)((\bar{\Delta}_{2\alpha}^2 - \underline{\Delta}_{1\alpha}^2)\underline{V}_{0g\alpha} + \underline{\Delta}_{1\alpha}^2 \bar{V}_{0f\alpha});$$

$$\tilde{R}_m = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{m\alpha}, \bar{R}_{m\alpha}], \quad (6.86)$$

$$\underline{R}_{m\alpha} = (\pi/4)((\underline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \underline{\Delta}_{1\alpha}^2)\bar{\rho}_{0g\alpha} \bar{V}_{0g\alpha} + \underline{\Delta}_{1\alpha}^2 \underline{\rho}_{0f\alpha} \underline{V}_{0f\alpha}), \bar{R}_{m\alpha} = (\pi/4)((\bar{\Delta}_{2\alpha}^2 - \bar{\Delta}_{1\alpha}^2)\underline{\rho}_{0g\alpha} \underline{V}_{0g\alpha} + \bar{\Delta}_{1\alpha}^2 \bar{\rho}_{0f\alpha} \bar{V}_{0f\alpha}).$$

При записи соотношений (6.85) – (6.86) используются не вводившиеся ранее нечетко-интервальные экзогенные параметры

$$\tilde{V}_{0g} = (V_{0g1}, V_{0g2}, V_{0g3}, V_{0g4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{0g\alpha}, \bar{V}_{0g\alpha}], \underline{V}_{0g\alpha} = (1-\alpha)V_{0g1} + \alpha V_{0g2}, \bar{V}_{0g\alpha} = \alpha V_{0g3} + (1-\alpha)V_{0g4};$$

$$\tilde{V}_{0f} = (V_{0f1}, V_{0f2}, V_{0f3}, V_{0f4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{V}_{0f\alpha}, \bar{V}_{0f\alpha}], \underline{V}_{0f\alpha} = (1-\alpha)V_{0f1} + \alpha V_{0f2}, \bar{V}_{0f\alpha} = \alpha V_{0f3} + (1-\alpha)V_{0f4};$$

$$\tilde{\rho}_{0f} = (\rho_{0f1}, \rho_{0f2}, \rho_{0f3}, \rho_{0f4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0f\alpha}, \bar{\rho}_{0f\alpha}], \underline{\rho}_{0f\alpha} = (1-\alpha)\rho_{0f1} + \alpha\rho_{0f2}, \bar{\rho}_{0f\alpha} = \alpha\rho_{0f3} + (1-\alpha)\rho_{0f4};$$

$$\tilde{\rho}_{0g} = (\rho_{0g1}, \rho_{0g2}, \rho_{0g3}, \rho_{0g4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\rho}_{0g\alpha}, \bar{\rho}_{0g\alpha}], \underline{\rho}_{0g\alpha} = (1-\alpha)\rho_{0g1} + \alpha\rho_{0g2}, \bar{\rho}_{0g\alpha} = \alpha\rho_{0g3} + (1-\alpha)\rho_{0g4}.$$

На основе использования нечетко-множественных выражений

$$\tilde{R}_{mf} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{mf\alpha}, \bar{R}_{mf\alpha}], \underline{R}_{mf\alpha} = (\pi/4)(\underline{\Delta}_{1\alpha}^2 \underline{\rho}_{0f\alpha} \underline{V}_{0f\alpha}), \bar{R}_{mf\alpha} = (\pi/4)(\bar{\Delta}_{1\alpha}^2 \bar{\rho}_{0f\alpha} \bar{V}_{0f\alpha}); \quad (6.87)$$

$$\tilde{R}_{mg} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{mg\alpha}, \bar{R}_{mg\alpha}], \underline{R}_{mg\alpha} = (\pi/4)((\underline{\Delta}_{2\alpha}^2 - \bar{\Delta}_{1\alpha}^2)\bar{\rho}_{0g\alpha} \bar{V}_{0g\alpha}), \bar{R}_{mg\alpha} = (\pi/4)((\bar{\Delta}_{2\alpha}^2 - \underline{\Delta}_{1\alpha}^2)\underline{\rho}_{0g\alpha} \underline{V}_{0g\alpha}),$$

могут быть также записаны представления

$$\tilde{\rho}_{c0} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{m\alpha} / \bar{R}_{v\alpha}, \bar{R}_{m\alpha} / \underline{R}_{v\alpha}], \quad (6.88)$$

$$\tilde{V}_{c0} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [(\underline{R}_{mg\alpha} \underline{V}_{0g\alpha} + \underline{R}_{mf\alpha} \underline{V}_{0f\alpha}) / \bar{R}_{m\alpha}, (\bar{R}_{mg\alpha} \bar{V}_{0g\alpha} + \bar{R}_{mf\alpha} \bar{V}_{0f\alpha}) / \underline{R}_{m\alpha}].$$

В свою очередь, с учетом оценок

$$\partial F_R(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta) / \partial V_{0k} > 0, \quad \partial F_V(V_{0k}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta) / \partial V_{0k} > 0, \quad (6.89)$$

и с введением нечетко-интервальных интерпретаций для неконтрастных экзогенных параметров $\tilde{V}_{k0} = (V_{k01}, V_{k02}, V_{k03}, V_{k04})$, $\tilde{\Delta}_5 = (\Delta_{51}, \Delta_{52}, \Delta_{53}, \Delta_{54})$,

$\tilde{S}_k = (S_{k1}, S_{k2}, S_{k3}, S_{k4})$, $\tilde{L}_k = (L_{k1}, L_{k2}, L_{k3}, L_{k4})$, характеризующих, соответственно, вариации скоростей аэрозольного потока V_{0k} в нижнем сечении в конусной части зоны его

накапливания и разбросы в значении диаметра Δ_5 этого сечения, разбросы радиальной ширины S_k кольцевого отверстия и вариации толщины L_k стенки в конструкции распылительной головки, могут быть записаны нечетко-множественные обобщения соотношений (6.69) для определения параметров расхода и скорости истечения газожидкостной аэрозольной смеси на выходе из кольцевого отверстия головки форсунки, полученные при анализе детерминистической версии рассматриваемой модели:

$$\tilde{R}_k(\beta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [R_{k\alpha}(\beta), \bar{R}_{k\alpha}(\beta)], \quad (6.90)$$

$$R_{k\alpha}(\beta) = \inf_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \bar{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \bar{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \bar{L}_{k\alpha}]}} \{F_R(\underline{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta)\}, \quad \bar{R}_{k\alpha}(\beta) = \sup_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \bar{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \bar{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \bar{L}_{k\alpha}]}} \{F_R(\bar{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta)\};$$

$$\tilde{V}_k(\beta) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [V_{k\alpha}(\beta), \bar{V}_{k\alpha}(\beta)], \quad (6.91)$$

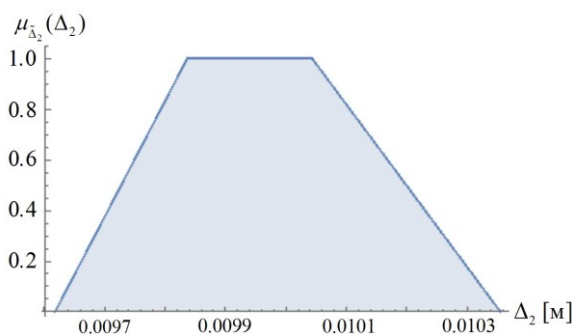
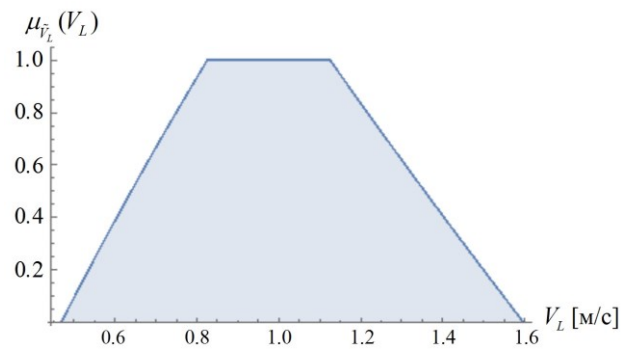
$$V_{k\alpha}(\beta) = \inf_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \bar{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \bar{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \bar{L}_{k\alpha}]}} \{F_V(\underline{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta)\}, \quad \bar{V}_{k\alpha}(\beta) = \sup_{\substack{\Delta_5 \in [\underline{\Delta}_{5\alpha}, \bar{\Delta}_{5\alpha}] \\ S_k \in [\underline{S}_{k\alpha}, \bar{S}_{k\alpha}] \\ L_k \in [\underline{L}_{k\alpha}, \bar{L}_{k\alpha}]}} \{F_V(\bar{V}_{k0\alpha}, \Delta_5, S_k, L_k, \beta)\};$$

$$\underline{V}_{k0\alpha} = (1-\alpha)V_{k01} + \alpha V_{k02}, \quad \bar{V}_{k0\alpha} = \alpha V_{k03} + (1-\alpha)V_{k04}. \quad (6.92)$$

Пример расчетов с использованием предложенного метода и разработанного для его реализации программного приложения дается применительно к варианту рассматриваемой модели аэрозольного распыления охлаждающей жидкости в пневматической форсунке со следующей совокупностью задаваемых исходных нечетко-интервальных параметров:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= (98l_*, 100l_*, 102l_*, 105l_*), \tilde{\Delta}_4 = (8.7l_*, 8.9l_*, 9.0l_*, 9.4l_*), \tilde{Q}_0 = (1.3Q_*, 2.1Q_*, 2.8Q_*, 3.8Q_*), \\ \tilde{\rho}_g &= (0.7\rho_*, 0.9\rho_*, 1.1\rho_*, 1.4\rho_*), \tilde{\rho}_f = (780\rho_*, 800\rho_*, 840\rho_*, 920\rho_*), \tilde{L}_k = (18l_*, 20l_*, 22l_*, 25l_*), \\ \tilde{\Delta}_d &= (10l_*, 14l_*, 16l_*, 19l_*), \tilde{V}_g = (3.0V_*, 3.8V_*, 4.2V_*, 4.9V_*), \tilde{V}_f = (0.32V_*, 0.40V_*, 0.44V_*, 0.52V_*), \\ \tilde{V}_{k0} &= (2.7V_*, 2.9V_*, 3.4V_*, 4.4V_*), \tilde{\Delta}_5 = (65l_*, 70l_*, 72l_*, 74l_*), \tilde{S}_k = (9.6l_*, 10.0l_*, 10.4l_*, 11.0l_*), \\ \tilde{\alpha} &= (0.015\alpha_*, 0.019\alpha_*, 0.021\alpha_*, 0.024\alpha_*), \tilde{\mu}_f = (0.93\mu_*, 0.98\mu_*, 1.03\mu_*, 1.12\mu_*), \\ l_* &= 10^{-4}[\text{м}], Q_* = 10^{-6}[\text{м}^3/\text{с}], V_* = 1[\text{м/с}], \rho_* = 1[\text{кг/м}^3], \alpha_* = 1[\text{Па}], \mu_* = 10^{-3}[\text{Па} \cdot \text{с}]. \end{aligned}$$

На рисунках 6.24 – 6.33 для данного варианта задания неконтрастных исходных характеристик приведены результаты расчетов ведущих эндогенных параметров рассматриваемой модели, на основе полученных выше нечетко-множественных представлений. В частности, на рисунке 6.24 приведена функция принадлежности для нечетко-множественного параметра $\tilde{\Delta}_2$ внутреннего диаметра цилиндрического слоя растекающейся вдоль образующей трубки жидкости в области V_4 ; рисунок 6.25 описывает вид функции принадлежности для нечетко-множественного параметра скорости \tilde{V}_L движения жидкости в пристеночном слое. Рисунки 6.26 – 6.29 соответственно дают описания функций принадлежности для нечетко-множественных величин \tilde{L}_p , \tilde{W}_{e_1} , $\tilde{W}_{e_{1*}}$, $\tilde{W}_{e_{1***}}$. Рисунок 6.30 описывает профиль функции принадлежности для нечетко-множественной характеристики \tilde{R}_m массового расхода, а рисунок 6.32 иллюстрирует профиль функции принадлежности для нечетко-множественного параметра $\tilde{V}_k(2\pi/3)$. Параметрические зависимости траекторий границ $\mu=0$ носителей и границ $\mu=1$ областей максимальной достоверности нечетко-множественных оценок для эндогенных параметров $\tilde{V}_k(\beta)$, $\tilde{R}_k(\beta)$ от углового параметра β приводятся на рисунках 6.32 и 6.33.

Рис. 6.24. Вид функции $\mu_{\tilde{\Delta}_2}(\Delta_2)$.Рис. 6.25 Вид функции $\mu_{\tilde{V}_L}(V_L)$.

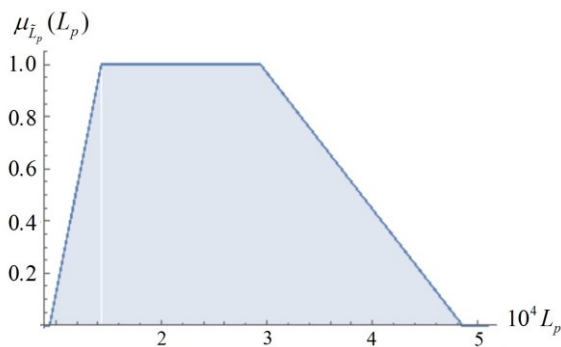


Рис. 6.26. Вид функции $\mu_{\tilde{L}_p}(L_p)$.

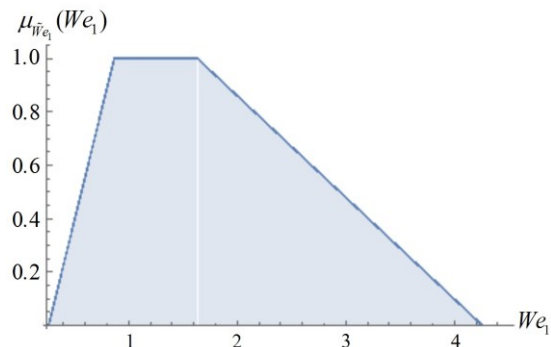


Рис. 6.27. Вид функции $\mu_{\tilde{W}_{e_1}}(W_{e_1})$.

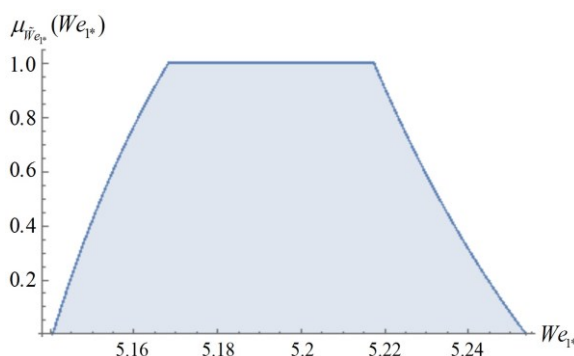


Рис. 6.28. Вид функции $\mu_{\tilde{W}_{e_1^*}}(W_{e_1^*})$.

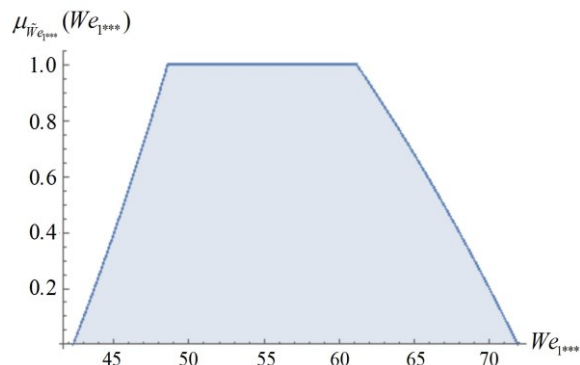


Рис. 6.29. Вид функции $\mu_{\tilde{W}_{e_1^{***}}}(W_{e_1^{***}})$.

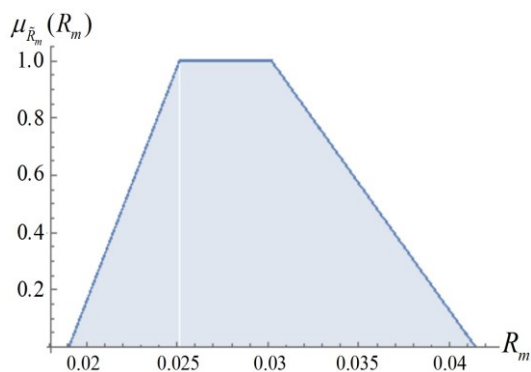


Рис. 6.30. Вид функции $\mu_{\tilde{R}_m}(R_m)$.

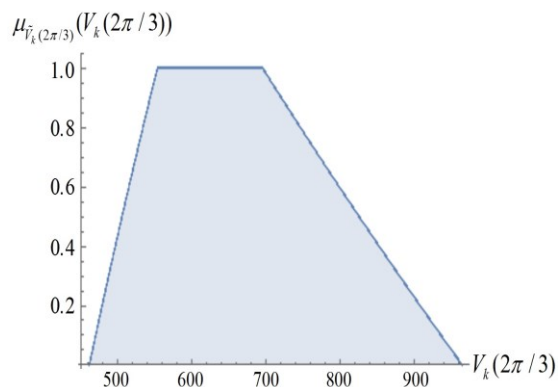


Рис. 6.31. Вид функции $\mu_{\tilde{V}_k(2\pi/3)}(V_k(2\pi/3))$.

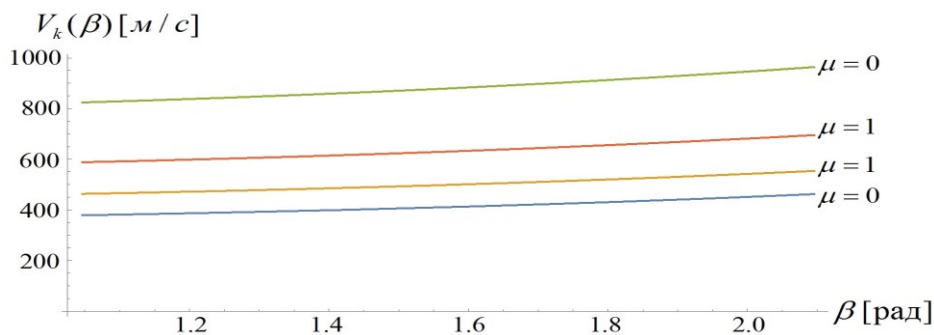


Рис. 6.32. Параметрическое нечетко-множественное описание возможных значений фазовых скоростей $V_k(\beta)$.

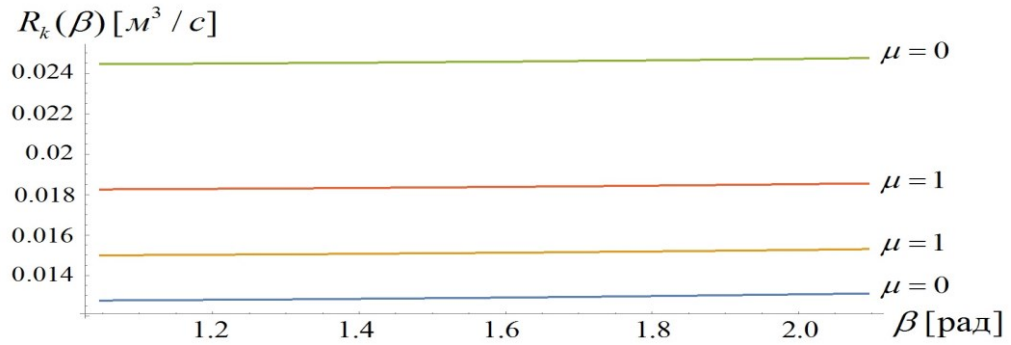


Рис. 6.33. Параметрическое нечетко-множественное описание возможных значений параметра расхода $R_k(\beta)$.

На основе анализа рассчитанных распределений можно сделать заключение о том, что при задаваемых значениях обладающих разбросами исходных параметров модели параметров мера изменений в угловых зависимостях характеристик $\tilde{R}_k(\beta)$ незначительна, а тенденции в изменении характеристик $\tilde{V}_k(\beta)$ указывают на рост скоростей $V_k(\beta)$ при увеличении углового параметра.

Еще одной рассматриваемой в подразделе проблемой является разработка нечетко-множественного численно-аналитического метода учета факторов неконтрастности исходных параметров для модели образования жидкостно-капельного охлаждающего потока ротационным дисковидным вертикально вращающимся распылителем жидкостного реагента. Принципы функционирования и конструктивные особенности распылителей данного типа конструктивно охарактеризованы в работах [55, 89, 104, 193, 204, 254, 274]. Рассматриваемые устройства содержат рабочие органы в виде барабанов, конических чаш, дисков, вращающихся с большими угловыми скоростями. В процессе их функционирования для решения задачи жидкостно-капельного охлаждения фактически задействована только та составляющая факела распыла, которая ориентирована в направлении к термостабилизируемой вертикальной поверхности. Остающаяся часть факела жидкостно-капельного распыления экранируется специальной корпусной конструкцией и далее отводится из накопителей насосами.

Разрабатываемый метод описания неопределенных рабочих характеристик функционирования ротационного вертикального распылителя при учете

разбросов в значениях исходных расчетных параметров базируется на представленных в работе [274] результатах исследования двумерной детерминистической модели функционирования ротационного вертикального распылителя. Для формулировки соотношений рассматриваемой математической модели вводится система координат $Ox_1x_2x_3$, в которой термостабилизируемую поверхность составляют точки множества $S = \{x_1 = l, x_2 \in [0, h_1], x_3 \in (-\infty, \infty)\}$, а ось размещаемого на вертикальной штанге и вращающегося против часовой стрелки с угловой скоростью ω [c^{-1}] дискового либо протяженного цилиндрического барабанного распылителя имеет описание $\{x_1 = 0, x_2 = h_2, x_3 \in (-\infty, \infty)\}$. Соответственно описанному варианту размещения рабочего органа распылителя факел капельного распыления жидкостного охлаждающего реагента ориентирован в направлении термостабилизируемой поверхности и имеет секторный раствор с отсчитываемыми от коллинеарного оси Ox_1 выходящего из точки $P = \{x_1 = 0, x_2 = h_2\}$ направления граничными углами $-\varphi_1$ и $-\varphi_2$ ($\varphi_2 > \varphi_1$):

$$\varphi_1 = \arccos[(l(l^2 + h^2 - R^2)^{1/2} + Rh)/(l^2 + h^2)], \quad h = h_2 - h_1, \quad (6.93)$$

$$\varphi_2 = \arccos[(l(l^2 + h_2^2 - R^2)^{1/2} + Rh_2)/(l^2 + h_2^2)], \quad (6.94)$$

Уравнения траекторий движения капель q_i распыляемой жидкости во времени при $t \geq 0$ начиная с момента их отрыва с вращающейся поверхности имеют вид [274]

$$x_{1q_i} = V \cos \varphi_i k_1^{-1} (1 - \exp(-k_1 t)), \quad x_{2q_i} = h_2 - R \cos \varphi_i + (V \sin \varphi_i k_1^{-1} - k_2 k_1^{-2}) (1 - \exp(-k_1 t)) + k_2 k_1^{-1} t, \quad (6.95)$$

где

$$V = \omega R, \quad k_1 = (2m_{q_i})^{-1} \pi r_{q_i}^2 \gamma_f C_{q_i}, \quad k_2 = 4(3m_{q_i})^{-1} \pi r_{q_i}^3 \gamma_r. \quad (6.96)$$

Параметрами соотношений (6.95), (6.96) для капли q_i являются ее масса m_{q_i} [кг], радиус r_{q_i} [м], коэффициент сопротивления C_{q_i} при ее движении и начальная скорость V [м/с] движения капли в момент отрыва от диска распылителя, после чего на каплю начинают действовать силы тяжести. Параметрами модели являются также объемный вес воздуха (газообразной среды) γ_f [H/m^3] и жидкого охлаждающего реагента γ_r [H/m^3].

Определение значений параметра C_{q_i} является отдельной проблемой с рядом альтернативных версий решения [55, 86, 89, 104, 193, 204, 216, 254]. В рамках применяемых подходов C_{q_i} полагается постоянной величиной с диапазоном изменения $0,4 \leq C_{q_i} \leq 0,5$ либо рассчитывается с использованием соотношения

$$C_{q_i} = Q (R_e)^{-1/2} \quad (6.97)$$

через соответствующее число Рейнольдса R_e и эмпирический варьируемый коэффициент Q , рекомендации по выбору которого содержатся в работах [55, 86, 89, 104, 193, 204, 216, 254]. Так, для капель q_i , диаметр которых изменяется в интервале $1 \cdot 10^{-4} < d_{q_i} < 2 \cdot 10^{-3}$ [м] при свободном падении с предельными скоростями и значениях числа Рейнольдса $1,0 < R_e < 800$ предлагается выбор величины $Q \approx 12,5$. Для расчета C_{q_i} в случае $d_{q_i} \leq 1 \cdot 10^{-4}$ [м] и $R_e < 2,0$ может использоваться формула Стокса

$$C_{q_i} = 24 (R_e)^{-1/2}. \quad (6.98)$$

Описание детерминистического варианта исследуемой математической модели соотношениями (6.93) – (6.98) в соответствии с заданиями диссертационной работы обобщается на случай учета возможных разбросов в значениях экзогенных параметров с применением нечетко-множественного подхода. Разрабатываемый метод учета факторов неопределенности включает этап фазсификации исходной нечеткой информации и переход к рассмотрению неопределенных физико-механических ω , γ_f , γ_r , Q , R_e и геометрических l , h_1 , h_2 , R , r_{q_i} параметров модели как нечетко-множественных величин \tilde{l} , \tilde{h}_1 , \tilde{h}_2 , \tilde{R} , \tilde{r}_{q_i} , $\tilde{\omega}$, $\tilde{\gamma}_f$, $\tilde{\gamma}_r$, \tilde{Q} , \tilde{R}_e для последующего применения к соотношениям детерминистического варианта модели модифицированной версии α – уровневой формы эвристического принципа обобщения. В рамках разрабатываемого метода вводятся описания неконтрастных экзогенных параметров модели нечеткими нормальными трапецеидальными интервалами с кортежами реперных значений

$$\tilde{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4), \quad \tilde{h}_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}), \quad \tilde{h}_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, h_{24}), \quad \tilde{R} = (R_1, R_2, R_3, R_4), \quad (6.99)$$

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{q_i} &= (r_{q_i,1}, r_{q_i,2}, r_{q_i,3}, r_{q_i,4}), \quad \tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4), \quad \tilde{\gamma}_f = (\gamma_{f1}, \gamma_{f2}, \gamma_{f3}, \gamma_{f4}), \quad \tilde{\gamma}_r = (\gamma_{r1}, \gamma_{r2}, \gamma_{r3}, \gamma_{r4}), \\ \tilde{Q} &= (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4), \quad \tilde{R}_e = (R_{e1}, R_{e2}, R_{e3}, R_{e4}).\end{aligned}$$

Для обладающих разбросами значений коэффициентов сопротивления C_{q_i} для описанных выше диапазонов либо вводятся альтернативные нечетко-множественные представления

$$\tilde{C}_{q_i} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{C}_{q_i, \alpha}, \bar{C}_{q_i, \alpha}], \quad \underline{C}_{q_i, \alpha} = 24 (\bar{R}_{e\alpha})^{-1/2}, \quad \bar{C}_{q_i, \alpha} = 24 (\underline{R}_e)^{-1/2}, \quad (6.100)$$

$$\underline{R}_{e\alpha} = (1-\alpha)R_{e1} + \alpha R_{e2}, \quad \bar{R}_{e\alpha} = \alpha R_{e3} + (1-\alpha)R_{e4};$$

$$\tilde{C}_{q_i} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{C}_{q_i, \alpha}, \bar{C}_{q_i, \alpha}], \quad \underline{C}_{q_i, \alpha} = \underline{Q}_\alpha (\bar{R}_{e\alpha})^{-1/2}, \quad \bar{C}_{q_i, \alpha} = \bar{Q}_\alpha (\underline{R}_e)^{-1/2}, \quad (6.101)$$

$$\underline{R}_{e\alpha} = (1-\alpha)R_{e1} + \alpha R_{e2}, \quad \bar{R}_{e\alpha} = \alpha R_{e3} + (1-\alpha)R_{e4}, \quad \underline{Q}_\alpha = (1-\alpha)Q_1 + \alpha Q_2, \quad \bar{Q}_\alpha = \alpha Q_3 + (1-\alpha)Q_4,$$

или же непосредственно задаются исходные нечетко-интервальные представления $\tilde{C}_{q_i} = (C_{q_i,1}, C_{q_i,2}, C_{q_i,3}, C_{q_i,4})$.

Неопределенные угловые размеры φ_1, φ_2 секторной зоны факела распыления с применением соотношений (6.93), (6.94) детерминистической версии модели, аппарата стандартной арифметики нечетких интервалов и эвристического принципа обобщения записываются в виде

$$\tilde{\varphi}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{1\alpha}, \bar{\varphi}_{1\alpha}], \quad (6.102)$$

$$\underline{\varphi}_{1\alpha} = \inf_{\substack{R \in [\underline{R}_{\alpha_2}, \bar{R}_\alpha] \\ l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \arccos[(l(l^2 + h^2 - R^2)^{1/2} + Rh)/(l^2 + h^2)],$$

$$\bar{\varphi}_{1\alpha} = \sup_{\substack{R \in [\underline{R}_{\alpha_2}, \bar{R}_\alpha] \\ l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha]}} \arccos[(l(l^2 + h^2 - R^2)^{1/2} + Rh)/(l^2 + h^2)];$$

$$\tilde{\varphi}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varphi}_{2\alpha}, \bar{\varphi}_{2\alpha}], \quad (6.103)$$

$$\underline{\varphi}_{2\alpha} = \inf_{\substack{R \in [\underline{R}_{\alpha_2}, \bar{R}_\alpha] \\ l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ h_2 \in [\underline{h}_{2\alpha}, \bar{h}_{2\alpha}]}} \arccos[(l(l^2 + h_2^2 - R^2)^{1/2} + Rh_2)/(l^2 + h_2^2)],$$

$$\bar{\varphi}_{2\alpha} = \sup_{\substack{R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ l \in [\underline{l}_\alpha, \bar{l}_\alpha] \\ h_2 \in [\underline{h}_{2\alpha}, \bar{h}_{2\alpha}]}} \arccos[(l(l^2 + h_2^2 - R^2)^{1/2} + Rh_2)/(l^2 + h_2^2)],$$

где

$$\tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4) = \tilde{h}_2 - \tilde{h}_1 = (h_{21} - h_{14}, h_{22} - h_{13}, h_{23} - h_{12}, h_{24} - h_{11}); \quad (6.104)$$

$$\underline{R}_\alpha = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_2, \quad \bar{R}_\alpha = \alpha R_3 + (1 - \alpha)R_4; \quad \underline{l}_\alpha = (1 - \alpha)l_1 + \alpha l_2, \quad \bar{l}_\alpha = \alpha l_3 + (1 - \alpha)l_4;$$

$$\underline{h}_\alpha = (1 - \alpha)h_1 + \alpha h_2, \quad \bar{h}_\alpha = \alpha h_3 + (1 - \alpha)h_4; \quad \underline{h}_{2\alpha} = (1 - \alpha)h_{21} + \alpha h_{22}, \quad \bar{h}_{2\alpha} = \alpha h_{23} + (1 - \alpha)h_{24}$$

Описания траекторий движения капель распыляемой жидкости q_i вдоль направлений отрыва от поверхности вращающегося диска, задаваемых нечеткими угловыми параметрами $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ формируются с использованием соотношений (6.95), (6.96) детерминистической версии модели. При этом последовательно находятся следующие нечетко-множественные представления:

$$\begin{aligned} \tilde{V} = (V_1, V_2, V_3, V_4) = \tilde{\omega}\tilde{R} = (\omega_1 R_1, \omega_2 R_2, \omega_3 R_3, \omega_4 R_4); \quad \tilde{k}_1 = (k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}) = (2\tilde{m}_{q_i})^{-1} \tilde{\pi}_{q_i}^{-2} \tilde{\gamma}_f \tilde{C}_{q_i} = \\ = ((\pi/2)\gamma_{f1} r_{q_{i1}}^2 C_{q_{i1}} / m_{q_{i4}}, (\pi/2)\gamma_{f2} r_{q_{i2}}^2 C_{q_{i2}} / m_{q_{i3}}, (\pi/2)\gamma_{f3} r_{q_{i3}}^2 C_{q_{i3}} / m_{q_{i2}}, (\pi/2)\gamma_{f4} r_{q_{i4}}^2 C_{q_{i4}} / m_{q_{i1}}); \\ \tilde{k}_2 = (k_{21}, k_{22}, k_{23}, k_{24}) = 4(3\tilde{m}_{q_i})^{-1} \tilde{\pi}_{q_i}^{-3} \tilde{\gamma}_r = \\ = ((4\pi/3)\gamma_{r1} r_{q_{i1}}^3 / m_{q_{i4}}, (4\pi/3)\gamma_{r2} r_{q_{i2}}^3 / m_{q_{i3}}, (4\pi/3)\gamma_{r3} r_{q_{i3}}^3 / m_{q_{i2}}, (4\pi/3)\gamma_{r4} r_{q_{i4}}^3 / m_{q_{i1}}); \\ \tilde{x}(t)_{1q_i} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}(t)_{1q_i, \alpha}, \overline{x}(t)_{1q_i, \alpha}], \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$\underline{x}(t)_{1q_i, \alpha} = \inf_{\substack{k_1 \in [\underline{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}] \\ V \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ \varphi_i \in [\underline{\varphi}_{i\alpha}, \bar{\varphi}_{i\alpha}]} [V \cos \varphi_i k_1^{-1} (1 - \exp(-k_1 t))], \quad \overline{x}(t)_{1q_i, \alpha} = \sup_{\substack{k_1 \in [\underline{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}] \\ V \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ \varphi_i \in [\underline{\varphi}_{i\alpha}, \bar{\varphi}_{i\alpha}]} [V \cos \varphi_i k_1^{-1} (1 - \exp(-k_1 t))];$$

$$\tilde{x}(t)_{2q_i} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{x}(t)_{2q_i, \alpha}, \overline{x}(t)_{2q_i, \alpha}], \quad (6.106)$$

$$\underline{x}(t)_{2q_i, \alpha} = \inf_{\substack{R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ k_1 \in [\underline{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}] \\ k_2 \in [\underline{k}_{2\alpha}, \bar{k}_{2\alpha}] \\ V \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ \varphi_i \in [\underline{\varphi}_{i\alpha}, \bar{\varphi}_{i\alpha}]} [\underline{h}_{2\alpha} - R \cos \varphi_i + (V \sin \varphi_i k_1^{-1} - k_2 k_1^{-2})(1 - \exp(-k_1 t)) + k_2 k_1^{-1} t],$$

$$\overline{x}(t)_{2q_i, \alpha} = \sup_{\substack{R \in [\underline{R}_\alpha, \bar{R}_\alpha] \\ k_1 \in [\underline{k}_{1\alpha}, \bar{k}_{1\alpha}] \\ k_2 \in [\underline{k}_{2\alpha}, \bar{k}_{2\alpha}] \\ V \in [\underline{V}_\alpha, \bar{V}_\alpha] \\ \varphi_i \in [\underline{\varphi}_{i\alpha}, \bar{\varphi}_{i\alpha}]} [\bar{h}_{2\alpha} - R \cos \varphi_i + (V \sin \varphi_i k_1^{-1} - k_2 k_1^{-2})(1 - \exp(-k_1 t)) + k_2 k_1^{-1} t].$$

Полученные нечетко-множественные представления (6.100) – (6.106) позволяют оценивать степень влияния разбросов численных значений исходных параметров математической модели движения капель при рассеянии охлаждающей жидкости вертикально вращающимся распылителем на основные эндогенные характеристики данной модели в виде угловых параметров раствора секторного факела распыления и форм траекторий движения капель с различными направлениями отрыва от поверхности распылителя.

Расчеты на базе полученных представлений с использованием разработанного программного приложения реализованы для случая задания экзогенных нечетко-интервальных параметров модели в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= (0.097l_*, 0.099l_*, 0.1l_*, 0.12l_*), \tilde{r}_{q_i} = (2.5 \cdot 10^{-4}l_*, 3.4 \cdot 10^{-4}l_*, 3.9 \cdot 10^{-4}l_*, 5.0 \cdot 10^{-4}l_*), \\ \tilde{l} &= (0.97l_*, 0.99l_*, 1.0l_*, 1.03l_*), \tilde{h}_1 = (1.42l_*, 1.49l_*, 1.51l_*, 1.53l_*), \tilde{h}_2 = (1.85l_*, 1.9l_*, 1.92l_*, 1.95l_*), \\ \tilde{\omega} &= (30\pi\omega_*, 32\pi\omega_*, 36\pi\omega_*, 40\pi\omega_*), \tilde{\gamma}_f = (1.22\gamma_{**}, 1.24\gamma_{**}, 1.27\gamma_{**}, 1.29\gamma_{**}), \\ \tilde{\gamma}_r &= (0.98\gamma_*, 0.99\gamma_*, 1.0\gamma_*, 1.15\gamma_*), \tilde{Q} = (12.5, 13.0, 13.2, 13.5), \tilde{R}_e = (200, 380, 450, 800), \\ l_* &= 1 [м], \omega_* = 1 [\text{рад/с}], \gamma_* = 9.8 \cdot 10^3 [H/м^3], \gamma_{**} = 9.8 [H/м^3]. \end{aligned}$$

Данный вариант задания исходных параметров соответствует случаю распыления воды вращающимся со средней скоростью 17 об./с против часовой стрелки дисковым распылителем радиуса 0.1 м.

Данные расчетов, осуществленных с использованием разработанного программного приложения, приведены на рисунках 6.34 – 6.41. Так, на рисунках 6.34 и 6.35 изображены рассчитанные с применением соотношений (6.102), (6.103) графики функций принадлежности для нечетко-множественных характеристик $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ угловых параметров границ секторного факела распыления, отсчитываемых в градусной мере от горизонтального направления. Можно заключить, что при учитываемых уровнях разбросов для исходных параметров модели, наиболее достоверные значения параметра φ_1 (рис. 6.34) лежат в диапазоне от 16.3° до 18.2° , а значения $\varphi_1 < 12.1^\circ$ и $\varphi_1 > 23.4^\circ$ имеют нулевые уровни достоверности. Соответственно, наиболее достоверные значения φ_2 лежат в

диапазоне от 59.6° до 60.1° (рис. 6.35), а значения $\varphi_1 < 57.8^\circ$ и $\varphi_1 > 60.8^\circ$ являются абсолютно недостоверными.

На рисунке 6.36 представлены данные расчета траекторий движения капель с нечетким угловым параметром угла отрыва $\tilde{\varphi}_1$ в пределах $x_1 \in [0, l]$. Здесь линии $\mu = 1$ описывают внешние границы областей наиболее достоверного пролегания траекторий движения капель с углами отрыва от поверхности диска, описываемыми нечетким множеством $\tilde{\varphi}_1$; линии $\mu = 0$ ограничивают область, вне которой прохождение траекторий движения капель с описываемыми множеством $\tilde{\varphi}_1$ углами отрыва является недостоверным. Аналогичную интерпретацию имеют линии на рисунке 6.39, который описывает возможные траектории движения капель с нечетко-множественным углом отрыва $\tilde{\varphi}_2$.

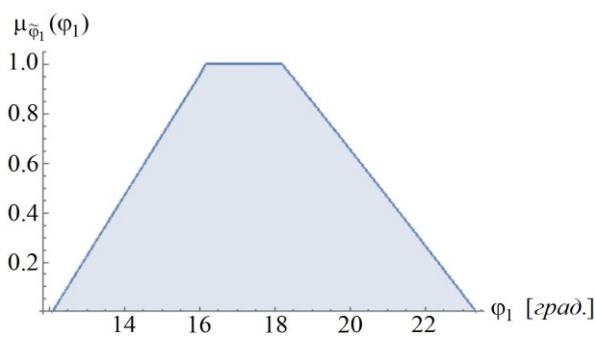


Рис. 6.34. График функции $\mu_{\tilde{\varphi}_1}(\varphi_1)$

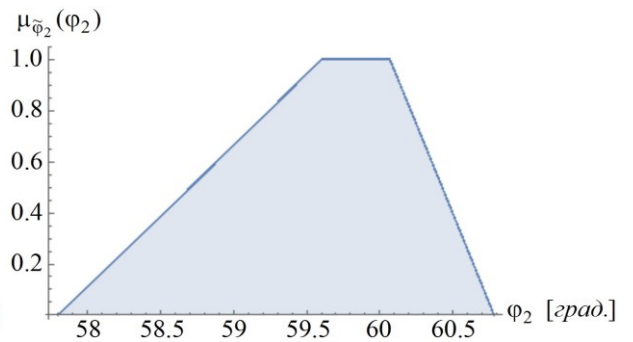


Рис. 6.35. График функции $\mu_{\tilde{\varphi}_2}(\varphi_2)$

Описания нечетких координат \tilde{x}_{1q_i} и \tilde{x}_{2q_i} точек на траекториях движения с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ в момент времени $t = 0.1$ с характеризуют функции принадлежности, соответственно изображенные на рисунках 6.37, 6.38 и 6.40, 6.41.

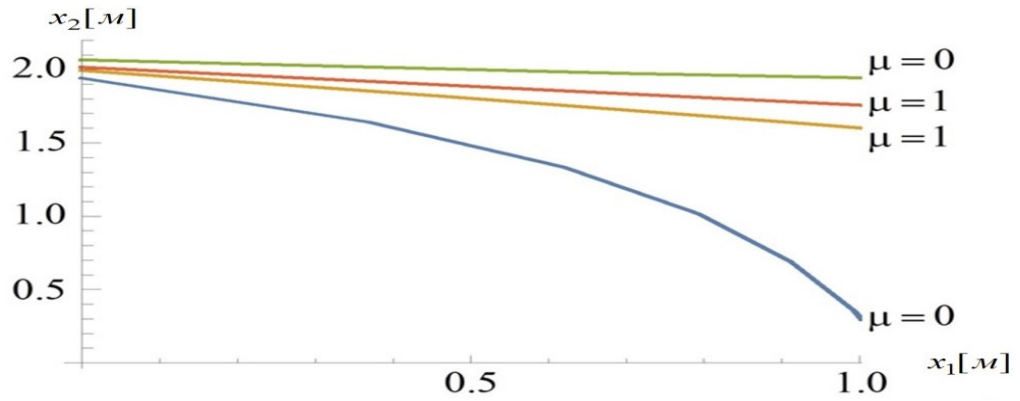


Рис. 6.36. Области прохождения прогнозируемых траекторий движения капель с минимальными и максимальными уровнями принадлежности вдоль нечеткого углового направления распыления $\tilde{\varphi}_1$.

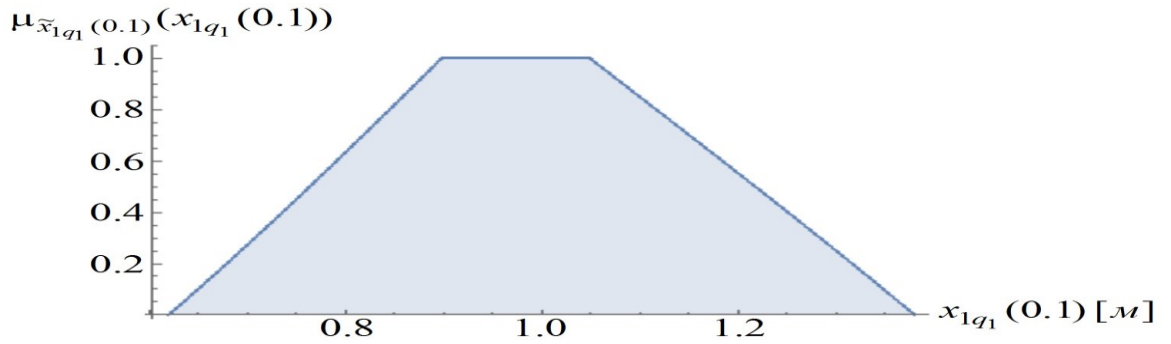


Рис. 6.37. Вид функции принадлежности для координаты $\tilde{x}_{1q_1}(0.1)$ положения точки на траектории с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_1$.

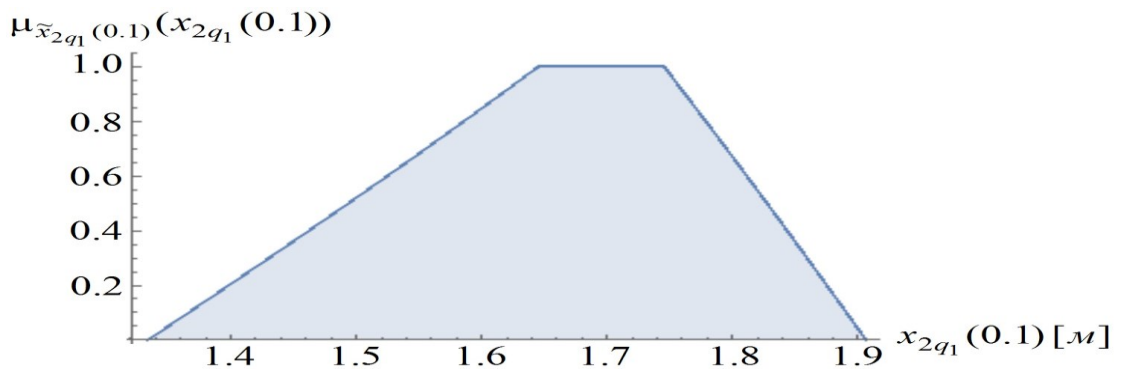


Рис. 6.38. Вид функции принадлежности для координаты $\tilde{x}_{2q_1}(0.1)$ положения точки на траектории с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_1$.

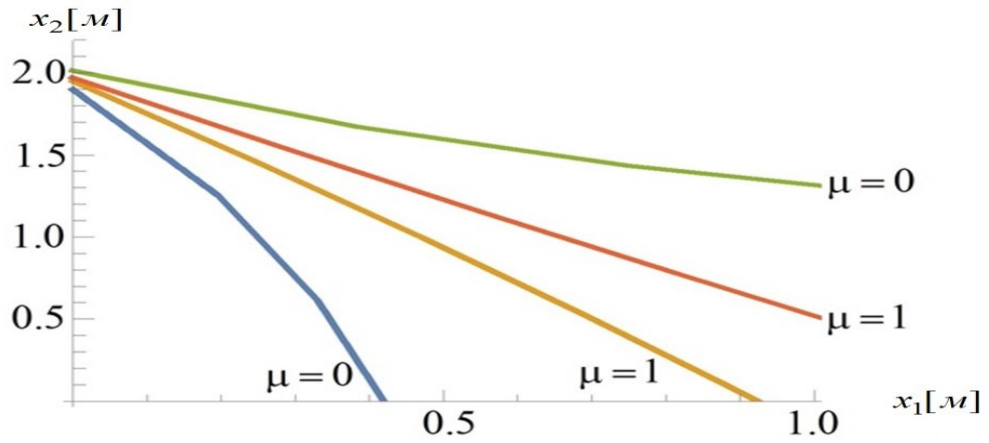


Рис. 6.39. Области прохождения прогнозируемых траекторий движения капель с минимальными и максимальными уровнями принадлежности вдоль нечеткого углового направления распыления $\tilde{\varphi}_2$.

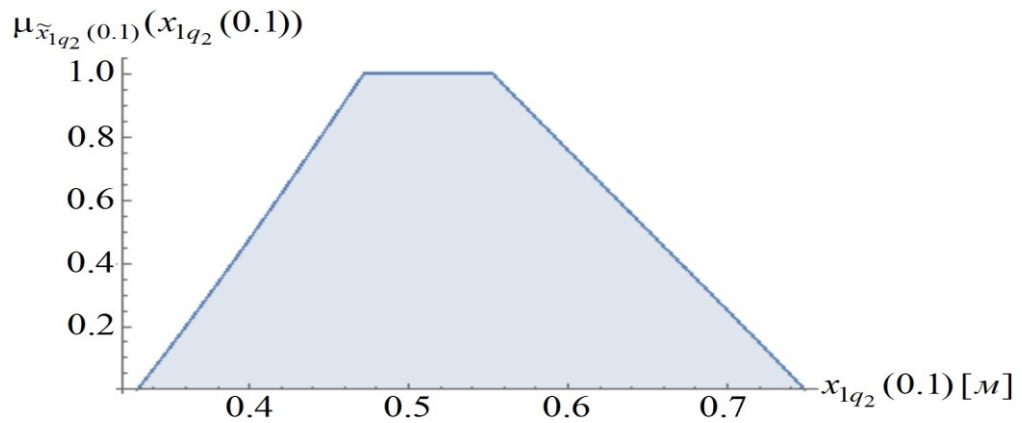


Рис. 6.40. Вид функции принадлежности для координаты $\tilde{x}_{1q_1}(0.1)$ положения точки на траектории с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_2$.

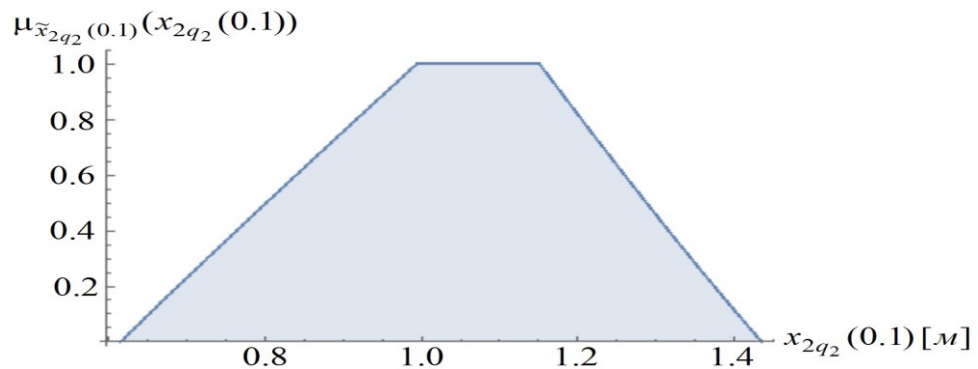


Рис. 6.41. Вид функции принадлежности для координаты $\tilde{x}_{2q_1}(0.1)$ положения точки на траектории с нечетким угловым параметром $\tilde{\varphi}_2$.

6.3. Нечеткие оценки эффектов теплообмена при течении двухфазных потоков в цилиндрических высокотемпературных каналах и продольном обтекании двухфазным потоком высокотемпературной поверхности

Разработка нечетко-множественных методов исследования математических моделей высокотемпературной термостабилизации с использованием механизмов теплообмена нагретых поверхностей и обтекающих эти поверхности двухфазных газочапельных тонкодисперсных потоков ввиду распространенности областей применения этих технологий охлаждения и весьма высокого уровня разбросов для параметров моделирования представляет весьма актуальную современную научно-техническую задачу. Детерминистические модели этого типа применительно к процессам безотрывного обтекания ламинарными потоками плоских поверхностей рассматривались в работах [13, 100]. Нечетко-множественные обобщения этих исследований особо важны в условиях отсутствия обширных баз однородных статистических данных о неконтрастных параметрах моделирования [13, 100].

При разработке нечетко-множественного метода исследования модели [100, 174] обтекания плоской поверхности с температурой нагрева, превышающей температуру Лейденфроста, ламинарным аэрозольным потоком, исходными параметрами моделирования являются параметры скорости w_0 и давления P в потоке, усредненного диаметра капель d_k , влагосодержания двухфазной тонкодисперсной газочапельной среды d , как удельной пропорции массы жидкости и массы содержащего ее газа. В рамках гипотез об использовании в детерминистической модели рассматриваемого процесса положений теории гомогенного течения газожидкостных двухфазных потоков и об отсутствии прямого контакта нагретой поверхности с жидкокапельной компонентой, для коэффициента α_f теплоотдачи от разогретой поверхности температуры ϑ_0 к двухфазному потоку и функции распределения температуры $\vartheta(y)$ в поперечном отсчитываемом от обтекаемой поверхности координатном направлении y теплового приграничного слоя толщины δ [м] записываются представления

$$\mathcal{G}(y) = F_g(y, \mathcal{G}_0, b, \delta) = \mathcal{G}_0 [2e^{-by} + (y^3(1+b\delta)\delta^{-3} - y(b+3\delta^{-1}))e^{-b\delta}] / 2, \quad (6.106)$$

$$\alpha_f = F_f(\alpha_k, \alpha_r, b, \delta) = \alpha_k(1 + 0.5e^{-b\delta}) + \alpha_r e^{-b\delta}.$$

Фигурирующий в (6.106) параметр b [m^{-1}] имеет вид

$$b = 3.46d_k^{-1}(\rho_g d / \rho_k)^{1/2}, \quad (6.107)$$

и характеризует эффекты внутренних тепловых стоков. Другими исходными характеристиками представленных соотношений являются плотности жидкостных капель ρ_k и газа ρ_g в двухкомпонентном потоке, коэффициенты теплоотдачи к газообразной и к капельной α_r [$Bm/(m^2 \cdot K)$] $\alpha_k = \lambda_r b$ [$Bm/(m^2 \cdot K)$] составляющим потока. Полагается также, что толщины теплового и гидродинамического пограничного слоев идентичны и определяются так же, как и в случае однофазного обтекающего газового потока, а температура потока вне теплового пограничного слоя равна температуре капель.

Анализируются также случаи теплообмена с доминированием какой-либо из составляющих в газожидкостном потоке при теплоотдаче. При том для соответствующей компоненты коэффициент теплоотдачи должен составлять не менее 0.9 от совокупного для двухфазного потока. В исследуемой модели полагается, что при взаимодействии вследствие испарения капель между двухфазным потоком и поверхностью создается однофазный газопаровой подслой, после чего подводимое тепло расходуется на дальнейшее увеличение толщины этого подслоя за счет испарения капель. При этом толщина δ_n однофазного газопарового подслоя описывается выражением

$$\delta_n = F_\delta(b, \lambda_n, \mathcal{G}_0, \tau, r, d, \rho_n) = b^{-1} [(2\lambda_n \mathcal{G}_0 b^2 \tau r^{-1} d^{-1} \rho_n^{-1} + 1)^{1/2} - 1], \quad (6.108)$$

параметрами которого выступают теплопроводность пара λ_n [$Bm/(m \cdot K)$], плотность пара ρ_n [kg/m^3], параметр скрытой теплоты парообразования r [$Dж/kg$] и время с момента начала испарения капель τ [c], а коэффициент теплоотдачи к капельной составляющей имеет представление

$$\alpha_k = F_a(b, \lambda_r, \delta_n) = \lambda_r b (1 + \delta_n b)^{-1}, \quad (6.109)$$

с параметром теплопроводности жидкости капель λ_r [$Bm/(m \cdot K)$].

При разработке нечетко-множественных обобщений методов анализа рассматриваемых моделей с учетом крайне высокой степени разбросов их экзогенных технологических и экспериментальных физико-механических параметров, для указанных параметров вводятся описания трапецеидальными нормальными нечеткими интервалами

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_g &= (\rho_{g1}, \rho_{g2}, \rho_{g3}, \rho_{g4}), \quad \tilde{\rho}_k = (\rho_{k1}, \rho_{k2}, \rho_{k3}, \rho_{k4}), \quad \tilde{\rho}_n = (\rho_{n1}, \rho_{n2}, \rho_{n3}, \rho_{n4}), \quad (6.110) \\ \tilde{d} &= (d_1, d_2, d_3, d_4), \quad \tilde{d}_k = (d_{k1}, d_{k2}, d_{k3}, d_{k4}), \quad \tilde{\lambda}_r = (\lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \lambda_{r3}, \lambda_{r4}), \quad \tilde{\lambda}_n = (\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4}), \\ \tilde{\tau} &= (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4), \quad \tilde{r} = (r_1, r_2, r_3, r_4), \quad \tilde{\alpha}_r = (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \alpha_{r3}, \alpha_{r4}), \quad \tilde{\mathcal{G}}_0 = (\mathcal{G}_{01}, \mathcal{G}_{02}, \mathcal{G}_{03}, \mathcal{G}_{04}),\end{aligned}$$

и в расчетных соотношениях моделей реализуется переход к введенным нечетко-множественным аргументам с использованием α -уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения.

В частности, с учетом оценок

$$\partial b / \partial d_k < 0, \quad \partial b / \partial \rho_g > 0, \quad \partial b / \partial d > 0, \quad \partial b / \partial \rho_k < 0, \quad (6.111)$$

записывается нечетко-множественное представление

$$\tilde{b} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [b_\alpha, \bar{b}_\alpha], \quad b_\alpha = 3.46 \bar{d}_{k\alpha}^{-1} (\underline{\rho}_{g\alpha} \underline{d}_\alpha / \bar{\rho}_{k\alpha})^{1/2}, \quad \bar{b}_\alpha = 3.46 \underline{d}_{k\alpha}^{-1} (\bar{\rho}_{g\alpha} \bar{d}_\alpha / \underline{\rho}_{k\alpha})^{1/2}, \quad (6.112)$$

в котором

$$\begin{aligned}\underline{\rho}_{g\alpha} &= (1-\alpha)\rho_{g1} + \alpha\rho_{g2}, \quad \bar{\rho}_{g\alpha} = \alpha\rho_{g3} + (1-\alpha)\rho_{g4}; \quad \underline{\rho}_{k\alpha} = (1-\alpha)\rho_{k1} + \alpha\rho_{k2}, \quad \bar{\rho}_{k\alpha} = \alpha\rho_{k3} + (1-\alpha)\rho_{k4}; \\ \underline{d}_\alpha &= (1-\alpha)d_1 + \alpha d_2, \quad \bar{d}_\alpha = \alpha d_3 + (1-\alpha)d_4; \quad \underline{d}_{k\alpha} = (1-\alpha)d_{k1} + \alpha d_{k2}, \quad \bar{d}_{k\alpha} = \alpha d_{k3} + (1-\alpha)d_{k4}.\end{aligned}$$

Затем, при учете оценок

$$\partial \delta_n / \partial r < 0, \quad \partial \delta_n / \partial \lambda_n > 0, \quad \partial \delta_n / \partial \mathcal{G}_0 > 0, \quad \partial \delta_n / \partial \tau > 0, \quad \partial \delta_n / \partial d < 0, \quad \partial \delta_n / \partial \rho_n < 0, \quad (6.113)$$

находится нечетко-множественное выражение $\tilde{\delta}_n$ для характеристики δ_n

$$\tilde{\delta}_n = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\delta_{n\alpha}, \bar{\delta}_{n\alpha}], \quad (6.114)$$

$$\delta_{n\alpha} = \inf_{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha]} F_\delta(b, \underline{\lambda}_{n\alpha}, \underline{\mathcal{G}}_{0\alpha}, \underline{\tau}_\alpha, \bar{r}_\alpha, \bar{d}_\alpha, \bar{\rho}_{n\alpha}), \quad \bar{\delta}_{n\alpha} = \sup_{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha]} F_\delta(b, \bar{\lambda}_{n\alpha}, \bar{\mathcal{G}}_{0\alpha}, \bar{\tau}_\alpha, \underline{r}_\alpha, \underline{d}_\alpha, \underline{\rho}_{n\alpha});$$

$$\underline{\lambda}_{n\alpha} = (1-\alpha)\lambda_{n1} + \alpha\lambda_{n2}, \quad \bar{\lambda}_{n\alpha} = \alpha\lambda_{n3} + (1-\alpha)\lambda_{n4};$$

$$\underline{\mathcal{G}}_{0\alpha} = (1-\alpha)\mathcal{G}_{01} + \alpha\mathcal{G}_{02}, \quad \bar{\mathcal{G}}_{0\alpha} = \alpha\mathcal{G}_{03} + (1-\alpha)\mathcal{G}_{04}; \quad \underline{\tau}_\alpha = (1-\alpha)\tau_1 + \alpha\tau_2, \quad \bar{\tau}_\alpha = \alpha\tau_3 + (1-\alpha)\tau_4;$$

$$\underline{r}_\alpha = (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2, \quad \bar{r}_\alpha = \alpha r_3 + (1-\alpha)r_4; \quad \underline{\rho}_{n\alpha} = (1-\alpha)\rho_{n1} + \alpha\rho_{n2}, \quad \bar{\rho}_{n\alpha} = \alpha\rho_{n3} + (1-\alpha)\rho_{n4}.$$

Далее с учетом вида представления (6.109) и оценок $\partial\alpha_k/\partial\lambda_r > 0$, $\partial\alpha_k/\partial\delta_n < 0$, записывается нечетко-множественное выражение параметра $\tilde{\alpha}_k$

$$\tilde{\alpha}_k = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{k\alpha}, \bar{\alpha}_{k\alpha}], \quad \underline{\alpha}_{k\alpha} = \inf_{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha]} F_a(b, \underline{\lambda}_{r\alpha}, \bar{\delta}_{n\alpha}), \quad \bar{\alpha}_{k\alpha} = \sup_{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha]} F_a(b, \bar{\lambda}_{r\alpha}, \underline{\delta}_{n\alpha}); \quad (6.115)$$

$$\underline{\lambda}_{r\alpha} = (1-\alpha)\lambda_{r1} + \alpha\lambda_{r2}, \quad \bar{\lambda}_{r\alpha} = \alpha\lambda_{r3} + (1-\alpha)\lambda_{r4},$$

и при учете свойств $\partial\alpha_f/\partial\alpha_k > 0$, $\partial\alpha_f/\partial\alpha_r > 0$, $\partial\mathcal{G}(y)/\partial\mathcal{G}_0 > 0$ формируются нечетко-множественные описания $\tilde{\alpha}_f$ и $\tilde{\mathcal{G}}(y)$:

$$\tilde{\alpha}_f = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_{f\alpha}, \bar{\alpha}_{f\alpha}], \quad \underline{\alpha}_{f\alpha} = \inf_{\substack{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \gamma \in [\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha]}} F_f(\underline{\alpha}_{k\alpha}, \underline{\alpha}_{r\alpha}, b, \delta), \quad \bar{\alpha}_{f\alpha} = \sup_{\substack{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \gamma \in [\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha]}} F_f(\bar{\alpha}_{k\alpha}, \bar{\alpha}_{r\alpha}, b, \delta); \quad (6.116)$$

$$\tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha], \quad \underline{\delta}_\alpha = (1-\alpha)\delta_1 + \alpha\delta_2, \quad \bar{\delta}_\alpha = \alpha\delta_3 + (1-\alpha)\delta_4;$$

$$\tilde{\mathcal{G}}(y) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\mathcal{G}}(y)_\alpha, \bar{\mathcal{G}}(y)_\alpha], \quad \underline{\mathcal{G}}(y)_\alpha = \inf_{\substack{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \delta \in [\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha]}} F_g(\underline{\mathcal{G}}_{0\alpha}, y, b, \delta), \quad \bar{\mathcal{G}}(y)_\alpha = \sup_{\substack{b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha] \\ \delta \in [\underline{\delta}_\alpha, \bar{\delta}_\alpha]}} F_g(\bar{\mathcal{G}}_{0\alpha}, y, b, \delta).$$

Наряду с полученными выше представлениями, в нечетко-интервальной форме даны описания параметров расстояний \tilde{x} вдоль обтекаемой поверхности, в пределах которых действуют механизм теплоотдачи от газовой фазы дисперсного потока

$$\tilde{x}_r = (0.03w_{01}(b_4^2v_{r4})^{-1}, 0.03w_{02}(b_3^2v_{r3})^{-1}, 0.03w_{03}(b_3^2v_{r2})^{-1}, 0.03w_{04}(b_1^2v_{r1})^{-1}), \quad (6.117)$$

$$\tilde{v}_r = (v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}, v_{r4}), \quad \tilde{w}_0 = (w_{01}, w_{02}, w_{03}, w_{04}),$$

и от его капельной фазы

$$\tilde{x}_k = (0.25w_{01}(b_4^2v_{r4})^{-1}, 0.25w_{02}(b_3^2v_{r3})^{-1}, 0.25w_{03}(b_3^2v_{r2})^{-1}, 0.25w_{04}(b_1^2v_{r1})^{-1}), \quad (6.118)$$

где v_r [$\text{м}^2/\text{с}$] – параметр кинематической вязкости газа, а \tilde{v}_r – учитывающая его разбросы нечетко-интервальная модификация.

Весомую прикладную важность имеют также математические модели теплообмена при протекании течения тонкодисперсных двухфазных ламинарных и турбулентных потоков по цилиндрическим высокотемпературным каналам [174]. При исследовании ламинарных течений рассматривается участок тепловой стабилизации вдоль имеющего радиус R_* цилиндрического высокотемпературного канала с заданием температуры поверхности в его начале,

где температура центральной зоны потока, по предположению, совпадает с температурой капельной фазы. Закон радиального распределения температур $\theta(R)$ в этой зоне канала описывается выражением

$$\theta(R) = F_{\theta}(R, \theta_r, b, R_*) = \theta_r [J_0(ibR) / J_0(ibR_*)], \quad (6.119)$$

где θ_r является характеристикой относительного перепада температур в газовом потоке. В свою очередь, для параметра теплоотдачи потока α_w может быть записано представление

$$\begin{aligned} \alpha_w(t) &= F_w(t, \alpha_*, b, \lambda_T, \lambda, R_*) = \\ &= (\lambda / R_*) (1.33 + 5.33 \alpha_* t R_*^{-2}) (1 + 5.33 \alpha_* t R_*^{-2})^{-1} - ib \lambda_T [J_1(ibR_*) / J_0(ibR_*)], \end{aligned} \quad (6.120)$$

аргументы которого входят в соотношение $f_* = \alpha_* t R_*^{-2}$ критерия Фурье. Здесь время $t = x / w_0$ отвечает периоду прохождения потоком текущего расстояния x от начала зоны стабилизации, в которой при заданной температуре поверхности цилиндрического канала плотность теплового потока q_c описывается [174] выражением

$$q_c = F_q(\lambda, b, R_*) = \lambda (1.33 R_*^{-1} - ib [J_1(ibR_*) / J_0(ibR_*)]). \quad (6.121)$$

С переходом к нечетко-интервальным представлениям неконтрастных исходных параметров, для эндогенных характеристик рассматриваемой модели можно записать представления

$$\tilde{\theta}(R) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\theta(R)_{\alpha}, \overline{\theta(R)}_{\alpha}], \quad (6.122)$$

$$\underline{\theta(R)}_{\alpha} = \inf_{\substack{R_* \in [R_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}] \\ b \in [b_{\alpha}, \bar{b}_{\alpha}]}} F_{\theta}(R, \underline{\theta}_{r\alpha}, b, R_*), \quad \overline{\theta(R)}_{\alpha} = \sup_{\substack{R_* \in [R_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}] \\ b \in [b_{\alpha}, \bar{b}_{\alpha}]}} F_{\theta}(R, \bar{\theta}_{r\alpha}, b, R_*);$$

$$\tilde{\theta}_r = (\theta_{r1}, \theta_{r2}, \theta_{r3}, \theta_{r4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\theta}_{r\alpha}, \bar{\theta}_{r\alpha}], \quad \underline{\theta}_{r\alpha} = (1 - \alpha)\theta_{r1} + \alpha\theta_{r2}, \quad \bar{\theta}_{r\alpha} = \alpha\theta_{r3} + (1 - \alpha)\theta_{r4};$$

$$\tilde{R}_* = (R_{*1}, R_{*2}, R_{*3}, R_{*4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{R}_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}], \quad \underline{R}_{*\alpha} = (1 - \alpha)R_{*1} + \alpha R_{*2}, \quad \bar{R}_{*\alpha} = \alpha R_{*3} + (1 - \alpha)R_{*4};$$

$$\tilde{\alpha}_w(t) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\alpha}_w(t)_{\alpha}, \overline{\alpha}_w(t)_{\alpha}], \quad \underline{\alpha}_w(t)_{\alpha} = \inf_{\substack{R_* \in [R_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}] \\ b \in [b_{\alpha}, \bar{b}_{\alpha}] \\ \lambda_T \in [\underline{\lambda}_{T\alpha}, \bar{\lambda}_{T\alpha}]}} F_w(t, \underline{\alpha}_{*\alpha}, b, \lambda_T, \underline{\lambda}_{\alpha}, R_*), \quad \overline{\alpha}_w(t)_{\alpha} = \sup_{\substack{R_* \in [R_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}] \\ b \in [b_{\alpha}, \bar{b}_{\alpha}] \\ \lambda_T \in [\underline{\lambda}_{T\alpha}, \bar{\lambda}_{T\alpha}]}} F_w(t, \alpha_{*\alpha}, b, \lambda_T, \bar{\lambda}_{\alpha}, R_*);$$

$$\tilde{q}_c = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{c\alpha}, \bar{q}_{c\alpha}], \quad q_{c\alpha} = \inf_{\substack{R_* \in [R_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}] \\ b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_q(\lambda_\alpha, b, R_*), \quad \bar{q}_{c\alpha} = \sup_{\substack{R_* \in [R_{*\alpha}, \bar{R}_{*\alpha}] \\ b \in [b_\alpha, \bar{b}_\alpha]}} F_q(\bar{\lambda}_\alpha, b, R_*),$$

применение которых в практике технологических расчетов создает возможности более корректного учета факторов реального разброса исходных данных.

6.4. Нечетко-множественные оценки характеристик теплообмена пульсирующего потока с вибрирующей перфорированной стенкой при учете вдувания газа-охладителя

Решение ряда конструкторских заданий, прежде в всего в области энергетики и создания новой аэрокосмической техники, связано с проблемами теплозащиты высокотемпературных поверхностей, испытывающих, в частности, действие потоков горячей плазмы [99, 280], эффективно решаемыми на основе создания технических систем пористого охлаждения. Их проектирование и разработка сегодня относятся к числу перспективных инновационных технических решений.

С принципиальной точки зрения [99, 280] в пористых системах теплозащиты используются комплексные механизмы создания внешних потоков газового охлаждения и вдувания газа через пористые стенки изнутри охлаждаемого объекта, а непосредственно процесс охлаждения базируется на теплоотдаче к фильтрующемуся в направлении внешней поверхности через поры газовому потоку от пористого материала, и на диффузии газа, прошедшего через пористое покрытие в поверхностный приграничный слой, влекущей оттеснение и ослабление плазменных потоков. Отмеченными в работах [99, 280] исследованиями показано, что при эквивалентных параметрах пропускания и вдувания газового потока, вдувание через теплозащитное покрытие, перфорированное цилиндрическими каналами, гораздо менее эффективно, чем вдувание газа через стенку пористого покрытия. Это связано с уменьшением интенсивности теплоотдачи от поверхностей каналов перфорации, с нарастанием эффектов турбулентности в смешивающемся приграничном составном потоке после выхода вдуваемого изнутри газа через систему перфорированных каналов, менее выраженных в случае потока у поверхности пористого покрытия.

В математических моделях данных процессов, обладающих крайне высокой мерой неконтрастности (разбросов значений исходных физико-механических параметров), система соотношений, описывающих процессы тепломассообмена при прохождении вдуваемого охлаждающего газа через пористые материалы [99] с максимальной газопроницаемостью, обеспечивающей оптимизированный показатель расхода охладителя $K = \alpha^{-1}$, замыкается уравнением движения газа через каркас пористого фильтрующего материала. Данное уравнение может быть записано в виде

$$\alpha\mu V + \beta\rho V|V| + \partial P / \partial z = 0 \quad (6.123)$$

и содержит в качестве параметров инерционный коэффициент β , вязкостный коэффициент α , коэффициент динамической вязкости μ , а также давление P , скорость V и плотность ρ газового потока. Обозначение z введено для пространственной координаты вдоль направления фильтрации в рассматриваемой пористой среде.

В рамках предположения [99] об изотермическом состоянии газа во всех точках по толщине стенки пористого покрытия, а также о возможности использования приближенных соотношений

$$(\rho V)_w = \rho V \Pi = G_w / S \quad (6.124)$$

с параметрами показателя расхода газа G_w , площади поперечного сечения S и объемной пористости Π , в качестве результата из (6.123) путем его интегрирования можно получить выражение, позволяющее, далее, определять значения коэффициентов α , β :

$$\beta R T h (\rho V)_w^2 + \alpha \mu R T h (\rho V)_w - \Pi (P_k^2 - P_e^2) / 2 = 0. \quad (6.125)$$

В соотношение (6.125), помимо введенных ранее, содержатся также параметры давления во внешнем газовом потоке P_e и во внутренней камере вдувания P_k , показателя температуры T и универсальной газовой постоянной R . С использованием двух рядов экспериментальных данных $\{T_1, (\rho V_1)_w, P_{k1}, P_{e1}\}$, $\{T_2, (\rho V_2)_w, P_{k2}, P_{e2}\}$ можно получить

$$\alpha = (\Pi / (2\mu h R \rho_w)) [(P_{k2}^2 - P_{e2}^2) V_1^2 - (P_{k1}^2 - P_{e1}^2) V_2^2] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}, \quad (6.126)$$

$$\beta = (\Pi / (2\mu h R \rho_w^2)) [(P_{k1}^2 - P_{e1}^2) V_2 - (P_{k2}^2 - P_{e2}^2) V_1] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}.$$

Для удобства последующего анализа соотношения (6.126) могут быть представлены в форме

$$\alpha = \zeta [\tau_2 V_1^2 - \tau_1 V_2^2] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}, \quad \beta = \xi [\tau_1 V_2 - \tau_2 V_1] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}, \quad (6.127)$$

$$\zeta = \Pi / (2\mu h R \rho_w), \quad \xi = \Pi / (2\mu h R \rho_w^2), \quad \tau_1 = P_{k1}^2 - P_{e1}^2, \quad \tau_2 = P_{k2}^2 - P_{e2}^2.$$

Использовании представлений (6.126) предполагает, что при всех возможных разбросах для значений V_1, V_2 обеспечивается выполнение условия $V_1 > V_2$.

К числу представляющих, в первую очередь, интерес соотношениях для описания моделируемых процессов [99], относятся представление параметра вдувания газа

$$B = (\rho V)_w / (\alpha_T / c_p)_0; \quad (6.128)$$

и параметр пропорции тепловых потоков в пористую стенку-покрытие при вдувании q и без вдувания q_0 газа-охлаждителя

$$\Psi = q / q_0. \quad (6.129)$$

Через введенные параметры записывается ряд альтернативных вариантов аппроксимационных явных соотношений теплового обмена [99]:

$$\Psi = 1 - 0,67 (M_e / M_w)^{0,25} B; \quad (6.130)$$

$$\Psi = 1 - (M_e / M_w)^{0,25} \exp[(0,2303(-0,45 + 0,3B))]; \quad (6.131)$$

$$\Psi = 1 - 0,19 (M_e / M_w)^{0,35} B; \quad (6.132)$$

$$\Psi = \exp[-0,37 (M_e / M_w)^{-0,7} B], \quad (6.133)$$

а также соотношение неявного типа

$$\Psi = (2((St / St_0)(M_w / M_e)(T_e / T_\alpha))^{1/2} (1 - B / B_k) - 1)^2. \quad (6.134)$$

Дополнительными экзогенными параметрами в соотношениях (6.127) – (6.134) являются локальный коэффициент теплоотдачи α_T , молекулярный вес вдуваемого газа M_w , молекулярный вес газа во внешнем набегающем охлаждающем потоке M_e и температура адиабатической стенки-покрытия. Кроме того, в соотношениях фигурируют Стэнтона St и St_0 (индекс 0 отвечает значениям

параметров в отсутствие вдувания охладителя через пористую стенку), а также параметр B_k , имеющий выражение

$$B_k = T_e [\arccos((2 - \Psi)/\Psi)]^2 / (T_\alpha (\Psi - 1)). \quad (6.135)$$

Как указано в работе [99], в моделях рассматриваемого типа может использоваться представление

$$St = 0.0128 Re_{**}^{-0.25} Pr^{-0.75}, \quad (6.136)$$

где обозначение Re_{**} вводится для числа Рейнольдса, рассчитываемого по толщине зоны потери энергии.

Согласно [99], различные версии соотношений (6.127) – (6.134) получили инженерное применение при расчетах систем активной тепловой защиты летательных аппаратов, при расчетах режимов турбулентного теплообмена в каналах плазмотронов с проницаемыми стенками. На основе выполненных прикладных исследований сформулирован принципиальный вывод о том, что при создании газовых завес и вдувании условием эффективного охлаждения является формирование пограничного слоя [45]. Эффективность отеснения набегающего потока при вдувании через пористые поверхности характеризуются параметром расстояния от поверхности пористой стенки до разделяющей линии тока. Так, в случае вдувания газа через цилиндрическую пористую поверхность с диаметром d координату разделяющей линии тока z может найти из соотношения

$$z = (\pi d / 4) (V_w / V_e) (\rho_w / \rho_e)^{1/2}. \quad (6.137)$$

Эффективным приемом расчетного моделирования исследуемых процессов является применение асимптотических соотношений теории пограничного слоя, на основе которых, в частности, возможно определение критического значения параметра вдувания B

$$B^* = St_0 (\rho V)_w / (\rho V)_e. \quad (6.138)$$

Роль данного параметра состоит, помимо прочего, в том, что, согласно [99], соотношение $B > B^*$ представляет собой условие формирования слоя отеснения набегающего потока с нарастающими турбулентными пульсациями скорости, и

условие отсутствия продольной компоненты скорости. Для величины B^* получены представления

$$B^* = (1 - \zeta)^{-1} [\ln((1 + (1 - \zeta)^{1/2}) / (1 - (1 - \zeta)^{1/2}))^2], \quad \zeta < 1; \quad (6.139)$$

$$B^* = (1 - \zeta)^{-1} [\arccos((2 - \zeta) / \zeta)]^2, \quad \zeta > 1; \quad \zeta = \rho_e / \rho_w.$$

Виду отмеченного выше свойства высокой степени неконтрастности экзогенных параметров моделей тепломассобменных процессов в технических системах пористого охлаждения, связанной разбросами данных экспериментальных замеров их тепловых и физико-механических характеристик, нестатистическим характером соответствующих данных, представленных малочисленными неоднородными выборками, возможным способом решения проблемы учета факторов неопределенности в рассматриваемых моделях является применение методов теории нечетких множеств. Для имеющих разбросы значений экзогенных параметров вводятся представления нечеткими трапецеидальными интервалами с заданием соответствующих кортежей реперных значений.

Так, при расчете нечетко-множественного вязкостного коэффициента $\tilde{\alpha}$ из соотношения (6.126) и нечетко-множественного инерционного коэффициента $\tilde{\beta}$ в уравнении (6.123), для соответствующих экзогенных параметров с разбросами записываются представления

$$\tilde{P}_{k1} = (P_{k11}, P_{k12}, P_{k13}, P_{k14}), \quad \tilde{P}_{k2} = (P_{k21}, P_{k22}, P_{k23}, P_{k24}), \quad (6.140)$$

$$\tilde{P}_{e1} = (P_{e11}, P_{e12}, P_{e13}, P_{e14}), \quad \tilde{P}_{e2} = (P_{e21}, P_{e22}, P_{e23}, P_{e24}), \quad \tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \quad \tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4),$$

$$\tilde{\Pi} = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4), \quad \tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{V}_1 = (V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}), \quad \tilde{V}_2 = (V_{21}, V_{22}, V_{23}, V_{24}).$$

С использованием представлений (6.140) и на основе применения стандартной арифметики нечетких трапецеидальных интервалов получены нечетко-интервальные представления для расчетных характеристик $\tilde{\zeta}$, $\tilde{\xi}$, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$:

$$\tilde{\zeta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\alpha], \quad \underline{\zeta}_\alpha = (1 - \alpha)\zeta_1 + \alpha\zeta_2, \quad \bar{\zeta}_\alpha = \alpha\zeta_3 + (1 - \alpha)\zeta_4, \quad (6.141)$$

$$\tilde{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = (\Pi_1 / (2R\mu_4 h_4 \rho_4), \Pi_2 / (2R\mu_3 h_3 \rho_3), \Pi_3 / (2R\mu_2 h_2 \rho_2), \Pi_4 / (2R\mu_1 h_1 \rho_1));$$

$$\tilde{\xi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\xi}_\alpha, \bar{\xi}_\alpha], \quad \underline{\xi}_\alpha = (1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2, \quad \bar{\xi}_\alpha = \alpha\xi_3 + (1-\alpha)\xi_4, \quad (6.142)$$

$$\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = (\Pi_1 / (2R\mu_4 h_4 \rho_4^2), \Pi_2 / (2R\mu_3 h_3 \rho_3^2), \Pi_3 / (2R\mu_2 h_2 \rho_2^2), \Pi_4 / (2R\mu_1 h_1 \rho_1^2));$$

$$\tilde{\tau}_1 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tau}_{1\alpha}, \bar{\tau}_{1\alpha}], \quad \underline{\tau}_{1\alpha} = (1-\alpha)\tau_{11} + \alpha\tau_{12}, \quad \bar{\tau}_{1\alpha} = \alpha\tau_{13} + (1-\alpha)\tau_{14}, \quad (6.143)$$

$$\tilde{\tau}_1 = (P_{k11}^2 - P_{e11}^2, P_{k12}^2 - P_{e12}^2, P_{k13}^2 - P_{e13}^2, P_{k14}^2 - P_{e14}^2) = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{14});$$

$$\tilde{\tau}_2 = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\tau}_{2\alpha}, \bar{\tau}_{2\alpha}], \quad \underline{\tau}_{2\alpha} = (1-\alpha)\tau_{21} + \alpha\tau_{22}, \quad \bar{\tau}_{2\alpha} = \alpha\tau_{23} + (1-\alpha)\tau_{24}, \quad (6.144)$$

$$\tilde{\tau}_2 = (P_{k21}^2 - P_{e21}^2, P_{k22}^2 - P_{e22}^2, P_{k23}^2 - P_{e23}^2, P_{k24}^2 - P_{e24}^2) = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{24}).$$

Далее, при использовании свойств $\partial\alpha/\partial\tau_2 > 0$, $\partial\alpha/\partial\tau_1 < 0$, $\partial\beta/\partial\tau_2 > 0$, $\partial\beta/\partial\tau_1 < 0$, устанавливаемых с учетом вытекающих из ограничений $V_1 > V_2$, и с применением α -уровневой модифицированной версии эвристического принципа расширения, в конечном счете, записываются итоговые версии нечетко-множественных описаний для вязкостного и инерционного коэффициентов:

$$\tilde{\alpha} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{\alpha}_\alpha, \bar{\alpha}_\alpha], \quad (6.145)$$

$$\underline{\alpha}_\alpha = \inf_{\substack{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\alpha] \\ V_1 \in [V_{1\alpha}, \bar{V}_{1\alpha}] \\ V_2 \in [V_{2\alpha}, \bar{V}_{2\alpha}]}} \zeta [\underline{\tau}_{2\alpha} V_1^2 - \bar{\tau}_{1\alpha} V_2^2] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}, \quad \bar{\alpha}_\alpha = \sup_{\substack{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\alpha] \\ V_1 \in [V_{1\alpha}, \bar{V}_{1\alpha}] \\ V_2 \in [V_{2\alpha}, \bar{V}_{2\alpha}]}} \zeta [\bar{\tau}_{2\alpha} V_1^2 - \underline{\tau}_{1\alpha} V_2^2] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1};$$

$$\tilde{\beta} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{\beta}_\alpha, \bar{\beta}_\alpha],$$

$$\underline{\beta}_\alpha = \inf_{\substack{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\alpha] \\ V_1 \in [V_{1\alpha}, \bar{V}_{1\alpha}] \\ V_2 \in [V_{2\alpha}, \bar{V}_{2\alpha}]}} \zeta [\underline{\tau}_{2\alpha} V_1 - \bar{\tau}_{1\alpha} V_2] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}, \quad \bar{\beta}_\alpha = \sup_{\substack{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \bar{\zeta}_\alpha] \\ V_1 \in [V_{1\alpha}, \bar{V}_{1\alpha}] \\ V_2 \in [V_{2\alpha}, \bar{V}_{2\alpha}]}} \zeta [\bar{\tau}_{2\alpha} V_1 - \underline{\tau}_{1\alpha} V_2] [V_1 V_2 (V_1 - V_2)]^{-1}.$$

При получении нечетко-множественных обобщений для соотношений (6.127), (6.129) – (6.132), (4.135) – (4.137) вводятся нечетко-интервальные представления экзогенных параметров

$$\tilde{V}_w = (V_{w1}, V_{w2}, V_{w3}, V_{w4}), \quad \tilde{V}_e = (V_{e21}, V_{e22}, V_{e23}, V_{e24}), \quad \tilde{\rho}_w = (\rho_{w1}, \rho_{w2}, \rho_{w3}, \rho_{w4}), \quad \tilde{\rho}_e = (\rho_{e1}, \rho_{e2}, \rho_{e3}, \rho_{e4}),$$

$$\tilde{M}_w = (M_{w1}, M_{w2}, M_{w3}, M_{w4}), \quad \tilde{M}_e = (M_{e1}, M_{e2}, M_{e3}, M_{e4}), \quad \tilde{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4), \quad \tilde{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4),$$

$$\tilde{\alpha}_T = (\alpha_{T1}, \alpha_{T2}, \alpha_{T3}, \alpha_{T4}), \quad \tilde{c}_p = (c_{p1}, c_{p2}, c_{p3}, c_{p4}), \quad \tilde{\alpha}_{T0} = (\alpha_{T01}, \alpha_{T02}, \alpha_{T03}, \alpha_{T04}), \quad \tilde{c}_{p0} = (c_{p01}, c_{p02}, c_{p03}, c_{p04}),$$

$$\tilde{St} = (St_1, St_2, St_3, St_4), \quad \tilde{St}_0 = (St_{01}, St_{02}, St_{03}, St_{04}), \quad \tilde{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

$$\tilde{Re}_{**} = (Re_1, Re_2, Re_3, Re_4), \quad Pr = (Pr_1, Pr_2, Pr_3, Pr_4), \quad \tilde{B}^* = (B_{*1}, B_{*2}, B_{*3}, B_{*4}),$$

и с учетом оценок $\partial\Psi/\partial M_e < 0$, $\partial\Psi/\partial M_w > 0$, $\partial\Psi/\partial B < 0$, $\partial z/\partial d > 0$, $\partial z/\partial V_w > 0$, $\partial z/\partial V_e < 0$, $\partial z/\partial \rho_w > 0$, $\partial z/\partial \rho_e < 0$, вышеуказанные соотношения записываются в форме:

$$\tilde{\Psi} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [1 - 0,67(\overline{M}_{e\alpha} / \underline{M}_{w\alpha})^{0,25} \overline{B}_\alpha, 1 - 0,67(\underline{M}_{e\alpha} / \overline{M}_{w\alpha})^{0,25} \underline{B}_\alpha]; \quad (6.146)$$

$$\tilde{\Psi} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [1 - (\overline{M}_{e\alpha} / \underline{M}_{w\alpha})^{0,25} \exp((0,2303(-0,45 + 0,3\overline{B}_\alpha))), 1 - (\underline{M}_{e\alpha} / \overline{M}_{w\alpha})^{0,25} \exp((0,2303(-0,45 + 0,3\underline{B}_\alpha)))];$$

$$\tilde{\Psi} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [1 - 0,19(\overline{M}_{e\alpha} / \underline{M}_{w\alpha})^{0,35} \overline{B}_\alpha, 1 - 0,19(\underline{M}_{e\alpha} / \overline{M}_{w\alpha})^{0,35} \underline{B}_\alpha];$$

$$\tilde{\Psi} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\exp[-0,37(\overline{M}_{e\alpha} / \underline{M}_{w\alpha})^{-0,7} \overline{B}_\alpha], \exp[-0,37(\underline{M}_{e\alpha} / \overline{M}_{w\alpha})^{-0,7} \underline{B}_\alpha]];$$

$$\tilde{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4) = (\rho_{w1} c_{p01} V_{w1} / \alpha_{T4}, \rho_{w2} c_{p02} V_{w2} / \alpha_{T3}, \rho_{w3} c_{p03} V_{w3} / \alpha_{T2}, \rho_{w4} c_{p04} V_{w4} / \alpha_{T1});$$

$$\tilde{z} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [(\pi d_\alpha / 4)(V_{w\alpha} / \overline{V}_{e\alpha})(\underline{\rho}_{w\alpha} / \overline{\rho}_{e\alpha})^{1/2}, (\pi d_\alpha / 4)(\overline{V}_{w\alpha} / \underline{V}_{e\alpha})(\overline{\rho}_{w\alpha} / \underline{\rho}_{e\alpha})^{1/2}],$$

где

$$\underline{M}_{w\alpha} = (1 - \alpha)M_{w1} + \alpha M_{w2}, \quad \overline{M}_{w\alpha} = \alpha M_{w3} + (1 - \alpha)M_{w4};$$

$$\underline{M}_{e\alpha} = (1 - \alpha)M_{e1} + \alpha M_{e2}, \quad \overline{M}_{e\alpha} = \alpha M_{e3} + (1 - \alpha)M_{e4};$$

$$\underline{B}_\alpha = (1 - \alpha)B_1 + \alpha B_2, \quad \overline{B}_\alpha = \alpha B_3 + (1 - \alpha)B_4.$$

Для соотношения (6.135) нечетко-множественное обобщение записывается в форме

$$\tilde{St} = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [0,0128 \overline{\text{Re}}_{**\alpha}^{-0,25} \overline{\text{Pr}}_\alpha^{-0,75}, 0,0128 \underline{\text{Re}}_{**\alpha}^{-0,25} \underline{\text{Pr}}_\alpha^{-0,75}], \quad (6.147)$$

$$\underline{\text{Re}}_{**\alpha} = (1 - \alpha)\text{Re}_1 + \alpha \text{Re}_2, \quad \overline{\text{Re}}_{**\alpha} = \alpha \text{Re}_3 + (1 - \alpha)\text{Re}_4; \quad \underline{\text{Pr}}_\alpha = (1 - \alpha)\text{Pr}_1 + \alpha \text{Pr}_2, \quad \overline{\text{Pr}}_\alpha = \alpha \text{Pr}_3 + (1 - \alpha)\text{Pr}_4.$$

Для играющего принципиальную роль в рекомендациях по результатам анализа рассматриваемых моделей критического значения параметра вдувания через пористую поверхность B^* , с учетом неконтрастности параметров моделирования, в рамках нечетко-множественного подхода могут быть получены следующие представления.

В случае выполнения свойства $\tilde{\rho}_e < \tilde{\rho}_w$, устанавливаемого с применением описанных в разделе 1 диссертационной работы способов сравнения нечетких интервалов $\tilde{\rho}_e$, $\tilde{\rho}_w$, нечетко-множественный параметр \tilde{B}^* имеет вид

$$\tilde{B}^* = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{B}_\alpha^*, \overline{B}_\alpha^*], \quad (6.148)$$

$$\underline{B}_\alpha^* = \inf_{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \overline{\zeta}_\alpha]} (1-\zeta)^{-1} [\ln((1+(1-\zeta)^{1/2})/(1-(1-\zeta)^{1/2})))]^2, \quad \overline{B}_\alpha^* = \sup_{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \overline{\zeta}_\alpha]} (1-\zeta)^{-1} [\ln((1+(1-\zeta)^{1/2})/(1-(1-\zeta)^{1/2})))]^2.$$

При этом $\tilde{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) = (\tilde{\rho}_{e1} / \tilde{\rho}_{w4}, \tilde{\rho}_{e2} / \tilde{\rho}_{w3}, \tilde{\rho}_{e3} / \tilde{\rho}_{w2}, \tilde{\rho}_{e4} / \tilde{\rho}_{w1}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\zeta}_\alpha, \overline{\zeta}_\alpha]$,

$$\underline{\zeta}_\alpha = (1-\alpha)\zeta_1 + \alpha\zeta_2, \quad \overline{\zeta}_\alpha = \alpha\zeta_3 + (1-\alpha)\zeta_4.$$

В случае же выполнения свойства $\tilde{\rho}_e > \tilde{\rho}_w$ параметр \tilde{B}^* определяется представлением

$$\tilde{B}^* = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{B}_\alpha^*, \overline{B}_\alpha^*], \quad (6.149)$$

$$\underline{B}_\alpha^* = \inf_{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \overline{\zeta}_\alpha]} (1-\zeta)^{-1} [\arccos((2-\zeta)/\zeta)]^2, \quad \overline{B}_\alpha^* = \sup_{\zeta \in [\underline{\zeta}_\alpha, \overline{\zeta}_\alpha]} (1-\zeta)^{-1} [\arccos((2-\zeta)/\zeta)]^2.$$

Для определения нечетко-множественного значения параметра скорости вдувания газа, отвечающей критическим показателям \tilde{B}^* , при задаваемой скорости V_e набегающего потока и задаваемых плотностях ρ_e, ρ_w набегающего и вдуваемого газов на основе следующего из (6.137) соотношения детерминистической версии модели

$$V_w = (\rho_e V_e B^*) / (St_0 \rho_w). \quad (6.150)$$

получено учитывающее неконтрастность экзогенных параметров нечетко-множественное представление

$$\begin{aligned} \tilde{V}_w &= (V_{w1}, V_{w2}, V_{w3}, V_{w4}) = & (6.151) \\ &= ((\rho_{e1} V_{e1} B_1^*) / (St_{04} \rho_{w4}), (\rho_{e2} V_{e2} B_2^*) / (St_{03} \rho_{w3}), (\rho_{e3} V_{e3} B_3^*) / (St_{02} \rho_{w2}), (\rho_{e4} V_{e4} B_4^*) / (St_{01} \rho_{w1})) . \end{aligned}$$

В рамках выполненных исследований дана также разработка методов нечетко-множественного анализа эффектов неконтрастности исходных параметров в расчетных моделях технических систем пористого охлаждения с учетом циклических пульсаций с частотой f [рад/с] в обтекающем и вдуваемом и потоках охлаждающего газа, для которых аппроксимационные соотношения детерминистических версий, описывающие потоки тепла в обтекаемой турбулентной газовой струей пористой стенке, имеют вид

$$St / St_0 = \gamma \xi / (1 + (2\gamma / Pr)\eta - \xi), \quad St = q_w [(\rho V)_e (h_e - h_w)]^{-1}, \quad St_0 = (\alpha_* / c_p)_0 / (\rho V)_e, \quad (6.152)$$

$$\eta = \exp(\gamma / (1 + Pr)), \quad \xi = \exp(\gamma(1 - Pr) / (1 + Pr)), \quad \gamma = (\rho V)_w [(\rho V)_e St_0]^{-1}, \quad Pr = c_p \mu / \lambda.$$

С применением этих представлений далее записывается выражение

$$q_w = (\rho V)_e (h_e - h_w) \xi_b / (1 + (2b / Pr)\eta_b - \xi_b), \quad (6.153)$$

где

$$\eta_b = \exp(b / (1 + Pr)), \quad \xi_b = \exp(b(1 - Pr) / (1 + Pr)), \quad h_w = c_{p*} T_{1w}, \quad c_{p*} = a_1 + 2a_2 T_{2w},$$

$$b = (\rho V)_w / (\alpha_* / c_p)_0, \quad (\alpha_* / c_p)_0 = (\alpha_* / c_p) (1 + (A \cos(ft)) / (\alpha_* / c_p)_n).$$

Параметрами записанных выше представлений являются также коэффициент теплоемкости c_p [Дж/(кг·К)], амплитуда пульсаций потока A [кг/(с·м²)], коэффициент вязкости в законе Дарси α_* [м²], коэффициент теплопроводности λ [Вт/(м·К)], конвективный поток тепла из вдуваемого газа q_w [Вт/м²], расход вдуваемого в поры охлаждающего газа $(\rho V)_w$ [кг/(с·м²)], коэффициент динамической вязкости μ [кг/(м·с)], плотность газа ρ [кг/м³], коэффициент теплообмена при наличии пульсаций $(\alpha_* / c_p)_0$ [кг/(с·м²)], коэффициент теплообмена в отсутствие пульсаций $(\alpha_* / c_p)_n$ [кг/(с·м²)], инерционный коэффициент вязкости в законе Дарси β [м⁻¹], эмпирические постоянные a_1, a_2 , температурные параметры T_{1w}, T_{2w} [К], параметры энтальпии h_e, h_w [Дж/кг], число Стэнтона St , число Прандтля Pr . Параметр эффективной вязкости в законе Дарси μ_{eff} [кг/(м·с)] для рассматриваемой модели [99] допускает описание $\mu_{eff} = (1 + C \cos ft)$, в котором C – безразмерный эмпирический параметр. В вышеприведенных соотношениях w – индекс, идентифицирующий разогретую внешнюю обтекаемую поверхность, а индексом e отмечаются характеристики для набегающего потока у внешней кромки пограничного слоя.

При дополнительном учете в рассматриваемой модели механических вибраций [99] на имеющих диаметр d охлаждаемых цилиндрических поверхностях, анализу, в первую очередь, подлежит влияние неконтрастности

экзогенных параметров на функцию теплообмена $Y = (q_+ - q_-)/q_-$. Исследуются факторы неопределенности в аппроксимационных зависимостях $Y = \Phi(B, J)$, содержащих в качестве аргументов параметр вдувания $B = 4G_w[\pi d^2(\alpha_*/c_p)]^{-1}$, параметр интенсивности колебаний учитываемых видов $J = 2(\pi f A)^2 \rho c$ [Вт/м²], амплитуду A и частоту f вибраций. Для различных уровней интенсивности и диапазонов изменения параметра вдувания, а также различных форм механических колебаний на охлаждаемой поверхности аппроксимационные соотношения могут задаваться в виде [99]:

– для тангенциальных вибраций при $2.83 \leq B \leq 6.89$,

$$J \in [1.75, 39.2][10^5 \text{ кг} \cdot \text{град}^2 \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{м}^{-2}];$$

– для продольных вибраций при $31.2 \leq B \leq 49.4$, $0.032 \leq J \leq 1.25$

$$Y = \Phi_1(B, J) = (0.046B - 1.376)J^{(0.0024B + 0.174)};$$

– для радиальных вибраций при $22.4 \leq B \leq 24.6$, $0.05 \leq J \leq 0.65$

$$Y = \Phi_2(B, J) = 0.668 - 0.032B + (0.007B - 0.243)J.$$

Нечетко-множественные обобщения методов исследования этих моделей также базируются на введении для неконтрастных исходных параметров нечетко-интервальных описаний

$$\tilde{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4); \tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) \tilde{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4); ; \quad (6.154)$$

$$\tilde{G}_w = (G_{w1}, G_{w2}, G_{w3}, G_{w4}); \tilde{\alpha}_* = (\alpha_{*1}, \alpha_{*2}, \alpha_{*3}, \alpha_{*4}); \tilde{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4); \tilde{c}_p = (c_{p1}, c_{p2}, c_{p3}, c_{p4}),$$

и получении с использованием аппарата арифметики нечетких трапецеидальных интервалов представлений для нечетко-множественных величин \tilde{J} и \tilde{B}

$$\tilde{J} = (J_1, J_2, J_3, J_4), J_n = 2\pi^2 c \rho_n f_n^2 A_n^2 \quad (n = \overline{1,4}); \quad (6.155)$$

$$\tilde{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4),$$

$$B_1 = (4/\pi)c_{p1}/(d_4^2\alpha_{*4}), B_2 = (4/\pi)c_{p2}/(d_3^2\alpha_{*3}), B_3 = (4/\pi)c_{p3}/(d_2^2\alpha_{*2}), B_4 = (4/\pi)c_{p4}/(d_1^2\alpha_{*1}).$$

С учетом вышеуказанных диапазонов изменения B, J находятся оценки

$$\partial\Phi_1(B, J)/\partial B > 0, \quad \partial\Phi_1(B, J)/\partial J < 0, \quad \partial\Phi_2(B, J)/\partial B < 0,$$

$$\partial\Phi_2(B, J)/\partial J < 0, \quad \partial\Phi_3(B, J)/\partial B > 0, \quad \partial\Phi_3(B, J)/\partial J < 0,$$

используемые в процессе перехода к нечетко-множественным аргументам в представлениях $Y = \Phi_j(B, J)$ на основе применения α -уровневой модифицированной версии принципа расширения. При этом, для линейных вибраций

$$\tilde{Y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Phi}_{1\alpha}, \overline{\Phi}_{1\alpha}], \quad \underline{\Phi}_{1\alpha} = \Phi_1(\underline{B}_\alpha, \underline{J}_\alpha), \quad \overline{\Phi}_{1\alpha} = \Phi_1(\overline{B}_\alpha, \overline{J}_\alpha), \quad (6.156)$$

$$\underline{B}_\alpha = (1-\alpha)B_1 + \alpha B_2, \quad \overline{B}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4; \quad \underline{J}_\alpha = (1-\alpha)J_1 + \alpha J_2, \quad \overline{J}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4;$$

в случае радиальных вибраций

$$\tilde{Y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Phi}_{2\alpha}, \overline{\Phi}_{2\alpha}], \quad \underline{\Phi}_{2\alpha} = \Phi_2(\overline{B}_\alpha, \overline{J}_\alpha), \quad \overline{\Phi}_{2\alpha} = \Phi_2(\underline{B}_\alpha, \underline{J}_\alpha), \quad (6.157)$$

$$\underline{B}_\alpha = (1-\alpha)B_1 + \alpha B_2, \quad \overline{B}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4; \quad \underline{J}_\alpha = (1-\alpha)J_1 + \alpha J_2, \quad \overline{J}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4;$$

при тангенциальных вибрациях

$$\tilde{Y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Phi}_{3\alpha}, \overline{\Phi}_{3\alpha}], \quad \underline{\Phi}_{3\alpha} = \Phi_3(\underline{B}_\alpha, \underline{J}_\alpha), \quad \overline{\Phi}_{3\alpha} = \Phi_3(\overline{B}_\alpha, \overline{J}_\alpha), \quad (6.158)$$

$$\underline{B}_\alpha = (1-\alpha)B_1 + \alpha B_2, \quad \overline{B}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4; \quad \underline{J}_\alpha = (1-\alpha)J_1 + \alpha J_2, \quad \overline{J}_\alpha = \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4.$$

С введением нечетко-интервальных представлений для неконтрастных исходных параметров

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_* &= (\alpha_{*1}, \alpha_{*2}, \alpha_{*3}, \alpha_{*4}), \quad \tilde{q}_w = (q_{w1}, q_{w2}, q_{w3}, q_{w4}), \quad \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad \tilde{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4), \\ \tilde{A} &= (A_1, A_2, A_3, A_4), \quad \tilde{c}_p = (c_{p1}, c_{p2}, c_{p3}, c_{p4}), \quad \tilde{St} = (St_1, St_2, St_3, St_4), \quad \tilde{Pr} = (Pr_1, Pr_2, Pr_3, Pr_4), \\ \tilde{V}_e &= (V_{e1}, V_{e2}, V_{e3}, V_{e4}), \quad \tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4), \quad (\tilde{\alpha}_* / \tilde{c}_p)_H = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4), \quad (\alpha_* / c_p)_H = \tilde{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4), \\ \tilde{f} &= (f_1, f_2, f_3, f_4), \quad \tilde{\rho}_w = (\rho_{w1}, \rho_{w2}, \rho_{w3}, \rho_{w4}), \quad \tilde{\rho}_e = (\rho_{e1}, \rho_{e2}, \rho_{e3}, \rho_{e4}), \quad \tilde{V}_w = (V_{w1}, V_{w2}, V_{w3}, V_{w4}), \\ \tilde{T}_{1w} &= (T_{1w1}, T_{1w2}, T_{1w3}, T_{1w4}), \quad \tilde{T}_{2w} = (T_{2w1}, T_{2w2}, T_{2w3}, T_{2w4}), \quad \tilde{c}_{p*} = (c_{p*1}, c_{p*2}, c_{p*3}, c_{p*4}), \quad (\alpha_* / c_p)_0 = \tilde{\varepsilon}, \\ \tilde{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}), \quad \tilde{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}), \quad \tilde{h}_e = (h_{e1}, h_{e2}, h_{e3}, h_{e4}), \quad \tilde{h}_w = (h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}, h_{w4}), \end{aligned}$$

строится нечетко-множественное обобщение для расчетного параметрического соотношения (6.153). Для этого реализуется поэтапное последовательное определение нечетких независимых характеристик модели и записываются представления:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{p*} &= (c_{p*1}, c_{p*2}, c_{p*3}, c_{p*4}) = (a_{11} + 2a_{21}T_{2w1}, a_{12} + 2a_{22}T_{2w2}, a_{13} + 2a_{23}T_{2w3}, a_{14} + 2a_{24}T_{2w4}); \\ \tilde{h}_w &= (h_{w1}, h_{w2}, h_{w3}, h_{w4}) = (c_{p*1}T_{1w1}, c_{p*2}T_{1w2}, c_{p*3}T_{1w3}, c_{p*4}T_{1w4}); \end{aligned}$$

$$\tilde{\chi} = \tilde{\rho}_e \tilde{V}_e (\tilde{h}_e - \tilde{h}_w) = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = (\tilde{\rho}_{e1} \tilde{V}_{e1} (\tilde{h}_{e1} - \tilde{h}_{w1}), \tilde{\rho}_{e2} \tilde{V}_{e2} (\tilde{h}_{e2} - \tilde{h}_{w2}), \tilde{\rho}_{e3} \tilde{V}_{e3} (\tilde{h}_{e3} - \tilde{h}_{w3}), \tilde{\rho}_{e4} \tilde{V}_{e4} (\tilde{h}_{e4} - \tilde{h}_{w4}));$$

$$\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \tilde{\rho}_w \tilde{V}_w = (\rho_{1w} V_{1w}, \rho_{2w} V_{2w}, \rho_{3w} V_{3w}, \rho_{4w} V_{4w});$$

$$\tilde{b}(t) = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [b(t)_\alpha, \overline{b(t)}_\alpha],$$

$$\underline{b(t)}_\alpha = \inf_{\substack{\delta \in [\underline{\delta}_\alpha, \overline{\delta}_\alpha] \\ A \in [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha] \\ f \in [\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha]}} \xi_\alpha \delta^{-1} (1 + A \delta^{-1} \cos ft)^{-1}, \quad \overline{b(t)}_\alpha = \sup_{\substack{\delta \in [\underline{\delta}_\alpha, \overline{\delta}_\alpha] \\ A \in [\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha] \\ f \in [\underline{f}_\alpha, \overline{f}_\alpha]}} \xi_\alpha \delta^{-1} (1 + A \delta^{-1} \cos ft)^{-1},$$

$$\underline{A}_\alpha = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2, \quad \overline{A}_\alpha = \alpha A_3 + (1 - \alpha)A_4, \quad \underline{\delta}_\alpha = (1 - \alpha)\delta_1 + \alpha \delta_2, \quad \overline{\delta}_\alpha = \alpha \delta_3 + (1 - \alpha)\delta_4, \\ \underline{f}_\alpha = (1 - \alpha)f_1 + \alpha f_2, \quad \overline{f}_\alpha = \alpha f_3 + (1 - \alpha)f_4; \quad \underline{\xi}_\alpha = (1 - \alpha)\xi_1 + \alpha \xi_2, \quad \overline{\xi}_\alpha = \alpha \xi_3 + (1 - \alpha)\xi_4.$$

Итоговое нечетко-множественное описание параметрической зависимости

$\tilde{q}_w(t)$ принимает вид

$$\tilde{q}_w(t) = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [q_w(t)_\alpha, \overline{q_w(t)}_\alpha], \quad (6.159)$$

$$\underline{q_w(t)}_\alpha = \inf_{\substack{\chi \in [\underline{\chi}_\alpha, \overline{\chi}_\alpha] \\ \text{Pr} \in [\underline{\text{Pr}}_\alpha, \overline{\text{Pr}}_\alpha] \\ b(t) \in [\underline{b(t)}_\alpha, \overline{b(t)}_\alpha]}} \chi \exp(b(1 - \text{Pr})/(1 + \text{Pr})) / (1 + (2b/\text{Pr}) \exp(b/(1 + \text{Pr})) - \exp(b(1 - \text{Pr})/(1 + \text{Pr}))),$$

$$\overline{q_w(t)}_\alpha = \sup_{\substack{\chi \in [\underline{\chi}_\alpha, \overline{\chi}_\alpha] \\ \text{Pr} \in [\underline{\text{Pr}}_\alpha, \overline{\text{Pr}}_\alpha] \\ b(t) \in [\underline{b(t)}_\alpha, \overline{b(t)}_\alpha]}} \chi \exp(b(1 - \text{Pr})/(1 + \text{Pr})) / (1 + (2b/\text{Pr}) \exp(b/(1 + \text{Pr})) - \exp(b(1 - \text{Pr})/(1 + \text{Pr}))),$$

$$\underline{\chi}_\alpha = (1 - \alpha)\chi_1 + \alpha \chi_2, \quad \overline{\chi}_\alpha = \alpha \chi_3 + (1 - \alpha)\chi_4, \quad \underline{\text{Pr}}_\alpha = (1 - \alpha)\text{Pr}_1 + \alpha \text{Pr}_2, \quad \overline{\text{Pr}}_\alpha = \alpha \text{Pr}_3 + (1 - \alpha)\text{Pr}_4.$$

Предложенные методы повышают меру учета факторов неопределенности в рассматриваемых моделях, заключающихся в существенных разбросах значительного числа экзогенных параметров моделирования в отсутствие статистической базы данных о характере этих разбросов. Разработка этих методов является инструментом в реализации фундаментальных поисковых и прикладных конструкторских предпроектных исследований по инновационным проблемам термостабилизации функционирующих в высокотемпературных режимах технических систем.

6.5. Нечетко-множественные подходы к учету факторов неопределенности в расчетах тепловых экранов с теплоотражающими и теплоизолирующими слоями

К актуальным современным заданиям в области развития методов исследований математических моделей, описывающих функционирование систем термостабилизации, принадлежит и проблема учета значительной степени неконтрастности для экзогенных параметров в моделях экранирования тепловых излучений от нагретых поверхностей [25,111, 142]. В качестве характеристик эффективности функционирования тепловых экранов используются показатели степени экранирования μ , кратности ослабления теплового потока m , а также коэффициент эффективности экранирования η . Для однослойного плоского теплозащитного металлического экрана, характеризующегося пренебрежимо малым сопротивлением теплопроводности, указанные параметры имеют представления соотношениями

$$\mu = T_1/T_3, \quad m = q_{1,2}/q_{1,3}, \quad \eta = (q_{1,2} - q_{3,2})/q_{1,2}, \quad (6.160)$$

в которых фигурируют параметры температуры экрана T_3 [K], температуры излучающей поверхности T_1 [K], а также показатели плотности тепловых потоков до установки и после установки теплового экрана $q_{1,2}$, $q_{1,3}$ [Вт/м²]. Для двух параллельных плоскостей с температурой облучаемой поверхности T_2 и температурой излучающей поверхности T_1 при отсутствии между ними экрана

$$q_{1,2} = \varepsilon_{1,2} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4), \quad (6.161)$$

где $\varepsilon_{1,2}$ – приведенный показатель степени черноты для системы «поверхность приемника излучения 2 со степенью черноты ε_2 – поверхность источника излучения 1 со степенью черноты ε_1 », имеющий выражение

$$\varepsilon_{1,2} = (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} - 1)^{-1}; \quad (6.162)$$

$\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8}$ [Вт/(м² · К⁴)] - постоянная Больцмана.

Согласно прикладной расчетной модели эндогенный параметр T_3 температуры экрана имеет представление

$$T_{\text{э}} = (\varepsilon_{1,\text{э}} T_1^4 + \varepsilon_{1,\text{э}}^{-1} T_*^4)^{1/4}, \quad (6.163)$$

котором параметром T_* является температура в области между излучающей поверхностью и экраном, заполненной газообразной средой.

Элементами реальных технических систем являются многослойные тепловые экраны. Они представляют собой многослойные тонкостенные конструкции, наружные элементы которых изготавливаются из металлического листа, а пространство между слоями для улучшения теплозащитных свойств и снижения конвективного теплообмена между слоями имеет заполнение в виде пакета рядов гофрированной или гладкой алюминиевой фольги (альфоля) с межслойными зазорами до 5 мм [25].

Плотности тепловых потоков на имеющих температуры $T_{\text{э}i}$ поверхностях экранирующих слоев и на тепловоспринимающей поверхности в расчетной детерминистической модели [25] многослойного тонкостенного теплового экрана, размещаемого между излучающей поверхностью (1) температуры T_1 и тепловоспринимающей поверхностью (2) температуры T_2 описываются соотношениями

$$q_{1,\text{э}1} = \varepsilon_{1,\text{э}1} \sigma_0 (T_1^4 - T_{\text{э}1}^4), \quad q_{\text{э}1,\text{э}2} = \varepsilon_{\text{э}1,\text{э}2} \sigma_0 (T_{\text{э}1}^4 - T_{\text{э}2}^4), \dots, \\ q_{\text{э}i,\text{э}(i+1)} = \varepsilon_{\text{э}i,\text{э}(i+1)} \sigma_0 (T_{\text{э}i}^4 - T_{\text{э}(i+1)}^4), \dots, q_{\text{э}n,2} = \varepsilon_{\text{э}n,2} \sigma_0 (T_{\text{э}n}^4 - T_2^4), \quad \varepsilon_{\text{э}i,\text{э}(i+1)} = (\varepsilon_{\text{э}i}^{-1} + \varepsilon_{\text{э}(i+1)}^{-1} - 1)^{-1},$$

в которых $h_{\text{э},i}$ – толщины слоев L_i ($i = \overline{1,n}$) из материалов, имеющих параметры теплопроводности $\lambda_{\text{э},i}$ и пренебрежимо малые тепловые сопротивления $R_{\text{э},i} = h_{\text{э},i} / \lambda_{\text{э},i}$. При стационарных режимах [25] в случае $q_{1,\text{э}1} = q_{\text{э}1,\text{э}2} = q_{\text{э}2,\text{э}3} = \dots = q_{\text{э}i,\text{э}(i+1)} = \dots = q_{\text{э}n,2}$ эндогенный параметр потока тепла на тепловоспринимающую поверхность, расположенную за рассматриваемым многослойным экраном, описывается выражением

$$q_{\text{э},2} = Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\text{э}i}, T_1, T_2) = \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\text{э}i}^{-1} - (n+1))^{-1}. \quad (6.164)$$

При этом температуры экранных поверхностей $T_{\text{э}i}$ имеют вид

$$T_{\text{э}i} = F_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\text{э}i}, T_1, T_2) = (T_1^4 - (T_1^4 - T_2^4) \cdot (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_{\text{э}i}^{-1} - 1) (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\text{э}i}^{-1} - (n+1))^{-1})^{1/4},$$

$$T_{32} = F_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{3i}, T_1, T_2) = (T_1^4 - (T_1^4 - T_2^4) \cdot (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_{31}^{-1} + \varepsilon_{32}^{-1} - 2))(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{3i}^{-1} - (n+1))^{-1/4}, \dots,$$

$$T_{3k} = F_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{3i}, T_1, T_2) = (T_1^4 - (T_1^4 - T_2^4) \cdot (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_{3k}^{-1} + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \varepsilon_{3j}^{-1} - k))(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{3i}^{-1} - (n+1))^{-1/4}, \dots,$$

$$T_{3n} = F_n(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{3i}, T_1, T_2) = (T_1^4 - (T_1^4 - T_2^4) \cdot (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_{3n}^{-1} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_{3j}^{-1} - n))(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{3i}^{-1} - (n+1))^{-1/4}.$$

Характеристики эффективности защитных качеств теплового экрана, в соответствии с представлениями (6.160), имеют описания

$$\eta = F_\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{3i}) = (2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_{3j}^{-1} - n)(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{3i}^{-1} - (n+1))^{-1}, \quad (6.165)$$

$$m = F_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{3i}) = 1 + (2 \sum_{j=1}^n \varepsilon_{3j}^{-1} - n)(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} - 1)^{-1},$$

$$\mu = F_\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{3i}, T_1, T_2) = T_1(T_1^4 - (T_1^4 - T_2^4)(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_{3n}^{-1} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_{3j}^{-1} - n) \cdot (\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1} + 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_{3i}^{-1} - (n+1))^{-1/4}.$$

При равенстве степеней черноты тепловоспринимающей и излучающей поверхностей, а также поверхностей всех слоев экрана $\varepsilon_1 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = q_{33} = \dots = \varepsilon_{3i} = \dots = \varepsilon_{3n} = \varepsilon_2$, согласно работе [25], $m = n+1$. В частном случае $\varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = q_{33} = \dots = \varepsilon_{3i} = \dots = \varepsilon_{3n} = \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_3 \neq \varepsilon$, для параметра m может быть записано представление $m = G_m(\varepsilon, \varepsilon_3) = 1 + \varepsilon(2 - \varepsilon_3)\varepsilon_3^{-1}(2 - \varepsilon)^{-1}$.

Кроме того, по задаваемому показателю интенсивности теплового потока q_{*2} за имеющим односторонние слои многослойным экраном, возможно определение минимально необходимого числа подобных слоев на базе соотношения

$$n \geq \Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2}) = \varepsilon_3(2 - \varepsilon_3)(\sigma_0(T_1^4 - T_2^4)/q_{*2} - \varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_2^{-1} + 1). \quad (6.166)$$

Результаты анализа детерминистических версий моделей расчета параметров тепловых экранов являются основой для разработки нечетко-множественных методов учета разбросов в значениях неконтрастных экзогенных характеристик рассматриваемых конструкций при определении показателей эффективности теплового экранирования. Для обладающих разбросами значений исходных параметров $\{T_1, T_2\}$, $\{\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, q_{33}, \dots, \varepsilon_{3i}, \dots, \varepsilon_{3n}\}$, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, рассматриваемых

моделей вводятся описания в форме нечетких нормальных трапецидальных интервалов

$$\tilde{T}_j = (T_{j1}, T_{j2}, T_{j3}, T_{j4}), \quad \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon_j} = (\tilde{\varepsilon}_{\varepsilon_{j1}}, \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon_{j2}}, \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon_{j3}}, \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon_{j4}}), \quad \tilde{\varepsilon}_j = (\varepsilon_{j1}, \varepsilon_{j2}, \varepsilon_{j3}, \varepsilon_{j4}), \quad (6.167)$$

имеющих функции принадлежности $\mu_{\tilde{T}_j}(T_j)$, $\mu_{\tilde{\varepsilon}_j}(\varepsilon_j)$, $\mu_{\tilde{\varepsilon}_j}(\varepsilon_j)$ и представления суперпозициями по множествам α – срезов

$$\begin{aligned} \tilde{T}_j &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [T_{j\alpha}, \bar{T}_{j\alpha}], \quad T_{j\alpha} = (1-\alpha)T_{j1} + \alpha T_{j2}, \quad \bar{T}_{j\alpha} = \alpha T_{j3} + (1-\alpha)T_{j4}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\varepsilon_j} &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_{\varepsilon_j\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\varepsilon_j\alpha}], \quad \underline{\varepsilon}_{\varepsilon_j\alpha} = (1-\alpha)\varepsilon_{\varepsilon_{j1}} + \alpha\varepsilon_{\varepsilon_{j2}}, \quad \bar{\varepsilon}_{\varepsilon_j\alpha} = \alpha\varepsilon_{\varepsilon_{j3}} + (1-\alpha)\varepsilon_{\varepsilon_{j4}}; \\ \tilde{\varepsilon}_j &= \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_{j\alpha}, \bar{\varepsilon}_{j\alpha}], \quad \underline{\varepsilon}_{j\alpha} = (1-\alpha)\varepsilon_{j1} + \alpha\varepsilon_{j2}, \quad \bar{\varepsilon}_{j\alpha} = \alpha\varepsilon_{j3} + (1-\alpha)\varepsilon_{j4}. \end{aligned}$$

При получении нечетко-множественных обобщений для соотношений (6.164) используются устанавливаемые в области определения $Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}, T_1, T_2)$ оценки

$$\begin{aligned} \partial Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}, T_1, T_2) / \partial T_1 > 0, \quad \partial Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}, T_1, T_2) / \partial T_2 < 0, \quad \partial Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}, T_1, T_2) / \partial \varepsilon_i > 0, \\ \partial Q(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}, T_1, T_2) / \partial \varepsilon_{\varepsilon_i} > 0, \end{aligned}$$

и с учетом данных оценок на основе α –уровневой модификации принципа расширения записываются представления

$$\tilde{q}_{\varepsilon_i} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{q}_{\alpha}, \bar{q}_{\alpha}], \quad \underline{q}_{\alpha} = Q(\underline{\varepsilon}_{1\alpha}, \underline{\varepsilon}_{2\alpha}, \underline{\varepsilon}_{\varepsilon_{i\alpha}}, T_{1\alpha}, \bar{T}_{2\alpha}), \quad \bar{q}_{\alpha} = Q(\bar{\varepsilon}_{1\alpha}, \bar{\varepsilon}_{2\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\varepsilon_{i\alpha}}, T_{1\alpha}, T_{2\alpha}).$$

С учетом оценок

$$\begin{aligned} \partial F_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}) / \partial \varepsilon_1 > 0, \quad \partial F_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}) / \partial \varepsilon_2 > 0, \quad \partial F_m(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}) / \partial \varepsilon_{\varepsilon_i} < 0; \\ \partial F_\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}) / \partial \varepsilon_1 > 0, \quad \partial F_\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}) / \partial \varepsilon_2 > 0, \quad \partial F_\eta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{\varepsilon_i}) / \partial \varepsilon_{\varepsilon_i} < 0; \end{aligned}$$

получены также нечетко-множественные обобщения для соотношений (6.165), которые принимают вид

$$\tilde{m} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{m\alpha}, \bar{F}_{m\alpha}], \quad \underline{F}_{m\alpha} = F_m(\underline{\varepsilon}_{1\alpha}, \underline{\varepsilon}_{2\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\varepsilon_{i\alpha}}), \quad \bar{F}_{m\alpha} = F_m(\bar{\varepsilon}_{1\alpha}, \bar{\varepsilon}_{2\alpha}, \underline{\varepsilon}_{\varepsilon_{i\alpha}}); \quad (6.168)$$

$$\tilde{\eta} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{F}_{\eta\alpha}, \bar{F}_{\eta\alpha}], \quad \underline{F}_{\eta\alpha} = F_\eta(\underline{\varepsilon}_{1\alpha}, \bar{\varepsilon}_{2\alpha}, \bar{\varepsilon}_{\varepsilon_{i\alpha}}), \quad \bar{F}_{\eta\alpha} = F_\eta(\bar{\varepsilon}_{1\alpha}, \bar{\varepsilon}_{2\alpha}, \underline{\varepsilon}_{\varepsilon_{i\alpha}}). \quad (6.169)$$

Кроме того, с учетом оценок

$$\partial G_m(\varepsilon, \varepsilon_3) / \partial \varepsilon > 0, \quad \partial G_m(\varepsilon, \varepsilon_3) / \partial \varepsilon_3 < 0, \quad \partial \Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2}) / \partial \varepsilon_3 > 0, \quad \partial \Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2}) / \partial \varepsilon_1 > 0,$$

$$\partial\Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2})/\partial\varepsilon_2 > 0, \quad \partial\Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2})/\partial T_1 > 0,$$

$$\partial\Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2})/\partial T_2 < 0, \quad \partial\Phi(\varepsilon_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, T_1, T_2, q_{*2})/\partial q_{*2} < 0,$$

и на основе введения экзогенных нечетко-интервальных параметров \tilde{q}_{*2} , $\tilde{\varepsilon}_3$, $\tilde{\varepsilon}$ с представлениями

$$\tilde{q}_{*2} = (q_{*21}, q_{*22}, q_{*23}, q_{*24}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [q_{*2\alpha}, \bar{q}_{*2\alpha}], \quad \underline{q}_{*2\alpha} = (1-\alpha)q_{*21} + \alpha q_{*22}, \quad \bar{q}_{*2\alpha} = \alpha q_{*23} + (1-\alpha)q_{*24};$$

$$\tilde{\varepsilon}_3 = (\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{34}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_{3\alpha}, \bar{\varepsilon}_{3\alpha}], \quad \underline{\varepsilon}_{3\alpha} = (1-\alpha)\varepsilon_{31} + \alpha\varepsilon_{32}, \quad \bar{\varepsilon}_{3\alpha} = \alpha\varepsilon_{33} + (1-\alpha)\varepsilon_{34};$$

$$\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_{*1}, \varepsilon_{*2}, \varepsilon_{*3}, \varepsilon_{*4}) = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\varepsilon}_\alpha, \bar{\varepsilon}_\alpha], \quad \underline{\varepsilon}_\alpha = (1-\alpha)\varepsilon_{*1} + \alpha\varepsilon_{*2}, \quad \bar{\varepsilon}_\alpha = \alpha\varepsilon_{*3} + (1-\alpha)\varepsilon_{*4},$$

записываются выражения

$$\tilde{m} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [G_{m\alpha}, \bar{G}_{m\alpha}], \quad \underline{G}_{m\alpha} = G_m(\underline{\varepsilon}_\alpha, \bar{\varepsilon}_{3\alpha}), \quad \bar{G}_{m\alpha} = G_m(\bar{\varepsilon}_\alpha, \underline{\varepsilon}_{3\alpha}); \quad (6.170)$$

$$\tilde{\Phi} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\underline{\Phi}_\alpha, \bar{\Phi}_\alpha], \quad \underline{\Phi}_\alpha = \Phi(\underline{\varepsilon}_{3\alpha}, \underline{\varepsilon}_{1\alpha}, \underline{\varepsilon}_{2\alpha}, \underline{T}_{1\alpha}, \bar{T}_{2\alpha}, \bar{q}_{*2\alpha}), \quad \bar{\Phi}_\alpha = \Phi(\bar{\varepsilon}_{3\alpha}, \bar{\varepsilon}_{1\alpha}, \bar{\varepsilon}_{2\alpha}, \bar{T}_{1\alpha}, \underline{T}_{2\alpha}, \underline{q}_{*2\alpha}).$$

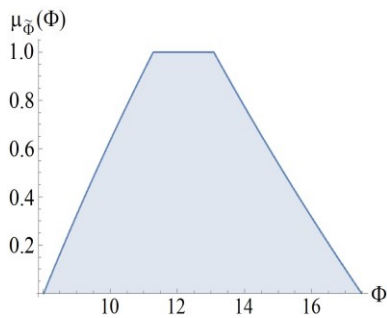
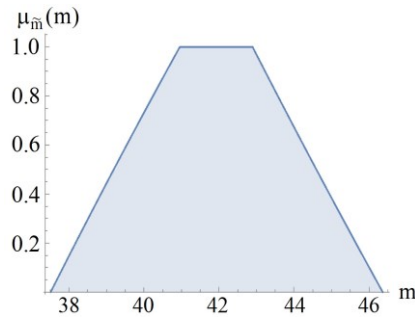
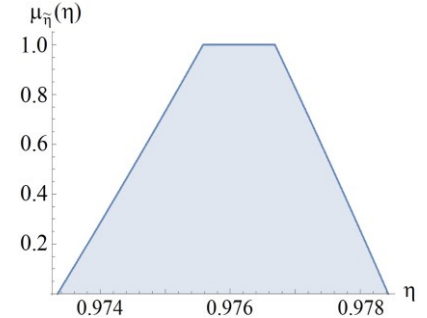
При этом, в частности, минимально необходимое числа слоев n_{**} экранирующего пакета на любом уровне уверенности при учете всех разбросов экзогенных параметров модели в задаваемых диапазонах определяется условием

$$n_{**} > \bar{\Phi}_0 = \Phi(\bar{\varepsilon}_{30}, \bar{\varepsilon}_{10}, \bar{\varepsilon}_{20}, \bar{T}_{10}, \underline{T}_{20}, \underline{q}_{*20}).$$

Полученные таким образом представления для $\tilde{\Phi}$, \tilde{m} , $\tilde{\eta}$ в виде суперпозиций множеств α -уровней эффективно применимы и при иных вариантах задания исходных нечетко-множественных параметров, в частности при их описании треугольными нечеткими гауссовыми числами.

В качестве примера применения описываемой методики рассматривается объект, в котором излучающей является плоская поверхность конструкции из бериллия с неконтрастными нечетко-интервальными параметрами температуры нагрева $\tilde{T}_1 = (544.5, 567.4, 578.9, 601.8) [K^\circ]$ и черноты $\tilde{\varepsilon}_1 = (0.171, 0.178, 0.182, 0.189)$, а облучаемой воспринимающей является плоская поверхность конструкции из дюралюминия, имеющая неконтрастные температуру $\tilde{T}_2 = (307.1, 319.9, 326.4, 339.3) [K^\circ]$ и параметр черноты $\tilde{\varepsilon}_1 = (0.352, 0.366, 0.373, 0.388)$. Однотипные слои проектируемого теплового экрана изготовлены из алюминиевой фольги и имеют неконтрастный параметр черноты $\tilde{\varepsilon}_3 = (0.086, 0.089, 0.091, 0.095)$, а

задаваемая проектная плотность теплового потока за экраном описывается нечетко-интервальной величиной $\tilde{q}_{*2} = (67, 70, 71, 75) [Вт/м^2]$. При этом, для границ интервалов α – срезов рассчитываемой нечетко-интервальной характеристики $\tilde{\Phi}$ получены представления $\underline{\Phi}_\alpha = 8.02(1-\alpha) + 11.29\alpha$, $\overline{\Phi}_\alpha = 17.48(1-\alpha) + 13.08\alpha$, и для рассматриваемого случая $n_{**} = 18$. На рисунках 6.42 – 6.44 представлены рассчитанные при ранее заданных параметрах модели на основе применения изложенной методики функции принадлежности для $\tilde{\Phi}$ и для нечетко-множественных оценок кратности ослабления теплового потока \tilde{m} и коэффициента эффективности экранирования $\tilde{\eta}$ в случае конструкции экрана из 14 слоев. Параметры дефаззификации по методу центров тяжести для полученных нечетко-множественных оценок $\tilde{\Phi}$, \tilde{m} , $\tilde{\eta}$ в данном случае имеют значения $\Phi_d = 12.53$, $m_d = 41.93$, $\eta_d = 0.98$.

Рис.6.42 Профиль $\mu_{\tilde{\Phi}}(\Phi)$ Рис. 6.43. Профиль $\mu_{\tilde{m}}(m)$ Рис. 6.44. Профиль $\mu_{\tilde{\eta}}(\eta)$

Нечетко-множественный подход применим также при исследовании влияния факторов неопределенности в виде разбросов значений исходных параметров на основные характеристики функционирования двухслойных плоских экранов с имеющим высокие отражающие способности, обращенным к источнику теплового излучения внешним слоем и внутренним контактирующим с ним слоем, изготовленным из материала-теплоизолятора. Для экранов данного типа математическая модель функционирования и методика ее теоретического анализа представлены в работе [111]. Применительно к имеющему геометрическую структуру двухслойному плоскому экрану

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 = \{(x_1, x_2)R_2, -h_1 \leq x \leq 0\}, \quad U_2 = \{(x_1, x_2)R_2, 0 \leq x \leq h\}, \quad (6.171)$$

с элементами в виде слоя U_1 , изготовленного из металла с плотностью ρ_1 и теплоемкостью c_1 , и слоя U_2 из теплоизолирующего материала с плотностью ρ и теплоемкостью c , функция распределения температуры $T(x_3, t)$ подлежит определению из начально-граничной задачи вида [111, 142]:

$$\begin{aligned} \partial T(x_3, t) / \partial t &= a \cdot \partial^2 T(x_3, t) / \partial x_3^2, \quad T(x_3, 0) = T_*(x_3), \\ -\lambda \partial T(0, t) / \partial x_3 + c_1 \rho_1 h_1 \cdot \partial T(0, t) / \partial t &= q, \quad \lambda \partial T(h_2, t) / \partial x_3 + \alpha [T(h_2, t) - T_c] = 0. \end{aligned} \quad (6.172)$$

В соотношениях (6.172) параметрами являются плотность падающего на отражающую поверхность экрана теплового потока q , коэффициент теплообмена для среды за экраном α и температура на граничной внутренней поверхности экрана T_c . Получаемое в [111] с применением метода интегральных преобразований аналитическое решение (6.172) представляется в виде

$$\begin{aligned} T(x_3, t) &= q(\alpha^{-1} + h/\lambda - x_3/\lambda) + T_c - \sum_{n=1}^{\infty} [(D_1(n) \cos(\mu_n x_3 / h_2) + D_2(n) \sin(\mu_n x_3 / h_2)) / D_3(n)] \exp(s_n t), \\ D_1(n) &= [(qh/\lambda)(\cos \mu_n - Bi(\sin \mu_n) / \mu_n) - Bi(T_* - T_c)], \\ D_2(n) &= [(qh/\lambda)(\sin \mu_n + Bi(\cos \mu_n) / \mu_n) + BiK(T_* - T_c)\mu_n], \\ D_3(n) &= [(3/2)BiK\mu_n \sin \mu_n + (2 + Bi/2)K\mu_n^2 \cos \mu_n + ((3 + Bi)/2)\mu_n \sin \mu_n - (Bi - \mu_n^2/2)\cos \mu_n - (K\mu_n^3/2)\sin \mu_n], \\ Bi &= \alpha h / \lambda, \quad K = c_1 h_1 \rho_1 (ch\rho)^{-1}, \quad s_n = -\mu_n^2 a / h^2. \end{aligned} \quad (6.173)$$

Входящие в (6.173) значения μ_n являются корнями трансцендентного уравнения

$$tg \mu = ((Bi - \mu^2 K)) / (\mu(1 + BiK)). \quad (6.174)$$

Нечетко-множественный метод анализа факторов неопределенности в данной модели основывается на введении нечетко-интервальных представлений для экзогенных параметров с разбросами значений. Для компоненты U_1 вводятся нечетко-интервальные характеристики

$$\tilde{\rho}_1 = (\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}), \quad \tilde{h}_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}), \quad \tilde{c}_1 = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}), \quad \tilde{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14});$$

для компоненты U_2 – нечетко-интервальные характеристики $\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$,

$$\tilde{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4), \quad \tilde{h} = (h_1, h_2, h_3, h_4), \quad \tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), \quad \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4).$$

Тепловые процессы описываются нечетко-интервальными параметрами $\tilde{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, $\tilde{T}_c = (T_{1c}, T_{2c}, T_{3c}, T_{4c})$, $\tilde{T}_* = (T_{1*}, T_{2*}, T_{3*}, T_{4*})$.

С применением аппарата арифметики нечетких трапецеидальных интервалов, далее рассчитываются нечетко-интервальные величины

$$\begin{aligned}\tilde{B}i &= (B_1, B_2, B_3, B_4) = (\alpha_1 h_1 / \lambda_4, \alpha_2 h_2 / \lambda_3, \alpha_3 h_4 / \lambda_2, \alpha_4 h_4 / \lambda_1), \quad \tilde{K} = (K_1, K_2, K_3, K_4) = \\ &= (c_{11} h_{11} \rho_{11} (c_4 h_4 \rho_4)^{-1}, c_{12} h_{12} \rho_{12} (c_3 h_3 \rho_3)^{-1}, c_{13} h_{13} \rho_{13} (c_2 h_2 \rho_2)^{-1}, c_{14} h_{14} \rho_{14} (c_1 h_1 \rho_1)^{-1}), \\ \tilde{a} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) = (\lambda_1 (c_4 \rho_4)^{-1}, \lambda_2 (c_3 \rho_3)^{-1}, \lambda_3 (c_2 \rho_2)^{-1}, \lambda_4 (c_1 \rho_1)^{-1}), \\ \tilde{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}) = (\lambda_{11} (c_{14} \rho_{14})^{-1}, \lambda_{12} (c_{13} \rho_{13})^{-1}, \lambda_{13} (c_{12} \rho_{12})^{-1}, \lambda_{14} (c_{11} \rho_{11})^{-1}),\end{aligned}$$

а также вспомогательные характеристики нечетко-интервального типа

$$\begin{aligned}\tilde{q}_* &= (q_{1*}, q_{2*}, q_{3*}, q_{4*}) = (q_1 h_1 / \lambda_4, q_2 h_2 / \lambda_3, q_3 h_4 / \lambda_2, q_4 h_4 / \lambda_1), \\ \tilde{T}_{**} &= (T_{1**}, T_{2**}, T_{3**}, T_{4**}) = (T_{1*} - T_{4c}, T_{2*} - T_{3c}, T_{3*} - T_{2c}, T_{4*} - T_{1c}).\end{aligned}$$

При определении нечетко-множественных значений $\tilde{\mu}_n$ вводятся их представления разложениями по множествам α -уровня $\tilde{\mu}_n = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}]$, и из рассматриваемого как неявная функциональная зависимость уравнения (6.174) на каждом из α -уровней итерационными числовыми методами определяются величины

$$\mu_{n\alpha} = \mu_{n\alpha}(Bi_\alpha, K_\alpha) = \Gamma(Bi_\alpha, K_\alpha),$$

$$Bi_\alpha \in [(1-\alpha)B_1 + \alpha B_2, \alpha B_3 + (1-\alpha)B_4], \quad K_\alpha \in [(1-\alpha)K_1 + \alpha K_2, \alpha K_3 + (1-\alpha)K_4],$$

а затем устанавливаются значения

$$\underline{\mu}_{n\alpha} = \inf_{\substack{K \in [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} \mu_{n\alpha}(Bi, K), \quad \bar{\mu}_{n\alpha} = \sup_{\substack{K \in [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} \mu_{n\alpha}(Bi, K).$$

С учетом свойств $\partial s_n / \partial \mu_n < 0$, $\partial s_n / \partial a < 0$, $\partial s_n / \partial h > 0$ и после отыскания $\tilde{\mu}_n = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}]$, на базе применения α -уровневой модифицированной формы эвристического принципа расширения определяется представление

$$\tilde{s}_n = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{s}_{n\alpha}, \bar{s}_{n\alpha}], \quad \underline{s}_{n\alpha} = -\bar{\mu}_{n\alpha}^2 \bar{a}_\alpha / \bar{h}_\alpha, \quad \bar{s}_{n\alpha} = -\underline{\mu}_{n\alpha}^2 \underline{a}_\alpha / \bar{h}_\alpha. \quad (6.175)$$

После этого с использованием модифицированных соотношений

$$D_1(\mu_n, q_*, Bi, T_{**}) = [q_*(\cos \mu_n - Bi(\sin \mu_n) / \mu_n) - Bi T_{**}]$$

$$D_2(\mu_n, q_*, Bi, K, T_{**}) = [q_*(\sin \mu_n + Bi(\cos \mu_n) / \mu_n) + BiKT_{**}\mu_n],$$

$$D_3(\mu_n, Bi, K) = [(3/2)BiK\mu_n \sin \mu_n + (2 + Bi/2)K\mu_n^2 \cos \mu_n + \\ + ((3 + Bi)/2)\mu_n \sin \mu_n - (Bi - \mu_n^2/2)\cos \mu_n - (K\mu_n^3/2)\sin \mu_n],$$

а также при учете оценок $\partial D_1 / \partial T_{**} < 0$, $\partial D_2 / \partial T_{**} > 0$, находятся нечетко-множественные представления характеристик $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3$:

$$\tilde{D}_j = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{D}_{j\alpha}, \bar{D}_{j\alpha}], \quad \underline{D}_{1\alpha} = \inf_{\substack{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}] \\ q_* \in [\underline{q}_{*\alpha}, \bar{q}_{*\alpha}] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} D_1(\mu_n, q_*, Bi, \bar{T}_{**\alpha}), \quad \bar{D}_{1\alpha} = \sup_{\substack{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}] \\ q_* \in [\underline{q}_{*\alpha}, \bar{q}_{*\alpha}] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} D_1(\mu_n, q_*, Bi, \underline{T}_{**\alpha});$$

$$\underline{D}_{2\alpha} = \inf_{\substack{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}] \\ q_* \in [\underline{q}_{*\alpha}, \bar{q}_{*\alpha}] \\ K \in [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} D_2(\mu_n, q_*, Bi, K, \underline{T}_{**\alpha}), \quad \bar{D}_{2\alpha} = \sup_{\substack{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}] \\ q_* \in [\underline{q}_{*\alpha}, \bar{q}_{*\alpha}] \\ K \in [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} D_2(\mu_n, q_*, Bi, K, \bar{T}_{**\alpha});$$

$$\underline{D}_{3\alpha} = \inf_{\substack{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}] \\ K \in [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} D_3(\mu_n, Bi, K), \quad \bar{D}_{3\alpha} = \sup_{\substack{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}] \\ K \in [\underline{K}_\alpha, \bar{K}_\alpha] \\ Bi \in [\underline{Bi}_\alpha, \bar{Bi}_\alpha]}} D_3(\mu_n, Bi, K).$$

Представление для эндогенной характеристики модели в виде нечетко-множественной двухпараметрической функции распределения температуры $\tilde{T}(x_3, t)$, устанавливается на базе выражения (6.173) в виде

$$\tilde{T}(x_3, t) = \bigcup_{\alpha_m \in \Xi_\alpha} [\underline{T}_\alpha, \bar{T}_\alpha], \quad (6.176)$$

$$\underline{T}_\alpha = \inf_{\Delta_m} T(x_3, t, \mu_n, s_n, q, \alpha, \lambda, h, h_2, D_1, D_2, D_3), \quad \bar{T}_\alpha = \sup_{\Delta_m} T(x_3, t, \mu_n, s_n, q, \alpha, \lambda, h, h_2, D_1, D_2, D_3),$$

$$\Delta_m = \{\mu_n \in [\underline{\mu}_{n\alpha}, \bar{\mu}_{n\alpha}], s_n \in [\underline{s}_{n\alpha}, \bar{s}_{n\alpha}], q \in [\underline{q}_\alpha, \bar{q}_\alpha], \lambda \in [\underline{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_\alpha], \alpha \in [\underline{\alpha}_\alpha, \bar{\alpha}_\alpha],$$

$$D_1 \in [\underline{D}_{1\alpha}, \bar{D}_{1\alpha}], D_2 \in [\underline{D}_{2\alpha}, \bar{D}_{2\alpha}], D_3 \in [\underline{D}_{3\alpha}, \bar{D}_{3\alpha}], h \in [\underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha], h_1 \in [\underline{h}_{1\alpha}, \bar{h}_{1\alpha}]\}.$$

6.6. Выводы по разделу 6

1. Разработаны нечетко-множественные методы исследования характера влияния факторов неопределенности в виде разбросов значений экзогенных параметров в математических моделях функционирования технических системах термостабилизации на базе применения устройств создания охлаждающих газо-жидкостных потоков в виде центробежных и центробежно-струйных форсунок,

включая получение нечетко-множественных параметров расхода жидкости, дисперсности генерируемой аэрозольной среды, угловых характеристик секторного факела распыления и скорости газо-жидкостного потока на выходе из сопла форсунки.

2. Разработаны нечетко-множественные методы учета неконтрастности экзогенных параметров в процессе математического моделирования распада струи жидкости в дисковидных и пневматических и распылителях технических систем термостабилизации с получением нечетко-множественных эндогенных характеристик расхода и скорости аэрозольной смеси на выходе из пневматической форсунки, угловых размеров факела распыления охлаждающей жидкости дисковидным вращающимся рассеивателем, а также нечетко-множественных описаний для траекторий движения капель распыляемой жидкости.

3. Предложены нечетко-множественные методы исследования характеризующихся существенными разбросами экзогенных параметров математических моделей теплообмена при течении газожидкостных двухфазных потоков в высокотемпературных цилиндрических каналах и при обтекании высокотемпературных поверхностей двухфазными газожидкостными потоками а также нечетко-множественные методы исследования моделей теплообмена обтекающего пульсирующего потока с вибрирующей высокотемпературной пористой стенкой с учетом вдувания охлаждающего газа.

4. Разработаны нечетко-множественные методы учета разбросов экзогенных параметров в расчетных моделях функционирования тепловых экранов с теплоизолирующими и теплоотражающими слоями, включая получение представлений для нечетко-множественных эндогенных параметров показателя степени экранирования, кратности ослабления тепловых потоков и коэффициентов эффективности экранирования. Реализованы вычислительные эксперименты в модели многослойных теплоотражающих экранов регулярной структуры.

6. Разработаны программные приложения для реализации предложенных алгоритмов компьютерного расчетного анализа исследованных в разделе нечетко-множественных моделей технических систем формирования охлаждающих газожидкостных потоков при помощи форсуночных и ротационных распылителей, а также нечетко-множественных моделей теплового экранирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной диссертационной работе получено новое решение актуальной научно-технической проблемы разработки нечетко-множественных теоретических численно-аналитических методов анализа математических моделей деформационных и тепловых процессов с учетом факторов неопределенности экзогенных параметров, включая создание комплекса компьютерных программных приложений для реализации алгоритмов исследования как инструмента повышения эффективности и адекватности проектных конструкторских расчетов в ряде промышленных отраслей и современных высокотехнологичных производств. Основные выводы, научные и практические результаты работы заключаются в следующем.

1. Осуществлена разработка комплекса методов использования теории нечетких вычислений для учета факторов разброса исходных параметров в моделях деформирования упругих тел и конструкционных элементов, а также в моделях функционирования и оптимизации технических систем термостабилизации путем расширения областей определения расчетных соотношений детерминистических вариантов соответствующих моделей на аргументы различных нечетко-множественных типов с фрагментированным поэтапным применением ряда версий аппарата нечеткой арифметики и модифицированной альфа-уровневой формы эвристического принципа обобщения; предложенные методы обладают дополнительными возможностями и расширенными перспективами прикладного применения к различным новым классам рассматриваемых моделей и характеризуются менее строгими требованиями к характеру неконтрастной исходной информации, включая возможности использования данных, представленных выборками экспериментальных данных малой мощности и полученных на основе субъективных экспертных заключений.

2. Осуществлена разработка и алгоритмическая реализация нечетко-множественных методов исследования моделей расчета характеристик

резонансных колебаний, параметров скоростей волн деформаций и критических усилий в задачах динамического деформирования и устойчивости стержневых конструкций в рамках классических и уточненных теорий, применение которых в практике предпроектных расчетов позволяет повысить достоверность оценок ресурсов прочности, надежности и функциональности конструктивных элементов данного типа в машинах, приборах и строительных сооружениях.

3. Осуществлены разработка и алгоритмическая реализация методов нечетко-множественного учета влияния факторов неопределенности в моделях деформирования и устойчивости тонких пластин и оболочек, на базе применения которых в инженерной практике могут формироваться более адекватные рекомендации по допустимым диапазонам варьирования проектных параметров машин и сооружений, в пределах выбора которых обеспечиваются требования устойчивости, надежности, мгновенной и длительной прочности создаваемых тонкостенных конструкций.

4. Реализованы разработка и алгоритмизация нечетко-множественных методов учета факторов неопределенности в задачах формирования полей концентрации напряжений и зон пластических деформаций около полостей, отверстий и включений в тонких пластинах и геомассивах, использование которых при конструировании строительных деталей, корпусов и несущих конструкций машин и агрегатов, печатных плат электронных устройств, объектов аэрокосмической техники, при проектировании горных сооружений с выработками и туннелями приводит к более адекватным рекомендациям по выбору типов конструктивных материалов, форм, размеров и способов размещения технологических полостей, отверстий и включений, обеспечивающим требования надежности и механической прочности проектируемых технических устройств и сооружений.

5. Осуществлена разработка теоретических и вычислительных алгоритмов нечетко-множественного моделирования в задачах теории резонансных колебаний упругих пластин, панелей и цилиндров, применение которых позволяет совершенствовать характеристики прочности и надежности деталей

машин, приборов и сооружений, работающих в условиях вибрационных нагрузений широких частотных диапазонов.

6. Дана разработка и алгоритмическая реализация моделей нечетко-множественной резонансно-волновой идентификации механических характеристик тонких изотропных плит и нечетко-множественной идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики, применение которой для обработки экспериментальных данных ультразвуковой диагностики по определению комплекса параметров материалов и элементов указанных конструкций обеспечивает повышение степени соответствия обобщенных результатов идентификации их геометрических и физико-механических характеристик реальным свойствам объектов.

7. Предложены и реализованы методы нечетко-множественного исследования математических моделей распространения, дисперсии и трансформации объемных, поверхностных и нормальных волн упругих, электроупругих и магнитоупругих деформаций при учете факторов разбросов значений экзогенных параметров моделирования, обеспечивающего повышение уровня корректности и практической ценности оценок сейсродинамических и геоакустических прогнозов и измерений, повышение точности конструкторских расчетов для акустоэлектронных радиокомпонентов в виде линий задержки и фильтров на поверхностных акустических волнах, повышение достоверности оценок вибрационной прочности для несущих балочных конструкций в машинах, строительных и горно-шахтных сооружениях.

8. Созданы нечетко-множественные методы анализа моделей функционирования и алгоритмы расчета параметров плоских однослойных и многослойных гидроакустических экранов при учете неопределенности исходных данных моделирования, что позволяет при конструировании и выборе материалов для их изготовления добиваться необходимой степени стабильности показателей интенсивности отраженных и генерируемых за экраном волновых сигналов.

9. Разработаны нечетко-множественные численно-аналитические методы и программные приложения для их применения к описанию процессов формирования аэрозольных газо-жидкостных охлаждающих потоков с использованием устройств распыления в виде центробежных и центробежно-струйных форсунок на основе анализа соответствующих математических расчетных моделей с неконтрастными, обладающими экспериментальными и технологическими разбросами исходными параметрами, что позволяет повысить качество конструкторских решений и обоснованность инженерных рекомендаций по эффективному применению устройств данного типа в технических системах термостабилизации, включая оценку ресурсов износа и обеспечение оптимизированного расхода жидкости.

10. Осуществлена разработка базирующихся на аппарате теории нечетких множеств численно-аналитических методов исследования математических моделей с имеющимися ошибки разброса значений неконтрастными экзогенными характеристиками, описывающих эффекты распыления потоков жидкости пневматическими и дисковыми ротационными устройствами, а также комплекса программных приложений для компьютерной реализации предложенных методов, что является инструментом совершенствования методик конструкторских расчетов при проектировании технических систем охлаждения воздушно-капельного типа.

11. Разработаны нечетко-множественные методы учета описываемой разбросами значений неопределенности исходных параметров при теоретическом анализе моделей обтекания охлаждающими газопаровыми потоками нагретых цилиндрических и плоских поверхностей в конструкциях технических систем и агрегатов, использование которых в практике предпроектных конструкторских расчетов позволяет повысить степень адекватности выбора технологических параметров для реализации режимов охлаждения, в том числе оптимизированных показателей скоростей движения и дисперсности двухфазных охлаждающих потоков.

12. Предложены основывающиеся на концепции нечетко-множественного анализа теоретические методы исследования моделей оценивания показателей эффективности функционирования технических систем теплового экранирования с применением многослойных конструкций в виде пактов теплоизолирующих и тонких отражающих мембранных компонентов, экзогенные расчетные параметры которых имеют высокую степень неопределенности в виде разбросов теплофизических и геометрических характеристик, что позволяет повысить обоснованность выбора конструкционных параметров теплозащитных экранов и показатели эксплуатационной надежности их функционирования.

13. На основе обобщения и систематизации полученных в работе теоретических результатов и данных вычислительных экспериментов указаны области эффективного применения созданных методов в практике проектирования технических систем для отраслей машиностроения, строительства, приборостроения и электроники, горного дела и определены перспективные направления дальнейших исследований в области прикладного нечетко-множественного моделирования деформационных и тепловых процессов.

14. Осуществлена практическая апробация разработанных нечетко-множественных методик, алгоритмов их реализации и комплексов программных приложений в в АО «НИИВК им. М.А. Карцева» при расчетах параметров нанорезонаторов, ультраакустических линий задержки и фильтров на ПАВ, в ГУ РАНИМИ МОН ДНР при получении и обработке геоакустической информации о строении и свойствах геомассивов горных пород и подземных горно-шахтных сооружений, при анализе результатов шахтной пластовой сейсмодиагностики, а также в учебном процессе в ГОУ ВПО ДОННУ МОН ДНР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, А.Д. Физика угля и горных процессов / А.Д. Алексеев. – К.: Наук. думка, 2010. – 424 с.
2. Алешин, Н.П. О вводе сдвиговых волн в контролируемое изделие / Н.П. Алешин, Н.Н. Вадковский, В.А. Медведев // Дефектоскопия. – 1968. – № 7. – С. 35–40.
3. Алтунин, А.Е. Теоретическое и практическое применение методов принятия решений в условиях неопределенности. Том 1. Общие принципы принятия решений в условиях различных видов неопределенности / А.Е. Алтунин. – М.: Издат. решения, 2019. – 484 с.
4. Алтунин, А.Е. Теоретическое и практическое применение методов принятия решений в условиях неопределенности. Том 2. Геологическое моделирование и подсчет запасов нефтегазовых месторождений в условиях неопределенности на основе теории нечетких множеств / А.Е. Алтунин. – М.: Издат. решения, 2019. – 208 с.
5. Алтунин, А.Е. Теоретическое и практическое применение методов принятия решений в условиях неопределенности. Том 3. Расчеты, идентификация и оптимизация в условиях различных видов неопределенности / А.Е. Алтунин. – М.: Издат. решения, 2019. – 254 с.
6. Алтунин, А.Е. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях / А.Е. Алтунин, М.В. Семухин. – Тюмень: Изд-во Тюменского гос. ун-та, 2000. – 352 с.
7. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
8. Аннин, Б.Д. Анизотропия упругих свойств материалов / Б.Д. Аннин, Н.И. Остросаблин // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 131-151.
9. Аннин, Б.Д. Трансверсально-изотропная упругая модель геоматериалов / Б.Д. Аннин // Сиб. журн. индустр. матем. – 2009. – Т. 12., № 3. – С. 5-14.

10. Аралов, М.Н. Компоненты программного комплекса для моделирования теплового распределения внутри многослойных объектов на основе оптимизации структуры модели трехмерно-интегрированных СБИС / М.Н. Аралов, В.Ф. Барабанов, А.М. Нужный, О.Я. Кравец // Информац. технол. моделир. и управл. – 2017. – № 2 (104). – С. 143-151.
11. Архипов, В.А. Экспериментальное исследование диспергирования жидкости эжекционными форсунками / В.А. Архипов, С.С. Бондарчук, М.Я. Евсевлев, И.К. Жарова, А.С. Жуков, С.В. Змановский, Е.А. Козлов, А.И. Коноваленко, В.Ф. Трофимов // Инж.-физич. журн. – 2013. – Том 86, № 6. – С. 1229–1236.
12. Архипов, В.А. Метод исследования структуры факела распыла эжекционной форсунки / В.А. Архипов, А.Л. Астахов, С.А. Басалаев, С.Е. Орлов, А.С. Усанина, Е.В. Муравлев // Ползуновский вестн. – 2016. – № 3. – С. 96–100.
13. Бадер, В.И. Исследование теплообмена при охлаждении полого горизонтального цилиндрического слитка двухфазной веерной струей / В.И. Бадер // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1991. – № 4. – С. 75–76.
14. Баклашов, И.В. Механика подземных сооружений и конструкции крепей / И.В. Баклашов, Б.А. Картозия. – М.: Недра, 1992. – 543 с.
15. Балакан, Г.Г. Математическое моделирование работы струйного распылителя-охлаждителя (СРО) / Г.Г. Балакан, А.В. Герлига // Труды ОПУ. – Одесса, 2006. – Вып. 2(26). – С. 71–75.
16. Бардзокас, Д.И. Возбуждение сдвиговых волн в акустически связанных полупространствах диэлектрика и пьезоэлектрика / Д.И. Бардзокас, Н.А. Сенник // Изв. Нац. Акад. Наук Армении. – 2000. – Т. 53, № 1. – С. 28–33.
17. Бардзокас, Д.И. Электроупругость кусочно-однородных тел / Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский. – Сумы: Университетская книга, 2000. – 308 с.
18. Бардзокас, Д.И. Распространение волн в электромагнитоупругих средах / Д.И. Бардзокас, Б.А. Кудрявцев, Н.А. Сенник. – М.: URSS, 2003. – 336 с.
19. Белевич, А.И. Конструкции и характеристики пароструйных эжекторов ТЭС и АЭС / А.И. Белевич. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 210 с.

20. Белубекян, М.В. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде / М.В. Белубекян, Д.Э. Мгерян // Изв. Нац. Акад. Наук Армении. – 2006. – Т. 59, № 2. – С. 3–9.
21. Беляев Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
22. Бирюков, С.В. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах / С.В. Бирюков, Ю.В. Гуляев, В.В. Крылов, В.П. Плесский. – М.: Наука, 1991. – 414с.
23. Блистанов, А.А. Кристаллы квантовой и нелинейной оптики / А.А. Блистанов. – М.: МИСИС, 2000. – 432 с.
24. Бобков, В.И. Подход к исследованию теплопроводности нечеткими численными методами в условиях неопределенности теплофизических характеристик / В.И. Бобков, В.В. Борисов, М.И. Дли // Сист. управл., связи и безопасности. – 2017. – № 3.– С. 73–83.
25. Бобылев, В.П. Методика расчета показателей защитных свойств теплоотражающего экрана / В.П. Бобылев, И.И. Иванов // Metallurg. и горнорудн. промышл. – 2014. – № 6. – С. 134–137.
26. Болнокин, В.Е. Модели и методы синтеза системы экранирования виброизлучений в жидкой среде слоем функционально-неоднородного анизотропного материала / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, М.Х. Зыонг // Сист. управл. и информац. технол. – 2015. – № 3 (61). – С. 71-75.
27. Болнокин, В.Е. Модель трансформационного акустического экранирования виброизлучений в жидкой среде / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, М.Х. Зыонг // Сист. управл. и информац. технол. – 2015. – № 3.1 (61). – С. 130-134.
28. Болнокин, В.Е. Модель плоского многослойного гидроакустического экрана с анизотропными функционально-градиентными компонентами / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, М.Х. Зыонг // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Системный анализ и информац. технол. – 2016. – № 1. – С. 21–27.

29. Болнокин, В.Е. Исследование систем гидроакустического экранирования для подводных транспортных средств / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай. – Воронеж: Научн. книга, 2016. –196 с.
30. Болнокин, В.Е. Оценки влияния нечеткости параметров геометрических объектов в эвристических расчетных алгоритмах / В.Е. Болнокин, Д.Ч. Нгуен, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Сист. управл. и информац. технол. – 2017. – № 1(67). – С. 68–71.
31. Болнокин, В.Е. Методика нечеткого оценивания эндогенных характеристик в моделях анизотропных функционально-градиентных гидроакустических экранов / В.Е. Болнокин, М.Х. Зыонг, С.В. Сторожев // Экон. и менедж. сист. управл. – 2017. – № 4.2 (26). – С. 204–209.
32. Болнокин, В.Е. Оценки влияния нечеткости экзогенных параметров в модели обобщенного плоского напряженного состояния изотропной пластины с эллиптическим упругим включением / В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2017. – Вып. 47. – С. 134-148.
33. Болнокин, В.Е. Нечеткая модель отражения и преломления гидроакустических волн при наклонном падении на окруженный жидкостью изотропный слой / В.Е. Болнокин, М.Х. Зыонг, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2017. – № 3(60)-4(61). – С. 33–45.
34. Болнокин, В.Е. Анализ модифицированных моделей оптимизации размещения объектов пространственной геометрии / В.Е. Болнокин, Нгуен Динь Чунг, С.В. Сторожев // Матем. моделирование и биомеханика в современном ун-те: тез. докл. XII Всерос. школы-семинара (пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017г.). – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. – С. 140.
35. Болнокин, В.Е. Нечеткие оценки эффективных характеристик микронеоднородных материалов для конструкций гидроакустического экранирования / В.Е. Болнокин, М.Х. Зыонг, С.В. Сторожев // Сист. управл. и информац. технол. – 2017 – № 4 (70). – С. 4–8.

36. Болнокин, В.Е. Системы гидроакустического экранирования для подводных транспортных средств / В.Е. Болнокин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай. – Воронеж: Научн. книга, 2017. – 252 с.

37. Болнокин, В.Е. Нечетко-множественный анализ влияния факторов неопределенности в модели трансверсально-изотропного функционально-градиентного гидроакустического экрана / В.Е. Болнокин, М.Х. Зыонг, С.В. Сторожев // Экон. и менедж. сист. управл. – 2018. – № 2 (28). – С. 71–78.

38. Болнокин, В.Е. Анализ нечеткой модели наклонного падения гидроакустической волны на плоский экран с гибкими нерастяжимыми покрытиями граней / В.Е. Болнокин, Выскуб В.Г., М.Х. Зыонг, С.В. Сторожев // Сист. управл. и информац. технол. – 2018. – № 3 (73). – С. 7–12.

39. Болнокин, В.Е. Нечеткая модель взаимодействия гидроакустических волн с плоским вязкоупругим трансверсально-изотропным экраном / В.Е. Болнокин, Е.И. Митрушкин, М.Х. Зыонг, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2018. – Вып. 48. – С. 97-107.

40. Болнокин, В.Е. Анализ нечеткой модели концентрации механических напряжений в тонких пластинах с квадратными отверстиями неопределенной угловой кривизны / В.Е. Болнокин, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Чан Ба Ле Хоанг // Сист. управл. и информац. технол. – 2019. – № 4(78). – С. 47–50.

41. Болнокин, В.Е. Нечеткие оценки для собственных частот поперечных колебаний однородных стержней / В.Е. Болнокин, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг // Сист. управл. и информац. технол. – 2019. – № 4(78). – С. 24–28.

42. Болнокин, В.Е. Алгоритм учета факторов неопределенности экзогенных параметров в модели колебаний тонких многослойных графеновых нанопластин / В.Е. Болнокин, С.В. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг, Зыонг Минь Хай // Механика тверд. тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 135–143.

43. Болнокин, В.Е. Нечеткие оценки в моделях устойчивости стержневых конструкций / В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Матем.

моделирование и биомеханика в современном ун-те: тез. докл. XIV Всерос. школы-семинара (пос. Дивноморское, 27 – 31 мая 2019г.). – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2019. – С. 15.

44. Болнокин, В.Е. Методика получения нечетких оценок для критических частот и фазовых скоростей нормальных волн в ортотропных прямоугольных волноводах со скользящей заделкой граней / В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2019: матер. IV Междунар. научн. конф. (Донецк, 31 октября 2019 г.). – Т. 1, Ч. 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 71–73.

45. Болнокин, В.Е. Нечетко-множественная методика учета неопределенности исходных данных в моделях расчета скоростей ультразвуковых волн в пьезоэлектрических материалах / В.Е. Болнокин, С.А. Прийменко, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 54–65.

46. Болнокин, В.Е. Исследование влияния факторов неопределенности в модели экрана на основе нечетко-множественный анализ / В.Е. Болнокин, Зыонг Минь Хай, С.В. Сторожев, Т.И. Сергеева // Информац. технол. моделиров. и управл. – 2019. – Т. 118, № 4. – С. 269–278.

47. Болнокин, В.Е. Методика учета факторов неопределенности в моделях термоупругого деформирования тонких пластин с эллиптическими граничными контурами / В.Е. Болнокин, В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, Е.И. Мутина, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Сист. управл. и информац. технол. – 2020. – № 2(80). – С. 4–8.

48. Болнокин, В.Е. Нечетко-множественное моделирование охватывающих пластических зон вокруг туннельных полостей и отверстий кругового очертания / В.Е. Болнокин, В.Г. Выскуб, В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 112–122.

49. Болнокин, В.Е. Электроупругое деформирование ослабленных отверстиями пьезоактивных пластин с неопределенными параметрами / В.Е. Болнокин, Д.И. Мутин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 123–132.

50. Болнокин, В.Е. Алгоритм анализа моделей устойчивости цилиндрических оболочек с неконтрастными пара-метрами на основе применения алгебры двухкомпонентных треугольных нечетких чисел / В.Е. Болнокин, В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2021. – № 3 (76). – С. 32–45.
51. Болотин, В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. – М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965. – 208 с.
52. Болотин, В.В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений / В.В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1982. – 352 с.
53. Болотин, В.В. Применение метода статистического моделирования для оценки сейсмического риска конструкций / В.В. Болотин, В.П. Радин, В.П. Чирков // Изв. РАН. Механика твёрд. тела. – 1997. – № 6. – С. 168–175.
54. Борисов, В.В. Нечеткие модели и сети / В.В. Борисов, В.В. Круглов, А.С. Федулов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 284 с.
55. Бородин, В.А. Распыливание жидкостей / В.А. Бородин. – М.: Машиностр., 1967. – 208 с.
56. Бугаев, А.С. Устройства на поверхностных акустических волнах / А.С. Бугаев, В.Ф. Дмитриев, С.В. Кулаков. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2009 – 187 с.
57. Булыгин, В.Я. Правдоподобное моделирование / В.Я. Булыгин. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985. – 170 с.
58. Бутко, С.Б. Нормальные волны в ортотропных пластинах и призматических телах с тонкими нерастяжимыми покрытиями граней / С.Б. Бутко, Т.В. Волобуева, В.И. Сторожев // Теорет. и прикл. механика. – 1995. – Вып. 25. – С. 90–97.
59. Вальдберг, А.Ю. Изучение дисперсного состава факела распыла жидкости центробежно-струйной форсунки / А.Ю. Вальдберг, К.П. Макеева, Н.Е. Николайкина // Изв. МГТУ «МАМИ». – 2012. – Т. 4, № 2(14). – С. 7–11.
60. Ванько, В.И. Цилиндрическая оболочка под внешним давлением: неклассическое решение задачи о больших перемещениях / В.И. Ванько // Вестн. Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(4). – С. 1413–1414.

61. Верещака, С.М. Упругие постоянные и обобщенные характеристики жесткости материала слоистой структуры / С.М. Верещака // Вестн. ХПИ. – 2008. – № 36. – С. 29–40.
62. Вертков, А.В. Применение диспергированного газожидкостного потока для охлаждения жидкометаллического лимитера токамака Т-10 / А.В. Вертков, А.Т. Комов, И.Е. Люблинский, С.В. Мирнов, А.Н. Варава, А.В. Дедов, А.В. Захаренков, П.Г. Фрик // ВАНТ. Сер. Термоядерный синтез. – 2018. – Т. 41, вып. 1. – С. 51–58.
63. Витман, Л.А. Распыливание жидкости форсунками / Л.А. Витман. – М.: Госэнергоиздат, 1962. – 264 с.
64. Власов, В.З. Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
65. Волков, А.С. Об использовании сдвиговых ультразвуковых волн с горизонтальной поляризацией при дефектоскопии изделия / А.С. Волков, В.С. Гребенников // Дефектоскопия. – 1988. – № 5. – С. 94–95.
66. Волков, С.Д. Статистическая механика композитных материалов / С.Д. Волков, В.П. Ставров. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 208 с.
67. Волчков, В.В. Нечеткие оценки для скоростей поверхностных волн релеевского типа в упругом полупространстве / В.В. Волчков, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 83–90.
68. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 984 с.
69. Вopenка, П. Математика в альтернативной теории множеств. / П. Вopenка. – М: Мир, 1983. – 152 с.
70. Воронцов, Я.А. Арифметические операции над двухкомпонентными нечеткими числами / Я.А. Воронцов, М.Г. Матвеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системн. анализ и информац. технол. – 2014. – № 2. – С. 75–82.
71. Воронцов, Я.А. Методы параметризованного сравнения нечётких треугольных и трапециевидных чисел / Я.А. Воронцов, М.Г. Матвеев // Вестн.

Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системн. анализ и информац. технол. – 2014. – № 2. – С. 90–97.

72. Воронцов, Я.А. Алгебраические операции с нечеткими LR-числами с использованием преобразования L / Я.А. Воронцов, М.Г. Матвеев // Программн. инженерия. – 2014. – № 8. – С. 23–29.

73. Выскуб, В.Г. Модель нечеткой идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики / В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, В.И. Сторожев, Зыонг Минь Хай // Механика тверд. тела. – 2019. – Вып. 49. – С. 125–134.

74. Выскуб, В.Г. Оценки влияния разброса параметров в прикладных моделях устойчивости цилиндрических оболочек / В.Г. Выскуб, Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай // Механика тверд. тела. – 2020. – Вып. 50. – С. 133–144.

75. Галаева, Н.Л. Определение надежности элементов по критерию прочности при вероятностных и возможностных базовых параметрах в математической модели предельного состояния / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин, О.С. Плотникова // Изв. ОрелГТУ. – 2007. – № 4/16 (538). – С. 86–90.

76. Галаева, Н.Л. Расчет надежности сжатого стержня в составе металлической фермы по критерию устойчивости комбинированным методом / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин // Изв. ОрелГТУ. – 2008. – №2/18 (543). – С. 20–23.

77. Галаева, Н.Л. Расчет надежности внецентренно сжатого индивидуального стального стержня комбинированным методом / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин // Вестн. гражданских инженеров. – 2008. – №4(17). – С. 30–32.

78. Галаева, Н.Л. Определение надежности балки с гибкой стенкой в условиях ограниченной статистической информации о контролируемых параметрах / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин, О.С. Плотникова // Жилищн. стр-во. – 2009. – №4. – С. 15–17.

79. Галаева, Н.Л. Расчет надежности сварных нахлесточных соединений лобовыми швами комбинированным методом / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин //

Вузовская наука – региону: матер. VI Всерос. научно-техн. конф. В 2-х т. – Вологда: ВоГТУ, 2008. – Т. 1. – С. 331–333.

80. Галаева, Н.Л. Комбинированный метод расчета надежности индивидуального элемента в составе металлической конструкции / Н.Л. Галаева // Молодые исследователи – регионам: матер. Всерос. научн конф. студ. и асп.. В 2-х т. – Вологда: ВоГТУ, 2008. – Т. 1. – С.181–182.

81. Галаева, Н.Л. Определение надежности элементов конструкций по критерию прочности комбинированным методом / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин // Строит. механика и расчет сооружений. – 2008. – №3(218). – С. 42–46.

82. Галаева, Н.Л. Расчет надежности рам по критерию устойчивости при многопараметрической нагрузке комбинированным методом / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин // Строит. механика и расчет сооружений. – 2008. – №4(29). – С. 48–52.

83. Галаева, Н.Л. Расчет надежности балки с гибкой стенкой по критерию устойчивости опорного ребра при ограниченной информации // Вузовская наука – региону: матер. седьмой Всерос. науч.-техн. конф. В 2-х т. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – Т. 1. – С. 206–208.

84. Галаева, Н.Л. Теория расчета надежности механических систем при комбинировании нечетких и случайных переменных в математической модели предельных состояний на примере балки с гибкой стенкой / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин // Строит. механика и расчет сооружений. – 2009. – №2 (223). – С. 16–21.

85. Галаева, Н.Л. Расчет надежности балки с гибкой стенкой по критерию прочности пояса при ограниченной информации на стадии эксплуатации / Н.Л. Галаева, В.С. Уткин // Строит. механика и расчет сооружений. – 2009. – №5 (226). – С. 48–52.

86. Галустов, В.С. Прямоточные распылительные аппараты в теплоэнергетике / В.С. Галустов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 240 с.

87. Герасимов, Б.М. Системы поддержки принятия решений: проектирование, применение, оценка эффективности / Б.М. Герасимов, М.М. Дивизинюк, И.Ю. Субач. – Севастополь: СНИЯЭиП, 2004. – 318 с.

88. Герлига, А.В. Результаты моделирования системы аварийного снижения давления под гермооболочкой реакторной установки АЭС с ВВЭР–1000 на основе струйного распылителя-охлаждителя / А.В. Герлига, И.И. Свириденко, Г.Г. Балакан // Вестн. СевГТУ. – 2007. – Вып. 85. – С. 66–73.
89. Гидравлическое распыление [Электронный ресурс] // Интернет-портал «Все о красках». – 2017. – Режим доступа к ресурсу: <http://vseokraskah.net/lakokraska/8-4-gidravlichesкое-raspylenie.html>. – Заголовок с экрана.
90. Глазанов, В.Е. Экранирование гидроакустических антенн / В.Е. Глазанов. – Л.: Судостроение, 1986. – 148 с.
91. Глазанов, В.Е. Экранирование гидроакустических преобразователей / В.Е. Глазанов, А.В. Михайлов. – СПб.: Элмор, 2004. – 256 с.
92. Глазанов, В.Е. Акустические экраны для подводных преобразователей и антенн. Теория и расчет / В.Е. Глазанов. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ "ЛЭТИ", 2013. – 175 с.
93. Глухов, А.А. Нечетко-множественные оценки для фазовых скоростей нормальных волн сдвига в анизотропном функционально-градиентном слое с разбросом значений физико-механических параметров / А.А. Глухов, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 3–4. – С. 31–36.
94. Гончаренко, В.Н. Вариационная формулировка линейных стохастических краевых задач теории упругости / В.Н. Гончаренко // Прикл. механика. – 1982. – Т. 18, № 6. – С. 10–14.
95. Греков, В.Ф. Об устойчивости тонкостенных цилиндров / В.Ф. Греков, А.А. Пьянков, В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетическое машиностроение. – 2013. – № 3(32). – С. 10–12.
96. Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.

97. Григолюк, Э.И. Напряженное состояние вблизи отверстий / Э.И. Григолюк // Некоторые прикл. задачи теории пластин и оболочек. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С. 226-237.
98. Гринченко, В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 284с.
99. Гришин, А.М. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты / А.М. Гришин, А.Н. Голованов, В.И. Зинченко, К.Н. Ефимов, А.С. Якимов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. – 358 с.
100. Губарев, В.Я. Особенности расчета теплообмена при безотрывном турбулентном обтекании высокотемпературных поверхностей тонкодисперсными двухфазными потоками / В.Я. Губарев, А.Г. Арзамасцев // Вестн. Тюменского гос. ун-та. Физ.-мат. моделирование. Нефть, газ, энергетика. – 2015. – Т. 1., № 1(1). – С. 43–49.
101. Даценко, В.И. О пластической постоянной [Электронный ресурс] / В.И. Даценко, Л.С. Сергиенко // Успехи современного естествознания. – 2011. – № 10. – С. 24-26. – Режим доступа к ресурсу: <http://www.natural-sciences.ru/ru/article/view?id=28722>. – Заголовок с экрана.
102. Джанелидзе, Г.Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней / Г.Ю. Джанелидзе // Прикл. матем. и механика. – 1949. – Т. 13, вып. 6. – С. 44–57.
103. Дилигенский, Н.В. Нечеткое моделирование и многокритериальная оптимизация производственных систем в условиях неопределенности: технология, экономика, экология / Н.В. Дилигенский, Л.Г. Дымова, П.В. Севастьянов. – М.: Изд-во Машиностроение–1, 2004. – 397 с.
104. Дитякин, Ю.Ф. Распыливание жидкостей / Ю.Ф. Дитякин, Л.А. Клячко, Б.В. Новиков, В.И. Ягодкин. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.
105. Догода, П.А. Обоснование конструктивных и режимных параметров вращающегося распылителя аэрозольного генератора АВГ-600 [Электронный ресурс] / П.А. Догода, И.В. Соболевский, И.Д. Сидоренко // Интернет-портал «Механизмы и технологии». Сборник статей. – 2019. – Режим доступа к ресурсу: <https://mehanik-ua.ru/sbornik-statej/945-obosnovanie-konstruktivnykh-i-rezhimnykh->

parametrov-vrashchayushchegosya-raspylitelya-aerozolnogo-generatora-avg-600.html.

– Заголовок с экрана.

106. Дьелесан, Э. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов / Э. Дьелесан, Д. Руайе. – М.: Наука. – 1982. – 424 с.

107. Дьяков, С.Ф. Дисперсия крутильной волны, распространяющейся в тонкостенном стержне [Электронный ресурс] / С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин // Интернет-журнал «Науковедение». – 2013. – № 5. – Режим доступа к ресурсу: <https://naukovedenie.ru/PDF/24tvn513.pdf>. – Заголовок с экрана.

108. Дьяков, С.Ф. Сравнительный анализ задачи кручения тонкостенного стержня по моделям Власова и Сливкера / С.Ф. Дьяков // Строит. механика инженерн. констр. и сооружен. – 2013. – № 1. – С. 24–32.

109. Дюбуа, Д. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике / Д. Дюбуа, А. Прад. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.

110. Егорычев, О.О. Колебания плоских элементов конструкций / О.О. Егорычев. – М.: АСВ, 2005. – 240 с.

111. Елисеев, В.Н. Оценка температурного состояния экрана, предназначенного для защиты от излучения струи горячего газа / В.Н. Елисеев, Е.И. Бабарыкин // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2018. – № 4. – С. 37–46.

112. Ерофеев, В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова. – М.: Физматлит, 2002. – 208 с.

113. Есаулов, В.А. Моделирование процесса теплообмена при водовоздушном охлаждении непрерывнолитой заготовки / В.А. Есаулов // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – № 8. – С. 82–85.

114. Жарков, М.Ю. Инновационный способ решения проблем охлаждения и термостабилизации элементов токамаков с капиллярно-пористыми структурами / М.Ю. Жарков, Д.О. Соколов, Б.Л.Х. Чан, А.Н. Варава, И.Е. Люблинский // Тез. докл. Юбил. Конф. Нац. комитета РАН по тепло- и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы тепломассообмена» и XXI Школы-

семинара молодых ученых и специалистов под руководством акад. РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассобмена в энергетических установках» (22–26 мая 2017 г., Санкт-Петербург). В 2 т. Т. 2. – М.: Изд. дом МЭИ, 2017. – С. 183–184.

115. Зайчик, Л.И. Статистические модели движения частиц в турбулентной жидкости / Л.И. Зайчик, В.М. Алинченков. – М.: Физматгиз, 2007. – 312 с.

116. Золотаревский, В.С. Механические свойства металлов / В.С. Золотаревский. – М.: Metallurgia, 1998. – 306 с.

117. Ибрагимов, В.А. Элементы нечеткой математики / В.А. Ибрагимов. – Баку: Азербайджанская гос. нефтяная акад., 2009. – 372 с.

118. Исимару, А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах / А. Исимару. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 317 с.

119. Калоеров, С.А. Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей: монография / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко. – Донецк: ООО «Юго-Восток», Лтд», 2007. – 268 с.

120. Калоеров, С.А. Комплексные потенциалы теории изгиба многосвязных изотропных плит / С.А. Калоеров // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – № 7(53). – С. 83–100.

121. Калоеров, С.А. Концентрация напряжений в многосвязных изотропных пластинках / С.А. Калоеров, Е.В. Авдюшина, А.Б. Мироненко. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2013. – 440 с.

122. Калоеров, С.А. Решения задач об изгибе тонких плит для канонических областей / С.А. Калоеров, А.И. Занько, А.А. Кошкин // Теорет. и прикл. механика. – 2014. – № 9 (55). – С. 99–138.

123. Калмыков, С.А. Методы интервального анализа / С.А. Калмыков, Ю.И. Шокин, З.Х. Юлдашев. – Новосибирск: Наука, 1986. – 223 с.

124. Карабутов, Н.Н. Идентификация неопределенных систем. I. Адаптивные пропорционально-интегральные алгоритмы с неопределенностью / Н.Н. Карабутов // Автомат. и телемех. – 1997. – № 11. – С. 118–130.

125. Карабутов, Н.Н. Идентификация неопределенных систем. II. Получение параметрических ограничений / Н.Н. Карабутов // Автомат. и телемех. – 1999. – № 8. – С. 85–94.

126. Карабутов, Н.Н. Идентификация систем: структурный и информационный анализ. Ч. 1 / Н.Н. Карабутов. – М.: Альтаир, 2005. – 80 с.

127. Карабутов, Н.Н. Информационные аспекты идентификации окрестностных и нечетко-окрестностных систем / Н.Н. Карабутов, А.М. Шмырин // Идентификация систем и задачи управления: труды 5 Междунар. конф. SICPRO-06. – М.: ИЛУ, 2006. – С. 244–254.

128. Карабутов, Н.Н. Окрестностные и нечетко-окрестностные модели пространственно-распределенных систем / Н.Н. Карабутов, А.М. Шмырин, О.А. Шмырина // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2005. – № 12. – С. 19–22.

129. Карабутов, Н.Н. Адаптивные наблюдатели для линейных нестационарных динамических систем с неопределенностью в контуре настройки параметров / Н.Н. Карабутов, П.Н. Карабутов // Тр. VII Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '08. (Москва, 28-31 января 2008 г). Ин-т пробл. управл. им. В.А. Трапезникова РАН. – М.: Ин-т пробл. управл. им. В.А. Трапезникова РАН, 2008. – 2170 с.

130. Карабутов, Н.Н. Структуры в задачах идентификации: построение и анализ / Н. Н. Карабутов. – М.: URSS: ЛЕНАНД, 2018. – 311 с.

131. Карнаухов, В.Г. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, В.В. Михайленко. – Житомир: ЖТТУ, 2005. – 428 с.

132. Карнаухова, Т.В. Активное демпфирование вынужденных резонансных колебаний пологой вязкоупругой композитной цилиндрической панели при действии на нее неизвестной механической нагрузки / Т.В. Карнаухова // Акустичний вісник. – 2008. – Том 11, № 4. – С. 24–30.

133. Капитонов, А.М. Физические свойства горных пород западной части Сибирской платформы / А.М. Капитонов, В.Г. Васильев. – Красноярск: Сибирский фед. ун-т, 2011. – 424 с.
134. Капитонов, А.М. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства / А.М. Капитонов, В.Е. Редькин. – Красноярск: Сибирский фед. ун-т, 2013. – 532 с.
135. Кобелев, В.Н. Расчет трехслойных конструкций: справочник / В.Н. Кобелев, Л.М. Коварский, С.И. Тимофеев. – М.: Машиностроение, 1984. – 304 с.
136. Колесников, А.М. Акустические измерения / А.М. Колесников. – М.: Наука, 1985. – 254 с.
137. Корман, А. Введение в теорию нечётких множеств / Корман А. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
138. Космодамианский, А.С. Изгиб тонких многосвязных плит / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк: ДонГУ, 1973. – 256 с.
139. Космодамианский, А.С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями / А.С. Космодамианский. – К.: Вища школа, 1976. – 200 с.
140. Космодамианский, А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинках / А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров. – К.: Вища школа, 1983. – 160 с.
141. Крючкова, И.Н. Алгоритмы исследования многомерных временных рядов с учетом отсроченного влияния факторов на основе математического моделирования [Электронный ресурс] / И.Н. Крючкова, Е.Е. Красновский, Е.В. Болнокина, О.Я. Кравец // Моделирование, оптимизация и информационные технологии: электронный научный журнал. – 2018. – Т. 6, № 4. – Режим доступа к ресурсу: <https://moit.vivt.ru/?p=7556> (=ru. – Заголовок с экрана.
142. Кудинов, В.А. Аналитические методы теплопроводности / В.А. Кудинов, Б.В. Аверин, Е.В. Стефанюк, С.А. Назаренко. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т., 2004. – 209 с.

143. Кунин, И.А. Теория упругих сред с микроструктурой / И.А. Кунин. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
144. Лабскер, Л.Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица / Л.Г. Лабскер // Качество информационных услуг: сб. научн. трудов. – Тамбов: ТГТУ, 2000. – Вып. III. – С. 34–43.
145. Лабскер, Л.Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица / Л.Г. Лабскер // Финансовая математика. – М.: МГУ, 2001. – С. 401–414.
146. Лабскер, Л.Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков. Часть I. /Л.Г. Лабскер // Управл. риском. – 2001. – № 2. – С. 35–37.
147. Лабскер, Л.Г. Обобщенный критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно рисков. Часть II. /Л.Г. Лабскер // Управл. риском. – 2001. – № 3. – С. 28–36.
148. Лавренюк, В.И. Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала / В.И. Лавренюк // Прикл. механика. – 1973. – Т. IX, вып. 4. – С. 128–132.
149. Ларин, В.Б. Статистические задачи виброзащиты / В.Б. Ларин. – Киев: Наук. думка, 1974. – 128 с.
150. Леденева, Т.М. Обработка нечеткой информации / Т.М. Леденева. – Воронеж: ВГУ, 2006. – 233 с.
151. Леденева, Т.М. Параметрический метод сравнения нечетких чисел / Т.М. Леденева, Д.А. Черменев, С.С. Жданова // Вестн. Воронеж. гос. техн. ун-та. – 2010. – Т. 6, № 6. – С. 62–66.
152. Ложкин, В.Н. Напряженное состояние тонкой пьезоэлектрической пластинки с эллиптическим отверстием / В.Н. Ложкин, Л.Н. Олейник // Механика тверд. тела. – 1978. – №8. – С. 127–130.
153. [Ломакин, В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел](#) / В.А. Ломакин. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 144 с.

154. Лукачев, С. Математические модели и расчет распределения топлива в турбулентном потоке воздуха за центробежной форсункой / С. Лукачев, А. Диденко, И. Зубрилин. – М.: Минобрнауки РФ, 2011. – 115 с.
155. Мавлютов, Р.Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций / Р.Р. Мавлютов. – М.: Наука, 1981. – 142 с.
156. Макаров, Е.В. Двухосное растяжение пластины с круговым отверстием / Е.В. Макаров, И.А. Монахов, И.В. Нефедова // Вестн. РУДН. Сер. Инженерн. исследования. – 2015. – №3. – С. 17–22.
157. Мальков, В.М. Деформация пластины с упругим эллиптическим включением / В.М. Мальков, Ю.В. Малькова // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. – 2015. – Т. 2 (60), вып. 4. – С. 617–632.
158. Марасанов, А.И. К вопросу о стохастическом анализе упругих систем / А.И. Марасанов // Вестн. МИИТ. – 2003. – № 9. – С. 121–125.
159. Матвеев, М.Г. Арифметические операции над двухкомпонентными нечеткими числами / М.Г. Матвеев, Я.А. Воронцов, О.И. Канищева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Системный анализ и информац. технол. – 2014. – № 2. – С. 75–82.
160. Мелешко, В.В. Упругие волноводы: история и современность / В.В. Мелешко, А.А. Бондаренко, С.А. Довгий, А.Н. Трофимчук, Г.Я. ван Хейст // Математич. методы и физико-механические поля. – 2008. – Т.51, №2. – С. 86–104.
161. Меньшенин, А.А. Об устойчивости тонкостенной цилиндрической оболочки с круговыми вырезами с ребрами жесткости при ее осевом сжатии [Электронный ресурс] / А.А. Меньшенин // Научный электронный архив академии естествознания. – 2012. – Режим доступа к ресурсу: <http://econf.rae.ru/article/6968>. – Заголовок с экрана.
162. Митрушкин, Е.И. Нечеткая идентификация механических характеристик тонких изотропных плит на основе резонансно-волновой методики / Е.И. Митрушкин, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2018. – Вып. 48. – С. 90–96.

163. Митрушкин, Е.И. Анализ модели нечеткого оценивания резонансных частот осесимметричных упругих колебаний полых трансверсально-изотропных цилиндров / Е.И. Митрушкин, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2018: матер. III Междунар. научн. конф. (Донецк, 25 окт. 2018 г.) – Т. 1. – Донецк, Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 296–298.

164. Михасев, Г.И. О бифуркации длинных оболочек, лежащих на упругом основании, под действием гидростатического давления / Г.И. Михасев, Т.В. Никонова // Вестн. Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 3. – С. 129–132.

165. Молодецкий, А.В. Влияние глубины залегания угольных пластов на механические свойства угля / А.В. Молодецкий, В.Н. Ревва // Физико-технич. пробл. горного пр-ва. – 2009. – Вып. 12. – С. 55–58.

166. Морозов, Н.Ф. Континуальная модель изгиба и колебаний многослойной нанопластины / Н.Ф. Морозов, П.Е. Товстик, Т.П. Товстик // Физ. мезомех. – 2016. – Т.9, № 6. – С. 27–33.

167. Муленко, В.В. Моделирование течения реальной жидкости в распылителе центробежной форсунки / В.В. Муленко, А.И. Ходырев // Машиностроение и машиноведение: тр. РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина. – 2018. – № 3(292). – С. 161–174.

168. Мутин, Д.И. Учет разброса значений экзогенных параметров в модели устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при равномерном осевом сжатии / Д.И. Мутин, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие чтения 2020: матер. V Междунар. научн. конф. (Донецк, 17-18 ноя. 2020 г.). – Т. 1, Ч. 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 79–81.

169. Мущанов, В.Ф. Линейные и нелинейные задачи теории упругости в расчетах тонкостенных конструкций / В.Ф. Мущанов, А.И. Демидов. – Макеевка: ДонГАСА, 2000. – 182 с.

170. Мягкие вычисления и измерения: теоретические основы и методы / под ред. С.В. Прокопчиной. – М.: Научн. библиотека, 2017. – 419 с.

171. Назаров, Д.М. Основы теории нечетких множеств / Д.М. Назаров, Л.К. Конышева. – СПб.: Питер, 2011. – 192 с.
172. Научные аспекты повышения надежности и экономичности шахтных копров: научная монография / Г.В. Степанов, В.Н. Кущенко, В.М. Левин, В.Ф. Мущанов. – Макеевка: ДонНАСА, 2014. – 119 с.
173. Нгуен, Зуен Фонг Упруго-пластическая модель массива, учитывающая изменение прочности пород вокруг выработки для расчета крепи перегонных метрополитена в сложных горно-геологических условиях / Зуен Фонг Нгуен // Горный информационно-аналитический бюлл. – 2016. – № 6. – С. 241–250.
174. Ши, Нгуен Куок. Исследование моделей высокотемпературной термостабилизации с нечеткими параметрами / Нгуен Куок Ши Чан Ба Ле Хоанг, С.В. Сторожев. – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2019. – 216 с.
175. Нежданов, А.А. Геологическая интерпретация сейсморазведочных данных / А.А. Нежданов. – Тюмень: ТИУ, 2017. – 171 с.
176. Номбре, С.Б. Оценки влияния нечеткости геометрических экзогенных параметров в модели растяжения ортотропной пластины с эллиптическим отверстием / С.Б. Номбре, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2017. – № 1(58). – С. 19–26.
177. Номбре, С.Б. Анализ влияния неопределенностей в модели распространения нормальных волн сдвига в двухслойном функционально-градиентном волноводе симметричного строения / С.Б. Номбре, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2019: матер. IV Междунар. научн. конф. (Донецк, 31 окт. 2019 г.) – Т. 1, Ч. 1.– Донецк, Изд-во ДонНУ, 2019. – С. 71–73.
178. Номбре, С.Б. Нечетко-множественная методика учета разбросов исходных параметров в задаче о двухстороннем растяжении пластины с впаянной жесткой круговой шайбой / С.Б. Номбре, С.А. Прийменко, С.В. Сторожев // Совр. тенденции развития матем. и ее прикл. аспекты–2020: матер. IX Междунар. научн.-практ. интернет-конф., посв. 100-летию ДонНУЭТ (Донецк, 29 мая 2020 г.). – Донецк: ГОУ ВПО «ДонНУЭТ», 2020. – С 40–44.

179. Овчаренко, М.П. Исследование параметров водовоздушного вторичного охлаждения МНЛЗ / М.П. Овчаренко // Сталь. – 1986. – № 1. – С. 27–29.
180. Орлов, В.С. Фильтры на поверхностных акустических волнах / В.С. Орлов, В.С. Бондаренко. – М.: Радио и связь, 1984. – 272с.
181. Орлов, А.И. Системная нечеткая интервальная математика: монография / А.И. Орлов, Е.В. Луценко. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – 600 с.
182. Павлов, А.Н. Принятие решений в условиях нечеткой информации: учеб. пособие / А.Н. Павлов, Б.В. Соколов. – СПб.: ГУАП, 2006 – 72 с.
183. Павлыш, В.Н. Исследование нечетких моделей устойчивости и резонансных колебаний замкнутых сферических и эллипсоидальных оболочек / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2020. – № 3(72). – С. 32–42.
184. Павлыш, В.Н. Влияние разбросов значений исходных параметров в моделях изгибных форм потери устойчивости сжимаемых прямых стержней: нечетко-множественный подход / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2020. – № 3(72). – С. 43–56.
185. Павлыш, В.Н. Нечеткие оценки в модели распространения магнитоупругих волн / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2020. – № 4(73). – С. 33–48.
186. Павлыш, В.Н. Нечетко-множественный анализ математической модели устойчивости тороидальных оболочек / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2021. – № 1(74). – С. 65–73.
187. Павлыш, В.Н. Исследование модели упругопластического деформирования полого шара под действием внутреннего давления в рамках вероятностного и нечетко-множественного подходов / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2021. – № 2(75). – С. 59–66.
188. Павлыш, В.Н. Нечетко-множественное оценивание параметров энергетических потоков для волн сдвига в составном волноводе из изотропного и ортотропного полуслоев / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие

чтения 2021: матер. VI Междунар. научн. конф. (Донецк, 26–27 окт. 2021 г.). – Т. 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 57–60.

189. Павлыш, В.Н. Сопоставление результатов применения неидемпотентной арифметики и арифметики двухкомпонентных нечетких треугольных чисел для учета неопределенности в модели устойчивости тонких сферических оболочек / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2021: матер. VI Междунар. научн. конф. (Донецк, 26–27 окт. 2021 г.). – Т. 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2021. – С. 60–63.

190. Павлыш, В.Н. Исследования статических деформационных моделей устойчивости оболочек замкнутой тороидальной формы / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Искусств. интеллект: теорет. аспекты и практич. применение. Матер. Донецкого междунар. научн. круглого стола. – Донецк: ГУ «ИПИИ», 2021. – С. 145–150.

191. Павлыш, В.Н. Математическое моделирование в задачах устойчивости на основе теории нечетко-множественного анализа / В.Н. Павлыш, С.В. Сторожев // Пробл. искусств. интеллекта. Разд. 2. Математика. – 2021. – №2 (21). – С. 44–51.

192. Пажи, Д.Г. Распылители жидкости / Д.Г. Пажи, В.С. Галустов. – М.: Химия, 1979. – 216 с.

193. Пажи, Д.Г. Основы техники распыления жидкости / Д.Г. Пажи, В.С. Галустов. – М.: Химия, 1984. – 256 с.

194. Панич, А.А. Кристаллические и керамические пьезоэлектрики [Электронный ресурс] / А.А. Панич, М.А. Мараховский, Д.В. Мотин // Инженерный вестник Дона. – 2011. – № 1. – Режим доступа к ресурсу: <http://0421100096.ivdon3@bk.ru>. – Заголовок с экрана.

195. Пахомова, О.А. Способ построения маршрута движения между нечеткими границами детектирования объекта / О.А. Пахомова, О.Я. Кравец // Информац. технол. моделиров. и управл. – 2017. – № 5 (107). – С. 370–373.

196. Попов, Н.Н. Ползучесть стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием / Н.Н. Попов // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.–мат. науки. – 2008. – № 2 (17). – С. 126–132.

197. Прийменко, С.А. Нечеткая оценка импеданса тонкого поперечно-анизотропного перфорированного гидроакустического покрытия / С.А. Прийменко, С.В. Сторожев // Совр. тенденции развития матем. и ее прикл. аспекты–2017: матер. VI Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (Донецк, 26 мая 2017 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2017. – С. 32–35.

198. Прийменко, С.А. Нечетко-множественный анализ факторов неопределенности в модели перфорированных гидроакустических экранов с жестко прикрепленными герметизирующими покрытиями / С.А. Прийменко, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев, Зыонг Минь Хай // Совр. тенденции развития матем. и ее прикл. аспекты–2017: матер. VII Междунар. научн.-практ. интернет-конф. (Донецк, 25 мая 2018 г.). – Донецк: ГО ВПО «ДонНУЭТ», 2018. – С. 20–23.

199. Прийменко, С.А. Нечеткие оценки в модели напряженно-деформированного состояния изгибаемых тонких плит эллиптического очертания / С.А. Прийменко, С.Б. Номбре, С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2018: матер. III Междунар. научн. конф. (Донецк, 25 окт. 2018 г.) – Т. 1. – Донецк, Изд-во ДонНУ, 2018. – С. 306–308.

200. Прийменко, С.А. Методика анализа факторов неопределенности в модели резонансных колебаний трехслойных композитных цилиндрических панелей / С.А. Прийменко, С.В. Сторожев, В.А. Шалдырван, Чан Ба Ле Хоанг // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2019. – № 3–4. – С. 88–94.

201. Прохоров, С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов / С.А. Прохоров. – Самара: СГАУ, 2001. – 329 с.

202. Пугачев, В.С. Теория вероятности и математическая статистика / В.С. Пугачев. – М.: Физматлит, 2002. – 496 с.

203. Пытьев, Ю.П. Вероятность, возможность и субъективное моделирование в научных исследованиях: математические и эмпирические основы, приложения / Ю.П. Пытьев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 267 с.

204. Распылительные технологии [Электронный ресурс]. // Интернет-портал Lechler GmbH. – 2019. – Режим доступа к ресурсу: http://www.lechler-forsunki.ru/-/-/cbw_GZ_AAABCBgAAAEyeIkEMEhk-ru_RU. – Заголовок с экрана.
205. Рекач, В.Г. Руководство по решению задач прикладной теории упругости / В.Г Рекач. – М.: Высшая школа, 1984. – 287 с.
206. Речицкий, В.И. Радиоконпоненты на поверхностных акустических волнах / В.И. Речицкий. – М.: Сов. радио, 1984. – 112 с.
207. Ротштейн, А.П. Нечеткая надежность алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба. – Винница: Континент-ПРИМ, 1997. – 142 с.
208. Ротштейн, А.П. Моделирование и оптимизация надежности многомерных алгоритмических процессов / А.П. Ротштейн, С.Д. Штовба, А.Н. Козачко. – Винница: УНІВЕРСУМ, 2007. – 215 с.
209. Рыжов, А.П. Модели поиска решений в нечеткой среде / А.П. Рыжов. – М.: Изд-во Центра прикл. исследов. при механико-математич. ф-те МГУ, 2004. – 96 с.
210. Савельев Л.М. Устойчивость конструкций. Конспект лекций [Электронный ресурс] / Л.М. Савельев // Самара: СГАУ. – 2013. – 43 с. – Режим доступа к ресурсу: <http://repo.ssau.ru/bitstream/Uchebnye-posobiya/Ustoichivost-konstrukcii-Elektronnyi-resurs-elektron-konspekt-lekcii-napravlenie-15160068-Priklad-mehanika-magist-progr-Prochnost-konstrukcii-letat-apparatov.pdf>. – Заголовок с экрана.
211. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / В.Г. Савин. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
212. Седов, Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1984. – 560 с.
213. Сидоренко И.Д. Расчет угла установки лопастей крыльчатки вращающегося распылителя [Электронный ресурс] / И.Д. Сидоренко // Интернет портал SWorld – 2013 – Режим доступа к ресурсу: <http://www.sworld.com.ua/index.php/ru/conference/the-content-of-conferences/archives-of-individual-conferences/march-2013>. – Заголовок с экрана.

214. Славкова, Л.Г. Математическое моделирование движения потока газа в пневматическом распылителе жидкости / Л.Г. Славкова // Наук. вісн. Луганського нац. аграрного ун-ту. – 2011. – Вип. 30. – С. 266–271.
215. Сливкер, В.И. Строительная механика. Вариационные основы. / В.И. Сливкер. – М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2005. – 736 с.
216. Соколов, Е.Я. Струйные аппараты / Е.Я. Соколов, Н.М. Зингер – Л.: Энергоатомиздат, 1989. – 352 с.
217. Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
218. Солдатова, М.С. Моделирование процесса распыления жидкости из форсунки / М.С. Солдатова // Решетневские чтения. – 2017. – С. 374–375.
219. Сорокин, С.А. Теоретико-методологические основы проектирования печатных плат высокопроизводительных вычислительных устройств / С.А. Сорокин. – М.: Изд-во МИРЭА, 2017. – 286 с.
220. Софронов, В.Л. Расчет струйных аппаратов: Учебное пособие / В.Л. Софронов, И.Ю. Русаков, Т.В. Ощепкова. – М: СТИ НИЯУ МИФИ, 2011. – 33 с.
221. Справочное пособие для обработки материалов инженерно-геологических изысканий. – М: ДАР\ВОДГЕО, 2005. – 94 с.
222. Ставрогин, А.Н. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах / А.Н. Ставрогин, А.Г. Протосеня. – М.: Недра, 1986. – 312 с.
223. Сторожев, С.В. Нечетко-множественное обобщение методик оценки стратегий в условиях неопределенности / С.В. Сторожев // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2014. – №1. – С. 111–115.
224. Сторожев, С.В. Алгоритм двухпараметрической аппроксимации нормального частотного распределения нечетким интервалом / С.В. Сторожев // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2014. – №2. – С. 78–80.
225. Сторожев, С.В. Модель селективного отбора стратегий на основе нечетко-интервального обобщения критерия Шеремета / С.В. Сторожев // Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти – 2014. Матер. III Міжнар.

науково–практичн. інтернет конф (Донецьк, 20 травня 2014). – Донецьк: ДонНУЕТ, 2014 – С. 157–160.

226. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки для характеристик нелинейных вторых гармоник объемных волн сдвига в трансверсально-изотропной упругой среде / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. А. Естественные науки. – 2015. – № 2. – С. 38–43.

227. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки некоторых характеристик процессов распространения, отражения и преломления волн деформаций / С.В. Сторожев // Совр. тенденции развития математики и ее прикл. аспекты – 2015: Матер. IV Междунар. научно-практич. интернет-конф., 25 мая 2015. – Донецк: ДонНУЭТ, 2015. – С. 60–62.

228. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки характеристик упругих волн в анизотропных средах / С.В. Сторожев // Матем. моделирование и биомеханика в современном ун-те: тез. докл. X Всерос. школы-семинара, пос. Дивноморское, 25–30 мая 2015 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. – С. 112.

229. Сторожев, В.И. Нечетко-множественные оценки в моделях теории объемных волн деформаций / В.И. Сторожев, С.В. Сторожев // Механика тверд. тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 103–111.

230. Сторожев, С.В. Модель нечеткого оценивания значений фазовых скоростей нормальных упругих волн в мембранированных ортотропных пластинах / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // История и методология науки: Междунар. научно-методич. конф., посв. 100-летию со дня рождения А.И. Бородина. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2016. – С. 81–83.

231. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки скоростей локализованных упругих волн в полубесконечных средах / С.В. Сторожев // Матем. моделирование и биомеханика в современном ун-те: тез. докл. XI Всерос. школы-семинара, пос. Дивноморское, 23–27 мая 2016 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 132.

232. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки для фазовых скоростей нормальных упругих волн в ортотропном слое с проскальзывающими закреплениями граней / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие чтения 2016: Матер. I Междунар. научн.

конф. (Донецк, 16–18 мая 2016 г.). – Т 1. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 43–46.

233. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое / С.В. Сторожев // Совр. пробл. механики сплошной среды: тез. докл. XVIII Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 7–10 ноя. 2016 г.). – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 148.

234. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки для характеристик нормальных волн деформаций в поперечно-анизотропном упругом слое / С.В. Сторожев // Совр. пробл. механики сплошной среды: тр. XVIII Междунар. конф. (Ростов-на-Дону, 7–10 ноя. 2016 г.). – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2016. – С. 200–204.

235. Сторожев, С.В. Моделирование факторов неопределенности в процессах взаимодействия электроупругих волн с плоской границей контакта пьезокерамических тел / С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2016. – № 1 (56). – С. 46–59.

236. Сторожев, С.В. Методика получения нечетко-множественных оценок характеристик нормальных волн в анизотропных прямоугольных волноводах с комбинированными смешанными условиями на граничных поверхностях / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2016. – № 2 (57). – С. 24–38.

237. Сторожев, С.В. Анализ неопределенности в оценках концентрации напряжений у контура эллиптического отверстия с нечетким показателем эксцентриситета в анизотропной пластине / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Матем. моделирование и биомеханика в современном ун-те: тез. докл. XII Всерос. школы-семинара, пос. Дивноморское, 29 мая – 3 июня 2017г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2017. – С. 141.

238. Сторожев, С.В. Нечетко множественный анализ влияния разброса физико-механических и геометрических параметров при исследовании концентрации напряжений в пластинах с эллиптическими отверстиями / С.В. Сторожев // Донецкие чтения 2017: Матер. Междунар. науч. конф. студентов и

молодых ученых, Донецк, 17–20 окт. 2017 г. – Т. 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2017. – С.35–36.

239. Сторожев, С.В. Алгоритмы применения аппарата нечетких вычислений для учета факторов неопределенности в задачах волновой механики электроупругих сред / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2017. – № 2(59). – С. 44–47.

240. Сторожев, С.В. Нечеткие оценки показателей концентрации напряжений в телах с упругими включениями / С.В. Сторожев, В.Е. Болнокин, С.Б. Номбре // Матем. моделирование и биомеханика в современном ун-те: тез. докл. XIII Всерос. школы-семинара, пос. Дивноморское, 28 мая – 1 июня 2018 г. – Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2018. – С. 84.

241. Сторожев, С.В. Нечетко-множественная методика оценивания некоторых характеристик функционирования центробежно-струйных форсунок в технических системах термостабилизации / С.В. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг // Вестн. Донецкого нац. ун-та. Сер. Г. Технич. науки. – 2019. – № 4. – С. 42–49.

242. Сторожев, С.В. Учет неопределенности экзогенных параметров при моделировании процессов распада струи жидкости в пневматических распылителях / С.В. Сторожев, Нгуен Куок Ши, Чан Ба Ле Хоанг // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2019. – № 1 (66). – С. 3–10.

243. Сторожев, С.В. Нечетко-множественные оценки скоростей волн кручения в тонкостенных стержнях на основе уточненных теорий / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре, С.А. Прийменко // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2019. – № 2–3 (67–68). – С. 32–53.

244. Сторожев, С.В. Нечетко-множественная методика оценки влияния разбросов исходных параметров на характеристики напряженного состояния изгибаемых тонких изотропных плит / С.В. Сторожев // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2019. – № 4 (69). – С. 33–20.

245. Сторожев, С.В. Нечетко-множественная методика учета неопределенности экзогенных параметров в модели собственных колебаний

предварительно напряженных прямоугольных пластин / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Донецкие чтения 2020: матер. V Междунар. научн. конф. (Донецк, 17-18 ноя. 2020 г.). – Т. 1, Ч. 1. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2020. – С. 93–96.

246. Сторожев, С.В. Нечетко-множественная методика исследования модели движения капель охлаждающей жидкости при отрыве с поверхности вертикально вращающегося распылителя / С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Труды ИПММ. – 2020. – Вып. 34. – С. 112–124.

247. Сторожев, С.В. Нечетко-множественное моделирование процессов распыления жидкости в центробежных форсунках / С.В. Сторожев, Чан Ба Ле Хоанг // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2020. – № 1 (70). – С. 48–60.

248. Сторожев, С.В. Нечетко-множественное моделирование эффектов неопределенности для скоростей нормальных волн деформаций в прямоугольном монокристаллическом волноводе кубической системы с мембранными покрытиями граней / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Журн. теорет. и прикл. механики. – 2020. – № 2 (71). – С. 56–67.

249. Сторожев, С.В. Методы теории нечетких множеств в задачах устойчивости тонкостенных конструкций с неопределенными параметрами / С.В. Сторожев, С.Б. Номбре // Проблемы прочности, пластичности и устойчивости в механике деформируемого твердого тела. Матер. IX Междунар. научн. симпоз. (Тверь, 15–17 дек. 2020 г.). – Тверь: Изд-во Тверского гос. ун-та, 2021. – С. 88–92.

250. Сторожев, С.В. Нечетко-множественный анализ факторов неопределенности в геоакустической модели волнового деформирования многокомпонентной среды: теоретический алгоритм / С.В. Сторожев // Труды РАНМИ. – 2021. – № 12–13 (27–28). – С. 67–84.

251. Стоян, Ю.Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю.Г. Стоян, С.В. Яковлев. – Киев: Наук. думка, 1986. – 266 с.

252. Сушко, В.Ю. Метод выбора параметров многослойной защиты электронного устройства от мощного теплового воздействия / В.Ю. Сушко, В.А.

Кораблев, А.В. Шарков // Изв. ВУЗов. Приборостроение. – 2006. – Т. 49, № 3. – С. 64–69.

253. Сушко, В.Ю. Влияние вспучивающегося покрытия на тепловой режим многослойной защиты при воздействии высокой температуры / В.Ю. Сушко // Научно-техн. вестн. СПбГУ ИТМО. – 2006. – Вып. 28. – С. 243–249.

254. Техника распыления [Электронный ресурс] // Интернет портал Компании Иримэкс. – 2017. – Режим доступа к ресурсу: http://www.c-irimex.ru/catalog/forsunki_sistemiy_raspiylenija/forsunki_i_raspiylitelniye_sistemiy_lechler/tehnika_raspiylenija. – Заголовок с экрана.

255. Тимошенко, С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.

256. Тодчук, В.А. Устойчивость цилиндрических оболочек / В.А. Тодчук // Компрессорное и энергетич. машиностроение. – 2016. – № 3 (45). – С. 25–28.

257. Томлёнов, А.Д. Теория пластического деформирования металла / А.Д. Томленов. – М.: Металлургия, 1972. – 408 с.

258. Труэлл, Р. Ультразвуковые методы в физике твердого тела / Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б.Чик Б. – М.: Мир, 1972. – 307 с.

259. Турчанинов, И.А. Основы механики горных пород / И.А. Турчанинов, М.А. Иосиф, Э.В. Каспарьян. – Л.: Недра, 1989. – 488 с.

260. Усаченко, Б.М. Свойства пород и устойчивость горных выработок / Б.М. Усаченко. – Киев: Наук. думка, 1979. – 136 с.

261. Усков, А.А. Комплексный и матричный методы выполнения арифметических операций над нечёткими числами / А.А. Усков, И.А. Киселев // Управление большими системами: сб. трудов. – 2012. – № 40. – С. 96–107.

262. Ухоботов, В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учеб. пособие / Ухоботов В. И. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. – 245 с.

263. Федулов, А.С. Вид взаимодействия нечетких чисел, ограничивающий возрастание неопределенности при выполнении операций нечеткой арифметики / А.С. Федулов // Вестн. МЭИ. – 2006. – № 1. – С. 101–109.

264. Хавкин, Ю.И. Центробежные форсунки / Ю.И. Хавкин. – Л.: Машиностроение, 1976. – 168 с.
265. Хапатхаева, Н.Б. Введение в теорию нечётких множеств. Часть 1 / Хапатхаева Н.Б., Дамбаева С.В., Аюшеева Н.Н. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2004. – 68 с.
266. Хасанов, М.М. Устойчивость стенки стального силоса при осесимметричном выпучивании и начальном искривлении оболочки, направленном внутрь [Электронный ресурс] / М.М. Хасанов, Т.М. Чапаев, Б.Х. Амшоков // Электронный научный журнал «Инженерный вестник Дона». – 2018. – №2. – Режим доступа к ресурсу: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4944>. – Заголовок с экрана.
267. Хищенко, В.И. Случайные данные: структура и анализ / В.И. Хищенко. – М.: Техносфера, 2017. – 423 с.
268. Ходырев, А.И. О распределении капель по размерам в спектре при распыливании жидкости центробежной форсункой / А.И. Ходырев, Д.А. Ходырев, М.Г. Блохина // Труды Российского гос. ун-та нефти и газа имени И.М. Губкина. – 2017. – № 4. – С. 101–113.
269. Хрупов, А.А. Вывод частотного уравнения собственных поперечных колебаний предварительно напряжённой пластины, жёстко закреплённой по контуру / А.А. Хрупов // Вестн. МГСУ. – 2009. – № 2. – С.54–57.
270. Хрупов, А.А. Вывод частотного уравнения поперечных колебаний предварительно напряжённой пластины / А.А. Хрупов // Промышл. и гражданское строительство. – 2009. – № 5. – С.76–77.
271. Шарый, С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Новосибирск: Ин-т вычислительн. технологий СО РАН. Из-во «XYZ», 2012. – 604 с.
272. Шевляков, А.О. Алгебраические операции с нечеткими треугольными числами с использованием алгебры двухкомпонентных чисел / А.О. Шевляков //

Вестн. ВГУ. Сер. Системный анализ и информац. технол. – 2017. – № 1. – С. 149–153.

273. Шевляков, А.О. Сравнение различных нечетких арифметик / А.О. Шевляков, М.Г. Матвеев // Искусств. интеллект и принятие решений. – 2017. – № 4. – С. 60–68.

274. Шекихачев, Ю.А. Математическое моделирование движения капли жидкости с поверхности вертикально вращающегося дискового распылителя [Электронный ресурс] / Ю.А. Шекихачев, Л.А. Шомахов, Л.М. Хажметов, С.А. Твердохлебов, В.Н. Бербеков, Ю.А. Афасижев // Научный журнал КубГАУ. – 2011. – № 72(08). – Режим доступа к ресурсу: <http://ej.kubagro.ru/2011/08/pdf/28.pdf>. – Заголовок с экрана.

275. Шеремет, А.Д. Методика финансового анализа деятельности коммерческих организаций / А.Д. Шеремет, Е.В. Негашов. – М.: Экономика, 2008. – 371 с.

276. Шермергор, Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред / Т.Д. Шермергор. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

277. Шокин, И.Ю. Интервальный анализ / И.Ю. Шокин. – Новосибирск: Наука, 1981. – 112 с.

278. Шутилов, В.А. Основы физики ультразвука / В.А. Шутилов – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1980. – 280с.

279. Юдаков, П.В. Задачи о трехмерной упаковке и методы их решения [Электронный ресурс] / П.В. Юдаков // Электронный научн. журн. «Инженерный вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана». – 2015. – Режим доступа к ресурсу: <http://engsi.ru/doc/781936.html>. – Заголовок с экрана.

280. Якимов, А.С. Математическое моделирование тепловой защиты и некоторых задач тепломассообмена / А.С. Якимов. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 2015. – 214 с.

281. Abbasbandy, S. Ranking fuzzy numbers using fuzzy maximizing-minimizing points / S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, S. Salahshour // Proc. of the 7th

conf. of the European Soc. for Fuzzy Logic and Technol. (EUSFLAT-1022) and LFA-2011. – Atlantis Press, 2011. – P. 763–769.

282. Abd-alla, A.N. Calculation of Bulk Acoustic Wave Propagation Velocities in Trigonal Piezoelectric Smart Materials / A.N. Abd-alla, N.A. Askar // *Appl. Math. and Information Sciences*. – 2014. – V. 8, N 4. – P. 1625–1636.

283. Ahmadian, A.A New Distance Measure for Trapezoidal Fuzzy Numbers / A. Ahmadian, M.J. Ebadi, F. Bt. Ismail et al. // *Math. Problems in Eng.* – 2013. – Vol. 2013. – doi:10.1155/2013/424186

284. Anastassiou, G.A. *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory* / G.A. Anastassiou. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – 444 p.

285. Atanackovic, T.M. *Stability Theory of Elastic Rods* / T.M Atanackovic. – Singapore: World Sci. Publ., 1997. – 440 p.

286. Ban, A.I. Trapezoidal approximation and Aggregation / A.I. Ban, L.C. Coroianu, P. Grzegorzewski // *Fuzzy Sets Syst.* – 2011. – Vol. 177. – P. 45–59.

287. Bede, B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic* / B. Bede. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. – 276 p.

288. Bennell, J.A. Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems / J.A. Bennell, G. Scheithauer, Yu. Stoyan, T. Romanova // *J. Annals of Operations Res.* – 2010. – V. 179, N 1. – P. 343–368.

289. Berlincourt, D. Properties of Piezoelectricity Ceramics [Электронный ресурс] / D. Berlincourt, H.H.A. Krueger // Интернет-портал Morgan Electro Ceramics Web Site. – Technical Publication TP-226. – 2018. – Режим доступа к ресурсу: <http://www.morgan-electroceramics.com>. – Заголовок с экрана.

290. Birman, V. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures / V. Birman V., L.W. Byrd // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – Vol. 60, N 5. – P. 195–216.

291. Bolnokin, V.E. Hydroacoustic screening by using a layer from anisotropic functionally graded material with exponential inhomogeneity along thickness direction / V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, V.I. Storozhev // *Modeling and inform. technol.*:

selected papers of the int. sci. school "Paradigma" (Summer–2015, Varna, Bulgaria). – Yelm, WA, USA: Sci. Book Publ. House, 2015. – P. 45–52.

292. Bolnokin, V.E. The synthesis of the algorithms for adaptive control by nonlinear dynamic objects on the basis of the neural network / V.E. Bolnokin, D.I. Mutin, E.I. Mutina, S.V. Storozhev // Int. Sci. Workshop «Advanced technol. in mater. sci., mech. and automation eng.». MIP: Eng.–2019 within the framework of XXIV Int. Sci. and Res. Open Conf. «Modern Informatization Problems» (Yelm, WA, USA). Abstract Book. – Krasnoyarsk: Sci. & Technol. City Hall, 2019. – P. 128.

293. Bolnokin, V.E. The synthesis of the algorithms for adaptive control by nonlinear dynamic objects on the basis of the neural network / V.E. Bolnokin, D.I. Mutin, E.I. Mutina, S.V. Storozhev // IOP Conf. Series: Mater. Sci. and Eng. – 2019. – Vol. 537. – 042013. doi:10.1088/1757-899X/537/4/042013

294. Chalco-Cano, Y. Single level constraint interval arithmetic / Y. Chalco-Cano, W. Lodwick, B. Bede // Fuzzy Sets and Syst. – 2014. – № 257. – P. 146–168.

295. [Chamekh](#), M. Stability of elastic rods with self-contact / M. [Chamekh](#), S. [Mani-Aouadi](#), M. [Moakher](#) // [Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.](#) – 2014. – V. 279. – P. 227–246. doi:[10.1016/j.cma.2014.06.027](#)

296. Cheng, C.H. A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method / C.H. Cheng // Fuzzy Sets and Syst. – 1998. – V. 95. – P. 307–317.

297. Croll, J.G.A. Stability in Shells / J.G.A. Croll // [Nonlinear Dynamics](#). – 2006. – Vol. 43. – P. 17–28.

298. Constanda, C. Mathematical Methods for Elastic Plates / C. Constanda. – London: Springer-Verlag, 2014. – 213 p.

299. Daniel, I.M. Engineering Mechanics of Composite Materials, 2nd ed. / I.M. Daniel, O. Ishai. – New York: Oxford University Press, 2006. – 411 p.

300. Datta, S.K. Elastic Waves in Composite Media and Structures: With Applications to Ultrasonic Nondestructive Evaluation, in Mechanical Engineering Series / S.K. Datta, A.H. Sha. – Boca Raton: CRC Press, 2008. – 336 p.

301. De Godoy, T.C. Effect of parametric uncertainties on the performance of a piezoelectric energy harvesting device / T.C. De Godoy, M.A. Trindade // J. Braz. Soc.

Mech. Sci. & Eng. – 2012. – Vol. 34, No. spe2. [doi:10.1590/S1678-58782012000600003](https://doi.org/10.1590/S1678-58782012000600003).

302. Detyniecki, M. Ranking fuzzy numbers using α -weighted valuations / M. Detyniecki, R.R. Yager // Intern. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based syst. – 2001. – Vol 8 (5). – P. 573–592.

303. Dubois, D. Operations of Fuzzy Number's / D. Dubois, H. Prade // Intern. J. of Syst. Sci. – 1978. – №9 (6). – P. 613–626.

304. Facchinetti, G. Note on ranking fuzzy triangular numbers / G. Facchinetti, R.G. Ricci, S. Muzzioli // Intern. J. of Intelligent Syst. – 1998. – № 13. – P. 613–622.

305. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.

306. Freret, L. Pulsated free jets with polydisperse spray injection: experiments and numerical simulations / L. Freret, C. Lacour, S. Chaisemartin, S. Ducruix, D. Durox, F. Laurent, M. Massot // Proc. of Combustion Inst. – 2009. – Vol. 32. – P. 2215–2222.

307. Gabbert, U. Smart structures and structronic systems / U. Gabbert, H. S. Tzou. – Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2001. – 384 p.

308. Gabbert, U. Smart materials, precision sensors / actuators, smart structures, and structronic systems / U. Gabbert, H.S. Tzou, H.-J. Lee, S.M. Arnold // Mech. of Advanced Mater. and Structures. – 2004. – V. 11. – P. 367–393.

309. Goetschel, Jr.R. Elementary fuzzy calculus / Jr.R. Goetschel, W. Voxman // Fuzzy Sets and Syst. – 1986. – № 18. – P. 31–43.

310. Grzegorzewski, P. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers / P. Grzegorzewski, E. Mr'owka // Fuzzy Sets and Syst. – 2005. – V. 153. – P. 115–135.

311. Hanss, M. Applied Fuzzy Arithmetic. An introduction with Engineering Application / M. Hanss.– Heidelberg: Springer–Verlag, 2005. – 253 p.

312. Kandasamy, W.B.V. Special set linear algebra and special set fuzzy linear algebra / W.B.V. Kandasamy, F. Smarandache, K. Ilanthenral. – Slatina, Judetul Olt, Romania: Editura CuArt, 2009. – 469 p.

313. [Karabutov, N.N. Formalization of constraints under uncertainty and constrained design of adaptive observers for dynamic systems / N.N. Karabutov // Comput. Math. Model. – 1998. – V. 9, No. 2. – P. 120–128.](#)
314. [Karabutov, N.N. Identification of uncertain systems. I: Adaptive proportional-integral algorithms with uncertainty / N.N. Karabutov // Autom. Remote Control. – 1997. – V. 58, No. 11, Pt. 2. – P. 1795–1805.](#)
315. [Karabutov, N.N. Identification of uncertain systems. II: Parametric constraints / N.N. Karabutov // Autom. Remote Control. – 1999. – V. 60, No. 8, Part 2. – P. 1127–1135.](#)
316. [Karabutov, N.N. Identification of uncertain systems in the class of adaptive algorithms with uncertainty / N.N. Karabutov // Dokl. Math. – 1999. – V. 59, No. 1. – P. 149–151.](#)
317. Karabutov, N.N. Estimation of Spectrum Eigenvalues Dynamic System on the Basis of Application Lyapunov Exponents / N.N. [Karabutov, V.M. Lokhin, S.V. Manko, M.P. Romanov](#) // Int. J. of Mater., Mech. and Manufacturing. – 2016. – Vol. 4, No. 2. – P. 148–151.
318. Kaufmann, A. Introduction to fuzzy arithmetic-theory and applications / A. Kaufmann, M. Gupta. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. – 349 p.
319. Kharat, A. Stress Concentration at Openings in Pressure Vessels – A Review / A. Kharat, V.V. Kulkarni // Int. J. Innovative Res. Sci. Eng. Technol. – 2013. – Vol. 2, No. 3. – P. 670–678.
320. Klir, G. Fuzzy arithmetic with requisite constraints / G. Klir // Fuzzy Sets and Syst. – 1997. – № 91. – P. 165–175.
321. Klir, G. Constrained fuzzy arithmetic: Basic questions and some answers / G. Klir, Y. Pan // Soft Computing. – 1998. – No. 2. – P. 100–108.
322. Li, Y. Uncertainty Analysis of Bistable Vibration Energy Harvesters Based on the Improved Interval Extension / Y. Li, S. Zhou, G. Litak // J. of Vibration Eng. & Techol. – 2020. – V. 8. – P. 297–306.
323. Miklowitz, J. The Theory of Elastic Waves and Waveguides / J. Miklowitz. – North-Holland, 1984. – 618 p.

324. Mizumoto, M. The four Operations of Arithmetic on Fuzzy Number's / M. Mizumoto, K. Tanaka // *Syst., computers, cont.* – 1977. – №7 (5). – P. 73–81.
325. [Momčilović](#), N. Stress concentration on the contour of a plate opening: Analytical, numerical and experimental approach / N. [Momčilović](#), M. [Motok](#), T. [Maneski](#) // [J. Theoretic Appl. Mech.](#) – 2013. – V. 51, N 4. – P. 1003–1012.
326. Murakami, Y. Theory of Elasticity and Stress Concentration / Y. Murakami. – Chichester, West Sussex, UK: John Wiley & Sons, 2017. – 443 p.
327. Nasser, S.H. A New Method for Ordering LR Fuzzy Number / S.H. Nasser, F. Taleshian, Z. Alizadeh, J. Vahidi // *J. of Math. and Computer Sci.* – 2012. – Vol. 4. – No. 3. – P. 283–294.
328. Nikolova-Poceva, S. Hybrid Fuzzy Regression Model for Determining Specific Active Power Generation Characteristic of Hydro Power Plants / S. Nikolova-Poceva, A. Iliev // *Int. J. Inf. Techn. Secur.* – 2016. – Vol. 8, No. 1. – P. 55–68.
329. Oleinikova, S.A. Approximation of the distribution law of the sum of random beta values / S.A. Oleinikova, O.Ja. Kravets // *Int. J. Inf. Techn. Secur.* – 2017. – V.9, No 2. – P. 53–64.
330. Ortiz, C. Acceleration of a liquid drop suddenly exposed to a highspeed airstream / C. Ortiz, D.D. Joseph, G.S. Beavers // *Int. J. of Multiphase Flow.* – 2004. – Vol. 30. – P. 217–224.
331. Rao, P.P.B. Ranking generalized fuzzy numbers using area, mode, spreads and weight / P.P.B. Rao, N.R. Shankar // *Int. J. of Appl. Sci. and Eng.* – 2012. – Vol. 1, No. 10. – P. 41–57.
332. Ravshanov, N. Mathematical model for the research and prediction of a porous body thermal condition / N. Ravshanov, I.U. Shadmanov, O.Ja. Kravets // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* – 2019. – Vol. 537. – 022024. doi:10.1088/1757-899X/537/2/022024 59.
333. Rokhlin, S.I. Elastic wave scattering in random anisotropic solids / S.I. Rokhlin, J. Li // [Int. J. of Solids and Structures.](#) – 2016. – V. 78–79, N 1. – P. 110–124.
334. Savin, G. Stress concentration around the holes / G. Savin. – Oxford: Pergamon Press, 1961. – 222 p.

335. Schueller, G.I. Computational stochastic mechanics recent advances / G.I. Schueller // *Comput. and Struct.* – 2001. – Vol. 79, No. 22–25. – P. 2225–2234.
336. Sonbol, A.H. TSK Fuzzy Function Approximators: Design and Accuracy Analysis / A.H. Sonbol, M.S. Fadali // *IEEE Trans. Syst. Man and Cybern.* – 2012. – Vol. 42 – P. 702–712.
337. Sorokin, S.A. The methodology for calculating the electrical parameters of the pcb lines for high-performance computing devices / S.A. Sorokin, S.M. Chudinov // *Scientific news. Ser. Economics. Computer sci.* – 2017. – No. 2 (251). Chapter 41. – P. 81–91.
338. Storozhev, S.V. Uncertainty in the models of the theory of volume elastic waves through the use of the theory of fuzzy sets / S.V. Storozhev // *Modeling and information technologies: selected papers of the international scientific school «Paradigma» (Summer–2015, Varna, Bulgaria) / Compiling editor dr. sc., prof. O. Ja. Kravets.* – Yelm, WA, USA: Science Book Publishing House, 2015. – P. 45–52.
339. Storozhev, S.V. Fuzzy Evaluations for Kinematic Characteristics of Nonlinear Second Harmonics of Shear Waves in Transversely Isotropic Medium / S.V. Storozhev // *Nonlinear Dynamics – 2016. Proceedings of 5-th International Conference (September 27–30, 2016) / National Technical University «Kharkov Polytechnic Institute» at al.* – Kharkov, 2016. – P. 509–514.
340. Storozhev, S.V. Model of fuzzy ultra-acoustic diagnostics of nanocomposite functionally graded plate constructions in mechanical engineering / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2019. – Vol. 1399. – 022008. doi:10.1088/1742-6596/1399/2/022008
341. Storozhev, S.V. Fuzzy estimates of resonance frequencies for three-layer composite cylindrical panels in smart aerospace and industrial structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // *J. of Phys.: Conf. Ser.* – 2019. – Vol. 1399. – 033044. doi:10.1088/1742-6596/1399/3/033044
342. Storozhev, S.V. Fuzzy-multiple estimates of the parameter uncertainty influence in the computing devices elements calculating theory / S.V. Storozhev, V.I.

Storozhev, V.G. Vyskub, Duong Minh Hai, V.E. Bolnokin // J. of Phys.: Conf. Ser. – 2019. – Vol. 1399. – 044028. doi:10.1088/1742-6596/1399/4/044028

343. Storozhev, S.V. Fuzzy-set analysis of models of temperature deformation of thin-walled elements with elliptic boundaries in industrial and aerospace structures / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // IOP Conf. Series: Mater. Sci. and Eng. – 2020. – Vol. 862. – 022005. [doi:10.1088/1757-899X/862/2/022005](https://doi.org/10.1088/1757-899X/862/2/022005)

344. Storozhev, S.V. Features of ultrasonic non-destructive testing models of rectangular anisotropic elastic waveguides with a membrane coating / S.V. Storozhev, V.E. Bolnokin, V.G. Vyskub, Duong Minh Hai, D.I. Mutin // J. of Phys.: Conf. Ser. – 2020. – Vol. 1679. – 042039. doi:10.1088/1742-6596/1679/4/042039

345. Storozhev, S.V. Accounting of data uncertainty in advanced technological models of design calculations of acoustoelectronic components from piezoelectric materials / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, D.I. Mutin, E.I. Mutina // IOP Conf. Series: Mater. Sci. and Eng. – 2020. – Vol. 862. – 022006. doi:10.1088/1757-899X/862/2/022006

346. Storozhev, S.V. Analysis of the engineering mathematical model of the physical properties of a three-layer hydroacoustic screen with anisotropic components / S.V. Storozhev, V.I. Storozhev, V.E. Bolnokin, S.A. Sorokin // J. of Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol. 2094. – 022011. doi:10.1088/1742-6596/2094/2/022011

347. Tani, J. Intelligent material systems. Applications of functional materials / J. Tani, T. Takagi, J. Qiu // Appl. Mech. Rev. – 1998. – 51, N 8. – P. 505–521.

348. Thorani, Y.L.P. Ordering generalized trapezoidal fuzzy numbers / Y.L.P. Thorani, P.P.B. Rao, N.R. Shankar // Int. J. Contemp. Math. Sci. – 2012. – Vol. 7. – №. 12. – P. 555–573.

349. Totten, G.E. Handbook of Aluminum. Vol. 1: Physical Metallurgy and Processes / G.E. Totten, D.S. MacKenzie. – New York, Basel: Marcel Dekker Ltd, 2003. – 1296 p.

350. Uchino, K. Advanced Piezoelectric Materials / K. Uchino. – Cambridge: Woodhead Publ., 2011. – 696 p.

351. Vyskub, V.G. Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points / V.G. Vyskub, E.I. Mutina, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev // IOP Conf. Series: Mater. Sci. and Eng. – 2019. – Vol. 537. – 022013. doi:10.1088/1757-899X/537/2/022013

352. Vyskub, V.G. Model of fuzzy estimation of mechanical stress concentration for aerospace and industrial flat structures with polygonal holes of uncertain curvature at rounded corner points / V.G. Vyskub, E.I. Mutina, V.I. Storozhev, S.V. Storozhev // Int. Sci. Workshop «Advanced technol. in mater. sci., mech. and automation eng.». MIP: Eng. – 2019 within the framework of XXIV Int. Sci. and Res. Open Conf. «Modern Informatization Problems» (Yelm, WA, USA). Abstract Book. – Krasnoyarsk: Sci. & Technol. City Hall, 2019. – P. 38.

353. Yang, Y.-H. Non-destructive detection of a circular cavity in a finite functionally graded material layer using anti-plane shear waves / Y.-H. Yang, L.-Z. Wu, X.-Q. Fang // J. Nondestructive Eval. – 2010. – Vol. 29. – P. 233–240.

354. Wang, Y.M. On the centroids of fuzzy numbers / Y.M. Wang, J.B. Yang, D.-L. Xu, K.-S. Chin // Fuzzy Sets and Syst. – 2006. – Vol. 157. – P. 919.

355. Wu, S. Dispersion Characteristics of Elastic Waves in Saturated Soils / S. Wu, L. Chen // Proc.: Second Int. Conf. on Recent Adv. in Geotechnical Earthquake Eng. and Soil Dynamics (March 11-15, 1991, St. Louis, Missouri). – Paper No. 10.14. – P. 1409–1414.

356. Zadeh, L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility / L.A. Zadeh // Fuzzy sets and syst. – 1978. – № 1. – P. 3–28.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Документы о внедрении результатов диссертационного исследования



ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО
«НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ
им. М.А. КАРЦЕВА»
АО «НИИВК им. М.А. Карцева»
ИНН 7728032882; ОГРН 1037700128828
ул. Профсоюзная, дом 108, г. Москва, 117437
тел. (495) 330-09-29; факс (495) 330-56-30
postoffice@niivk.ru; www.niivk.ru

В диссертационный совет Д 01.024.04
при Государственном
образовательном учреждении
высшего профессионального
образования
«Донецкий национальный
технический университет»
и Государственном образовательном
учреждении
высшего профессионального
образования
«Донецкий национальный
университет»

23.11.2021 № 404-01

на № _____ от _____

СПРАВКА

о внедрении результатов научных исследований,
изложенных в диссертации Сторожева Сергея Валериевича
«Нечетко-множественные методы учета факторов неопределенности в математических
моделях деформационных и тепловых процессов»
на соискание ученой степени доктора технических наук
по специальности 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ (технические науки)

Настоящим подтверждаем, что результаты, базирующиеся на применении аппарата нечетко-множественного анализа научных исследований по проблемам моделирования колебательных и волновых деформационных процессов и эффектов теплового экранирования для компонентов и устройств электронной техники при учете факторов разброса значений исходных экспериментальных параметров конструкционных материалов, отклонений в геометрических и топологических характеристиках электронных компонентов и устройств, технологических допусков их изготовления и монтажа, а также вариации эксплуатационных режимов, представленные в диссертационной работе С.В. Сторожева «Нечетко-множественные методы учета факторов неопределенности в математических моделях деформационных и тепловых процессов», а также результаты разработки программных приложений для компьютерной реализации расчетных алгоритмов предложенных методик, получили практическое применение в поисковых и проектных разработках АО «НИИВК им. М.А. Карцева».



Д 01.024.04
Т.В. Сторожева

Предложенные методы обладают дополнительными возможностями и расширенными перспективами применения к различным новым классам рассматриваемых моделей и характеризуются менее строгими требованиями к характеру неконтрастной исходной информации, включая возможности использования данных, полученных на основе субъективных экспертных заключений.

К числу внедренных методик и результатов относятся нечетко-множественные оценки в моделях теории ультразвуковых волн деформаций в пьезоактивных средах; нечетко-множественные оценки для скоростей электроупругих поверхностных волн сдвигового типа; нечетко-множественные оценки для характеристик нормальных ультразвуковых волн в однослойных и двухслойных волноводах; методики анализа моделей нечеткой идентификации механических параметров нанокompозитных функционально-градиентных резонаторов и пластин с использованием данных ультразвуковой диагностики; нечетко-множественные подходы к учету факторов неопределенности в расчетах тепловых экранов с теплоотражающими и теплоизолирующими слоями.

Генеральный директор



А. В. Горшков



До 01.02.2019 г. в Минске

ДОНЕЦКАЯ НАРОДНАЯ РЕСПУБЛИКА
 МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
 РЕСПУБЛИКАНСКИЙ АКАДЕМИЧЕСКИЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И
 ПРОЕКТНО-КОНСТРУКТОРСКИЙ ИНСТИТУТ ГОРНОЙ ГЕОЛОГИИ, ГЕОМЕХАНИКИ,
 ГЕОФИЗИКИ И МАРКШЕЙДЕРСКОГО ДЕЛА
 (РАНИМИ)



Донецкая Народная Республика
 83004, город Донецк, Киевский район
 улица Челюскинцев, 291
 Тел.: +38 (062) 300 27 91; +38 (062) 300 27 92
 E-mail: ranimi@ranimi.org

19. 11. 2021 № 01.02-02/381
 на № _____ от _____

Диссертационный совет
 Д 01.024.04

СПРАВКА

о внедрении результатов научных исследований, представленных в диссертационной работе Сторожева Сергея Валериевича «Нечетко-множественные методы учета факторов неопределенности в математических моделях деформационных и тепловых процессов» на соискание ученой степени доктора технических наук по специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

Настоящим подтверждается, что результаты представленных в диссертационной работе Сторожева С.В. «Нечетко-множественные методы учета факторов неопределенности в математических моделях деформационных и тепловых процессов» научных исследований по разработке теоретических численно-аналитических методик учета факторов неопределенности в моделях статического и волнового деформирования твердых тел, разработке вычислительных алгоритмов и программных приложений для компьютерной реализации предложенных методик, в том числе:

- разработка нечетко-множественной методики учета факторов неопределенности в задачах формирования полей концентрации напряжений и зон пластических деформаций около полостей и отверстий;
 - разработка нечетко-множественных методик исследования моделей распространения, дисперсии и трансформации объемных, поверхностных и нормальных упругих волн;
 - разработка резонансно-волновой методики нечеткой идентификации механических свойств деформируемых тел;
 - синтез модели нечеткой идентификации механических параметров анизотропного функционально-градиентного упругого слоя с использованием данных сейсмоакустической диагностики
- а также программные приложения для компьютерной реализации



Д 01.024.04 *Ирина Т.В. Журавлева*

расчетных алгоритмов перечисленных методик, получили практическое применение и использование в научных исследованиях и внедренных на горнодобывающих предприятиях Донбасса практических разработках Республиканского академического научно-исследовательского и проектно-конструкторского института горной геологии, геомеханики, геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ) по научно-исследовательским темам отдела компьютерных технологий № 5ф/19 Разработка теории и методических основ сейсмического прогноза структуры углепородного массива из полевых выработок, № 17/12 Разработка теоретических основ применения дифрагированных волновых полей для прогноза структуры массива горных пород методом сейсмической локации, № 1п/17 Разработка средств автоматизации обработки и анализа результатов сейсмических исследований при прогнозе структуры углепородного массива в сложных горно-геологических условиях отработки угольных пластов Донбасса. Предложенные в диссертационной работе методики, учитывающие неконтрастность физико-механических и геометрических характеристик массивов горных пород и подземных сооружений позволяют, в частности, повысить адекватность и степень практической значимости результатов обработки сейсмических данных при проведении сейсмических экспериментов для прогноза структуры углепородного массива; прогноза структуры углепородного массива из полевых выработок; данных сейсмоакустического прогноза геологических нарушений массива горных пород; данных опережающего сейсмоакустического прогноза горно-геологических условий залегания полезных ископаемых на участках, куда еще не дошли горные работы для повышения полноты добычи полезных ископаемых и обеспечения безопасности ведения горных работ.

Справка дана для предъявления в диссертационный совет.

Директор Государственного учреждения
«Республиканский академический
научно-исследовательский и проектно-конструкторский
институт горной геологии, геомеханики,
геофизики и маркшейдерского дела (РАНИМИ)»
доктор технических наук, профессор

А.В. Анциферов



Д. 01.04.04 Зубова Т.В. Зубарева



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ул. Университетская, 24, г. Донецк, 283001, тел: приемная (062) 302-07-22, справочная служба
(062) 302-06-00, факс: (062) 302-07-49
e-mail: rector@donnu.ru Идентификационный код 02070803

15.11.2011 № 6877/01-24/01-1 В диссертационный совет
на _____ от _____ Д 01.024.04
при ГОУ ВПО «Донецкий
национальный технический
университет»
и ГОУ ВПО «Донецкий
национальный университет»
283001, г. Донецк, ул. Артёма, 58

СПРАВКА

о внедрении результатов диссертационной работы
Сторожева Сергея Валериевича

«Нечетко-множественные методы учета факторов неопределенности в
математических моделях деформационных и тепловых процессов»,
представленной на соискание ученой степени доктора технических наук по
специальности 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ
(технические науки)

Настоящим подтверждается, что новые результаты научных исследований, доц. Сторожева С.В., представленные в подготовленной им диссертационной работе на тему «Нечетко-множественные методы учета факторов неопределенности в математических моделях деформационных и тепловых процессов», и заключающиеся в разработке методических приемов алгоритмизации и создания прикладных программных приложений для реализации численно-аналитических методов нечетко-множественного математического моделирования в технических науках, внедрены в учебный процесс при подготовке авторских разделов учебных курсов и учебно-методических материалов в Государственном образовательном учреждении



Соответствует
Ученым
диссертационного совета

Доц. С.В. Сторожева Т.В. Сторожева

высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет»:

– в рамках преподавания в должности доцента кафедры информационных систем управления ГОУ ВПО ДОННУ по совместительству учебной дисциплины «Теоретические основы информатики» для студентов направления подготовки 27.03.03 «Системный анализ и управление» на факультете математики и информационных технологий ГОУ ВПО ДОННУ;

– в качестве материалов учебных и учебно-методических пособий:

Основы современных методов прикладного нечеткого моделирования: учебно-методическое пособие / Сторожев В.И., Сторожев С.В., Устинов Д.В., Устинова Н.В. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 84 с.;

Современные проблемы прикладной математики и информатики: алгоритмы нечеткого моделирования в прикладных естественнонаучных, психолого-правовых и социально-экономических исследованиях: учебное пособие / Сторожев В.И., Сторожев С.В., Устинов Д.В., Устинова Н.В. – Донецк: ДонНУ, 2019. – 168 с.

Вычислительная гидроакустика: учебное пособие / Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожев В.И., Сторожев С.В. – Донецк: ДонНУ, 2016. – 185 с.

Программирование алгоритмов вычислительной гидроакустики: учебно-методическое пособие / Номбре С.Б., Прийменко С.А., Сторожев В.И., Сторожев С.В. – Донецк: ДонНУ, 2016. – 92 с.

Справка дана для предъявления в диссертационный совет.

Проектор по научно-методической
и учебной работе, проф.



Е.И. Скафа

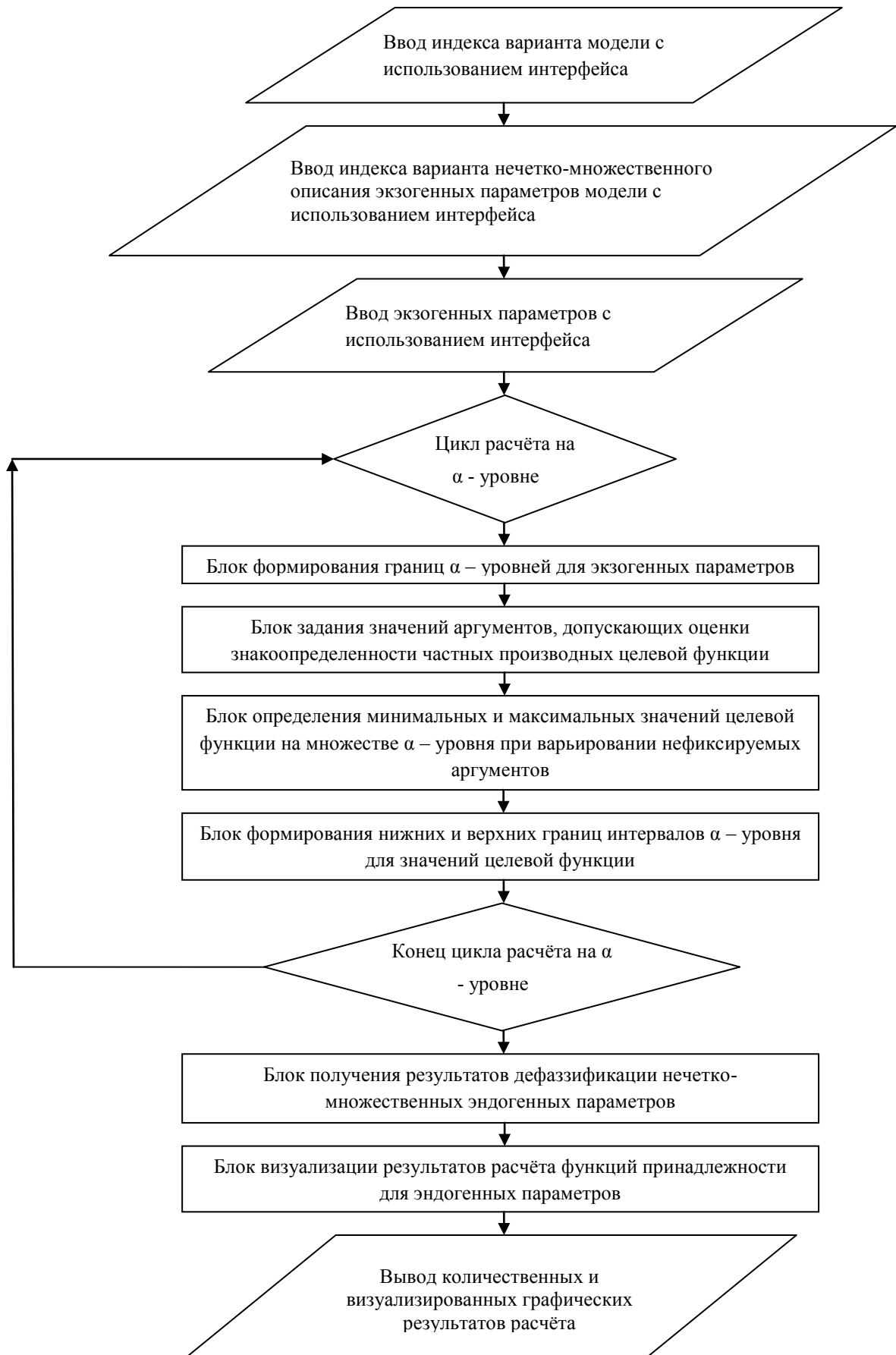


Документ от [подпись] Т.В. [подпись]

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Скриншоты программных приложений для реализации разработанных
нечётко-множественных методов

Структурная блок схема программных приложений для реализации нечетко-множественных расчетных алгоритмов



```

cs = 10^10;
rs = 10^3;
sis = 10^6;
mus = 4 * Pi * 10^7;
      |число пи
hsz = 1;

e1 = 19.7 * cs;
e2 = 19.9 * cs;
e3 = 20.0 * cs;
e4 = 20.2 * cs;

nu1 = 0.276;
nu2 = 0.279;
nu3 = 0.282;
nu4 = 0.285;

rs1 = 0.95 * hsz;
rs2 = 0.99 * hsz;
rs3 = 1.02 * hsz;
rs4 = 1.06 * hsz;

h1 = 0.0038 * hsz;
h2 = 0.004 * hsz;
h3 = 0.0042 * hsz;
h4 = 0.0044 * hsz;

r11 = 104.95 * hsz;
r12 = 104.99 * hsz;
r13 = 105.02 * hsz;
r14 = 105.06 * hsz;

c1 = e1 / cs;
c2 = e2 / cs;
c3 = e3 / cs;
c4 = e4 / cs;
Print["Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра модуля Юнга"];
|печатать
Print[
|печатать
Plot[Function[{x, a, b, c, d},  $\theta + (x - a) / (b - a) * \text{UnitStep}[x - a] + \text{UnitStep}[b - x] +$ 
|гр... |функция |единичная функци... |единичная функция-ступ
UnitStep[x - b] * UnitStep[c - x] +
|единичная функция-ступенька
((d - x) / (d - c)) * UnitStep[x - c] * UnitStep[d - x]] {
|единичная функци... |единичная функция-ступенька
x, c1, c2, c3, c4}, {x, c1 * 0.8, c4 * 1.2}, Filling -> Bottom]];
|запись |низ

```

```

c1 = nu1;
c2 = nu2;
c3 = nu3;
c4 = nu4;

Print["Функция принадлежности для
печатать
нечетко-интервального параметра коэффициента Пуассона"];
Print[Plot[Function[(x, a, b, c, d),  $\theta + ((x - a) / (b - a)) * \text{UnitStep}[x - a] * \text{UnitStep}[b - x] + \text{UnitStep}[x - b] * \text{UnitStep}[c - x] + ((d - x) / (d - c)) * \text{UnitStep}[x - c] * \text{UnitStep}[d - x]$ ][x, c1, c2, c3, c4], {x, c1 * 0.95, c4 * 1.05}, Filling -> Bottom]];

```

```

c1 = rs1;
c2 = rs2;
c3 = rs3;
c4 = rs4;
Print["Функция принадлежности для нечетко-интервального
печатать
параметра радиуса круговых сечений трубчатой части оболочки"];
Print[Plot[Function[(x, a, b, c, d),  $\theta + ((x - a) / (b - a)) * \text{UnitStep}[x - a] * \text{UnitStep}[b - x] + \text{UnitStep}[x - b] * \text{UnitStep}[c - x] + ((d - x) / (d - c)) * \text{UnitStep}[x - c] * \text{UnitStep}[d - x]$ ][x, c1, c2, c3, c4], {x, c1 * 0.95, c4 * 1.05}, Filling -> Bottom]];

```

```

c1 = r11;
c2 = r12;
c3 = r13;
c4 = r14;

Print["Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра
печатать
расстояния от оси симметрии оболочки до центров поперечных сечений"];
Print[Plot[Function[(x, a, b, c, d),  $\theta + ((x - a) / (b - a)) * \text{UnitStep}[x - a] * \text{UnitStep}[b - x] + \text{UnitStep}[x - b] * \text{UnitStep}[c - x] + ((d - x) / (d - c)) * \text{UnitStep}[x - c] * \text{UnitStep}[d - x]$ ][x, c1, c2, c3, c4], {x, c1 * 0.98, c4 * 1.02}, Filling -> Bottom]];

```

```

c1 = h1;
c2 = h2;
c3 = h3;
c4 = h4;

Print["Функция принадлежности для
_печатать
нечетко-интервального параметра толщины стенки оболочки"];
Print[Plot[Function[{x, a, b, c, d},  $\theta + ((x - a) / (b - a)) * \text{UnitStep}[x - a] *
_гр... _функция _единичная функция-ступенька
UnitStep[b - x] + \text{UnitStep}[x - b] + \text{UnitStep}[c - x] +
_единичная функци... _единичная функция-ступенька
((d - x) / (d - c)) * \text{UnitStep}[x - c] + \text{UnitStep}[d - x]] [x,
_единичная функци... _единичная функция-ступенька
c1, c2, c3, c4], {x, c1 * 0.95, c4 * 1.05}, Filling -> Bottom]];
_заливка _низ

nf = Array[0, 21];
_массив
vf = Array[0, 21];
_массив

da = 0.05;

n = 21;

qz = 10;

nt = 1;

Do[a1 = (na - 1) * da;
_оператор цикла
en = a1 * e2 + (1. - a1) * e1;
ev = a1 * e3 + (1. - a1) * e4;

rsn = a1 * rs2 + (1. - a1) * rs1;
rsv = a1 * rs3 + (1. - a1) * rs4;

rln = a1 * rl2 + (1. - a1) * rl1;
rlv = a1 * rl3 + (1. - a1) * rl4;

nun = a1 * nu2 + (1. - a1) * nu1;
nuv = a1 * nu3 + (1. - a1) * nu4;

hn = a1 * h2 + (1. - a1) * h1;
hv = a1 * h3 + (1. - a1) * h4;

rs = rsn;
rl = rln;
nu = nun;$ 
```

```
e = en;
h = hn;
```

```
kn = rs / r1;
```

```
dn = ((1/2) * kn * kn *
      (nt * nt + ((1 - nu * nu) / 2) * nt * nt * kn * kn + (1 + nu) * (1 + nu) * kn * kn + nu + 1) /
      (nt * nt * (nt * nt * (1 + kn * kn / 2) + (1 + nu) * kn * kn / 2))) / (1 + kn * kn / 4);
lbn = ((nt * nt - 1 + nt * nt * kn * kn / 2) * (nt * nt * (1 + kn * kn / 2) + kn * kn) /
      (nt * nt * (1 + kn * kn / 2) + ((1 + nu) / 2) * kn * kn) + kn * kn / 2) / (1 + kn * kn / 4);
fn = (en * hn / (rs * (1 - nu * nu))) * (dn + hn * hn * lbn / (12 * rs * rs));
fv = (ev * hv / (rs * (1 - nu * nu))) * (dn + hv * hv * lbn / (12 * rs * rs));
```

```
he = (ev - en) / (qz - 1);
hrs = (rsv - rsn) / (qz - 1);
hr1 = (r1v - r1n) / (qz - 1);
hnu = (nuv - nun) / (qz - 1);
hh = (hv - hn) / (qz - 1);
```

```
Do [
  |оператор цикла
  Do [
    |оператор цикла
    Do [
      |оператор цикла
      rs = rsn + (z11 - 1) * hrs;
      r1 = r1n + (z12 - 1) * hr1;
      nu = nun + (z13 - 1) * hnu;
```

```
kn = rs / r1;
```

```
dn = ((1/2) * kn * kn *
      (nt * nt + ((1 - nu * nu) / 2) * nt * nt * kn * kn + (1 + nu) * (1 + nu) * kn * kn + nu + 1) /
      (nt * nt * (nt * nt * (1 + kn * kn / 2) + (1 + nu) * kn * kn / 2))) / (1 + kn * kn / 4);
lbn = ((nt * nt - 1 + nt * nt * kn * kn / 2) * (nt * nt * (1 + kn * kn / 2) + kn * kn) /
      (nt * nt * (1 + kn * kn / 2) + ((1 + nu) / 2) * kn * kn) + kn * kn / 2) / (1 + kn * kn / 4);

ffn = (en * hn / (rs * (1 - nu * nu))) * (dn + hn * hn * lbn / (12 * rs * rs));
ffv = (ev * hv / (rs * (1 - nu * nu))) * (dn + hv * hv * lbn / (12 * rs * rs));
```

```
If[ffv > fv, fv = ffv]; If[ffn < fn, fn = ffn],
```

```
|оператор цикла
```

```
|оператор цикла
```

```

    {z11, 2, qz}],
    {z12, 2, qz}],
    {z13, 2, qz}];

```

```

vf[[na]] = fv; nf[[na]] = fn,

```

```

{na, 1, n}];

```

```

Print["Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики интенсивности
печатаТЬ

```

```

критических усилий с параметром формы потери устойчивости n=", nt];

```

```

Print[
печатаТЬ

```

```

ListLinePlot[{{nf[[1]], 0.}, {nf[[2]], 0.05}, {nf[[3]], 0.1}, {nf[[4]], 0.15},
линейный график данных

```

```

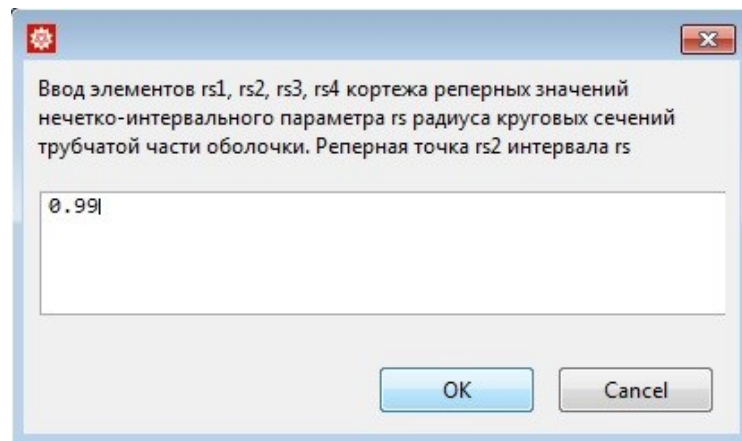
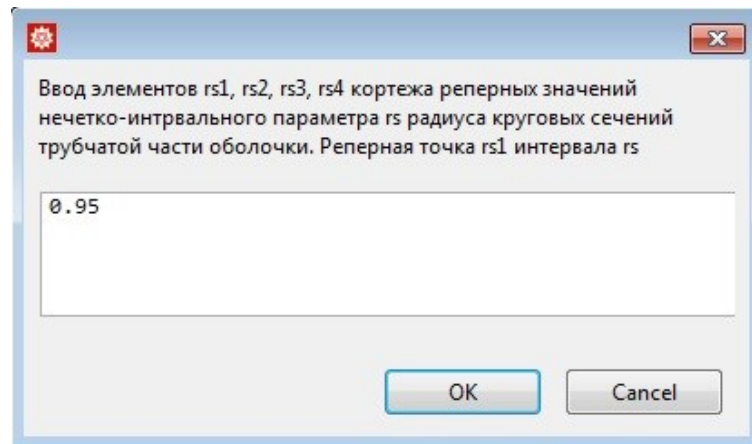
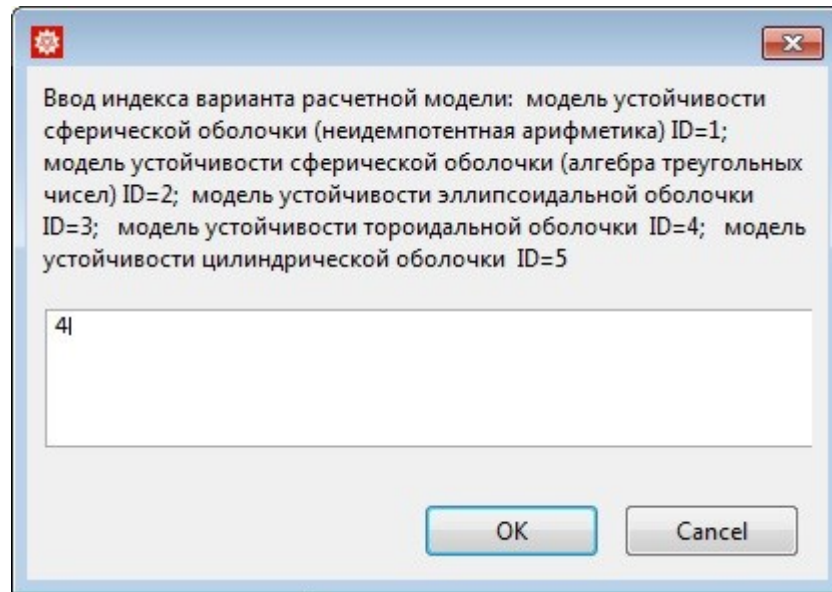
    {nf[[5]], 0.2}, {nf[[6]], 0.25}, {nf[[7]], 0.3}, {nf[[8]], 0.35}, {nf[[9]], 0.4},
    {nf[[10]], 0.45}, {nf[[11]], 0.5}, {nf[[12]], 0.55}, {nf[[13]], 0.6},
    {nf[[14]], 0.65}, {nf[[15]], 0.7}, {nf[[16]], 0.75}, {nf[[17]], 0.8},
    {nf[[18]], 0.85}, {nf[[19]], 0.9}, {nf[[20]], 0.95}, {nf[[21]], 1.},
    {vf[[21]], 1.}, {vf[[20]], 0.95}, {vf[[19]], 0.9}, {vf[[18]], 0.85},
    {vf[[17]], 0.8}, {vf[[16]], 0.75}, {vf[[15]], 0.7},
    {vf[[14]], 0.65}, {vf[[13]], 0.6}, {vf[[12]], 0.55}, {vf[[11]], 0.5},
    {vf[[10]], 0.45}, {vf[[9]], 0.4}, {vf[[8]], 0.35}, {vf[[7]], 0.3},
    {vf[[6]], 0.25}, {vf[[5]], 0.2}, {vf[[4]], 0.15}, {vf[[3]], 0.1},
    {vf[[2]], 0.05}, {vf[[1]], 0.}}, Filling -> Bottom];

```

```

заливка низ

```



Ввод элементов rs_1 , rs_2 , rs_3 , rs_4 кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра rs радиуса круговых сечений трубчатой части оболочки. Реперная точка rs_3 интервала rs

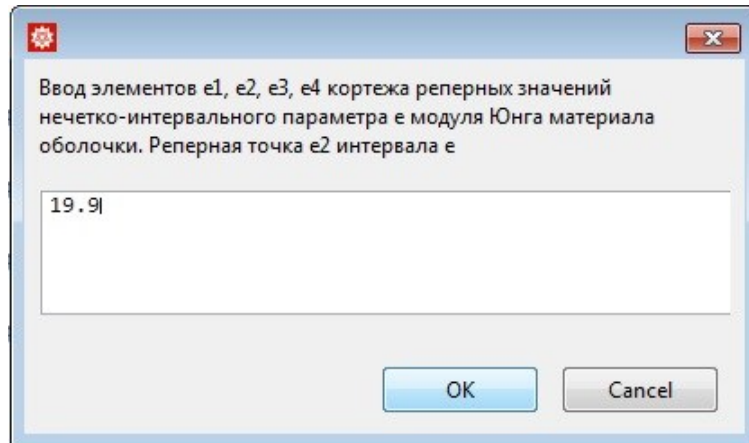
OK Cancel

Ввод элементов rs_1 , rs_2 , rs_3 , rs_4 кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра rs радиуса круговых сечений трубчатой части оболочки. Реперная точка rs_4 интервала rs

OK Cancel

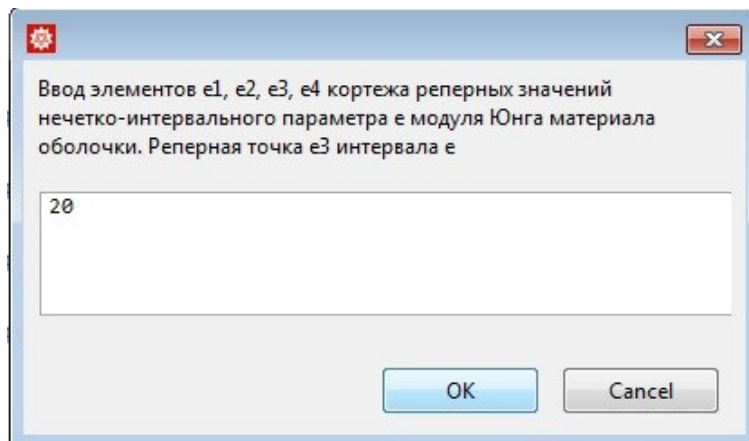
Ввод элементов e_1 , e_2 , e_3 , e_4 кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра e модуля Юнга материала оболочки. Реперная точка e_1 интервала e

OK Cancel



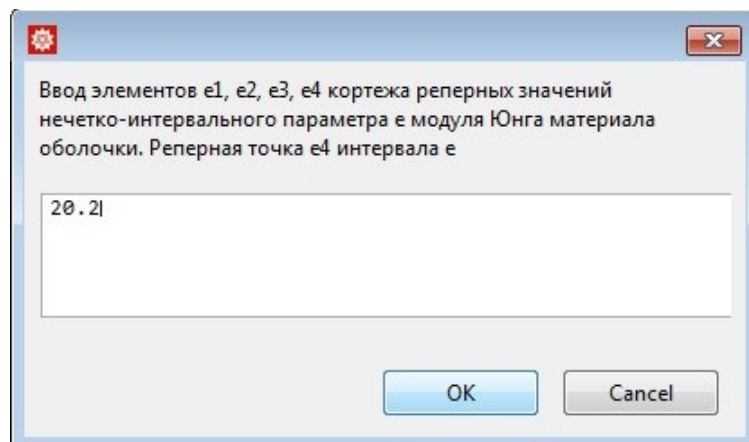
Ввод элементов $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра ϵ модуля Юнга материала оболочки. Реперная точка ϵ_2 интервала ϵ

OK Cancel



Ввод элементов $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра ϵ модуля Юнга материала оболочки. Реперная точка ϵ_3 интервала ϵ

OK Cancel



Ввод элементов $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра ϵ модуля Юнга материала оболочки. Реперная точка ϵ_4 интервала ϵ

OK Cancel

Ввод элементов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра μ коэффициента Пуассона материала оболочки. Реперная точка μ_1 интервала μ

$\emptyset . 276$

OK Cancel

Ввод элементов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра μ коэффициента Пуассона материала оболочки. Реперная точка μ_1 интервала μ

$\emptyset . 279$

OK Cancel

Ввод элементов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра μ коэффициента Пуассона материала оболочки. Реперная точка μ_1 интервала μ

$\emptyset . 282$

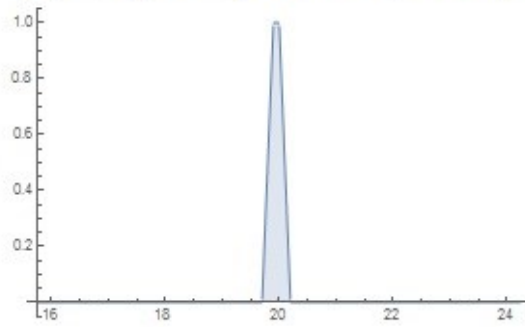
OK Cancel

Ввод элементов $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ кортежа реперных значений нечетко-интервального параметра μ коэффициента Пуассона материала оболочки. Реперная точка μ_1 интервала μ

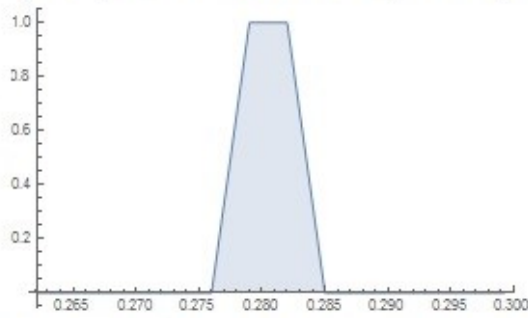
$\emptyset . 285$

OK Cancel

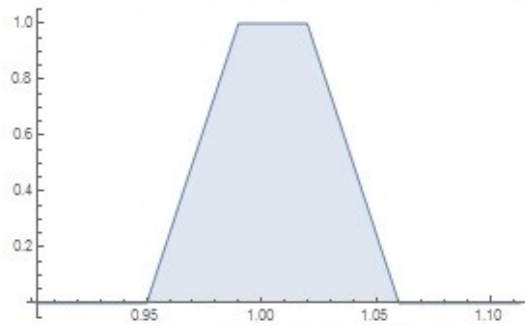
Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра модуля Юнга



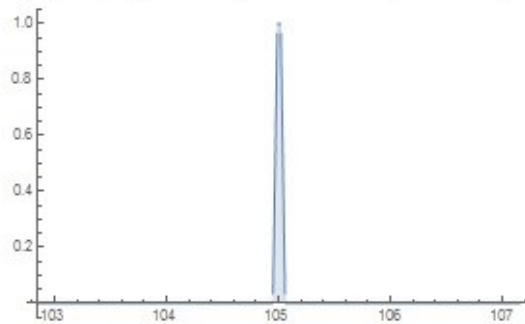
Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра коэффициента Пуассона



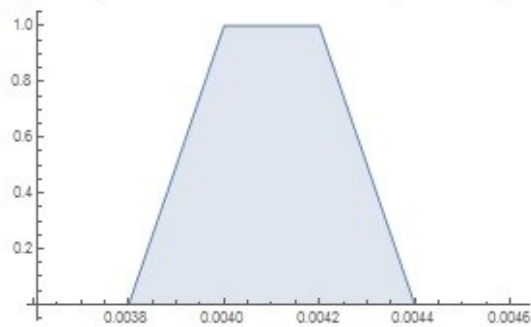
Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра радиуса круговых сечений трубчатой части оболочки



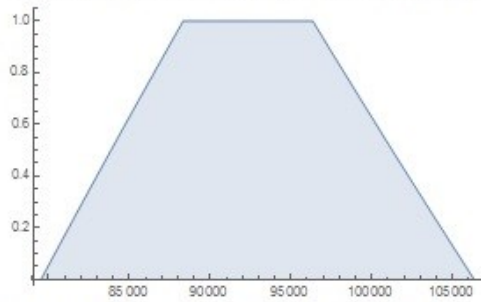
Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра расстояния от оси симметрии оболочки до центров поперечных сечений



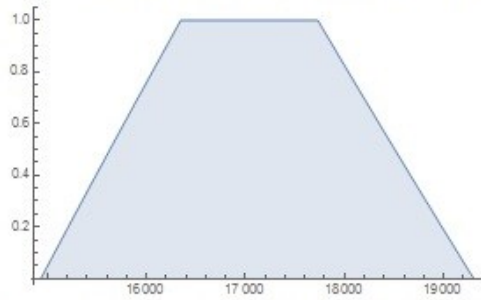
Функция принадлежности для нечетко-интервального параметра толщины стенки оболочки



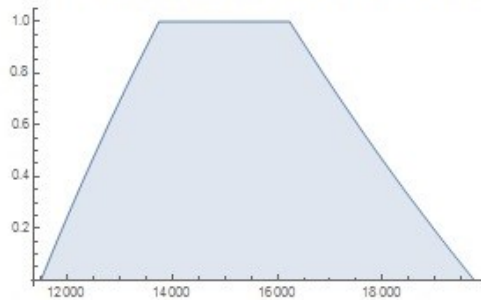
Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики интенсивности критических усилий с параметром формы потери устойчивости $n=1$



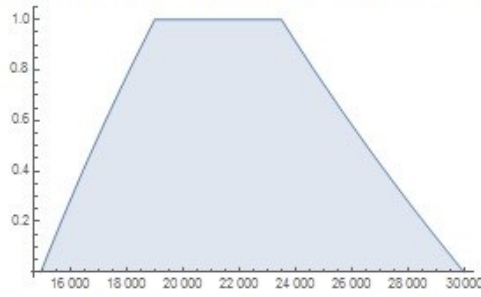
Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики интенсивности критических усилий с параметром формы потери устойчивости $n=2$



Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики интенсивности критических усилий с параметром формы потери устойчивости $n=3$



Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики интенсивности критических усилий с параметром формы потери устойчивости $n=4$



Функция принадлежности для нечетко-множественной характеристики интенсивности критических усилий с параметром формы потери устойчивости $n=5$

